

VERSUCHSPROTOKOLL M12
SAITENSCHWINGUNG

JOHANN FÖRSTER 519519

VERSUCHSPARTNER MEIKEL SOBANSKI

MESSPLATZ 1

HUMBOLDT UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung	3
2.1) Vorbetrachtung der Messunsicherheiten	3
2.2) Ergebnisse der Messung der Resonanzfrequenzen f_n und der Lage x der Schwingungsknoten für die konstante Saitenlänge $l=0,6\text{m}$ und Belastung mit 1kg in Kerbe 3	4
2.3) Grafische Darstellung $f_n = f(n)$ und Berechnung der linearen Massendichte μ sowie der Phasengeschwindigkeit c^{trans}	5-6
2.4) Ergebnisse der Messung der Resonanzfrequenz f_1 für 10 verschiedene Saitenlängen und Belastung mit 1kg in Kerbe 3	6
2.5) Grafische Darstellung $f_1 = f(\frac{1}{l})$ und Berechnung der Phasengeschwindigkeit c^{trans}	6-7
2.6) Ergebnisse der Messung der Resonanzfrequenz f_1 für die konstante Saitenlänge $l=0,6\text{m}$ und Belastung mit 10 verschiedenen Massen	7
2.7) Grafische Darstellung $f_1 = f(\sqrt{F_0})$ und Berechnung der linearen Massendichte μ	8
3) Fehleranalyse und kritische Selbsteinschätzung	9
4) Quellenangabe	9
Anhang: Messprotokoll	10

1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Ziel des Versuches war es, die transversalen Schwingungen einer Saite zu untersuchen und insbesondere die Resonanzfrequenzen f_n für bestimmte Belastungen, die lineare Massendichte μ und die Phasengeschwindigkeit c^{trans} sowie die Lage der Schwingungsknoten x bei den Oberschwingungen gemäß [1], Seite 58-60 zu bestimmen und mit den theoretischen Erwartungen zu vergleichen.

2.1) Vorbetrachtung der Messunsicherheiten

Unsicherheiten der Längenmessungen

Die Saitenlänge l wurde als Differenz der Positionen der beiden Reiter R1 und R2 ([1], Seite 39) mittels einer Längenskala bestimmt. Die Unsicherheit der Längenmessung ergibt sich gemäß [2], Seite 17 aus der Ablesegenauigkeit $\Delta l_1 = 0,2\text{mm}$ und dem Teilungsfehler $\Delta l_2 = 10^{-3} * L$. Da beide Messwerte mit der angegebenen Ablesegenauigkeit eingehen, der Teilungsfehler jedoch nur von der Differenz beider Messwerte abhängt, ergibt sich die Unsicherheit der Saitenlänge l nach der Fehlerfortpflanzung zu $u(l) = \sqrt{2 * (0,2\text{mm})^2 + (10^{-3} * l)^2}$

Die Ablesegenauigkeit der Lage der Detektorspule wird jedoch aufgrund der zusätzlichen Ungenauigkeit des Oszilloskops zu $\Delta l_3 = 1\text{mm}$ abgeschätzt, wodurch sich die Gesamtunsicherheit für die Lage x der Schwingungsknoten nach der Fehlerfortpflanzung zu $u(x) = \sqrt{1\text{mm}^2 + (0,2\text{mm})^2 + (10^{-3} * x)^2}$ ergibt.

Unsicherheit der Resonanzfrequenz f_n

Die Ablesegenauigkeit der Frequenz der Erregerspule wird mit 1 LSD = 0,01Hz angenommen. Da die Resonanzfrequenz f_n der doppelten Erregerfrequenz entspricht, wird die Unsicherheit der Resonanzfrequenz zu $u(f_n) = 0,02\text{Hz}$ abgeschätzt. Die Unsicherheit bei der Einstellung der Resonanzfrequenz mittels Oszilloskop wird an dieser Stelle vernachlässigt, da sie zum Großteil auch vom experimentellen Geschick der Experimentatoren abhängt und mathematisch nicht erfassbar ist.

Unsicherheit der Zugkraft F_0

Die Gewichtskraft der angehangenen Massen $F_g = m * g$ trägt mit dem Längenverhältnis k zwischen waagrecht und senkrecht Hebelarm mit $F = m * g * k$ zur Zugkraft bei. Zusätzlich wirkt aufgrund des Eigengewichts des Lasthebels gemäß [1], Seite 59 eine zusätzliche Kraft von 0,52N, bei der eine Unsicherheit von 1 LSD = 0,01N angenommen wird. Die Masse wird als fehlerfrei angenommen, für die Erdbeschleunigung g wird der Wert von Potsdam $g = (9,81274 \pm 0,00003) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ angenommen, dessen Unsicherheit offensichtlich ebenfalls vernachlässigt werden kann. Die Unsicherheit des Übersetzungsverhältnisses k wird mit $u(k) = 10^{-3} * k$ abgeschätzt, wodurch nach der Fehlerfortpflanzung für die Unsicherheit der Zugkraft F_0 folgt: $u(F_0) = \sqrt{(0,01\text{N})^2 + (mgk * 10^{-3})^2}$

2.2) Ergebnisse der Messung der Resonanzfrequenzen f_n und der Lage x der Schwingungsknoten für die konstante Saitenlänge $l=0,6m$ und Belastung mit $1kg$ in Kerbe 3

Experimentell wurden folgende Ergebnisse ermittelt:

Mode n	Resonanzfrequenz f_n in Hz	Lage x der Schwingungsknoten in cm
1	$161,58 \pm 0,02$	
2	$325,40 \pm 0,02$	30
3	$489,20 \pm 0,02$	20,05 39,9
4	$654,20 \pm 0,02$	15,1 30 45
5	$818,00 \pm 0,02$	12,25 24,05 36 48
6	$984,20 \pm 0,02$	20 30 40,05 49,95
7	$1150,20 \pm 0,02$	17,2 25,8 34,3 42,8 51,35
8	$1314,40 \pm 0,02$	15 22,6 30 37,5 45,05 52,5
9	$1479,40 \pm 0,02$	20 26,65 33,3 39,9 46,6 53,35

wobei $u(x) \approx 0,11cm$

Überprüfung der Beziehung $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ ([1], Seite 57, Gleichung 13):

Theoretisch müssten sich jeweils $n-1$ Knoten gleichmäßig auf die Gesamtlänge l aufteilen (die Knoten an den Randpunkten werden nicht betrachtet), also gilt für die Lage des i -ten Knotens $x_i = i * \frac{l}{n}$, der Abstand zweier benachbarter Knoten entspricht dabei der halben Wellenlänge $\frac{\lambda_n}{2} = \frac{l}{n}$.

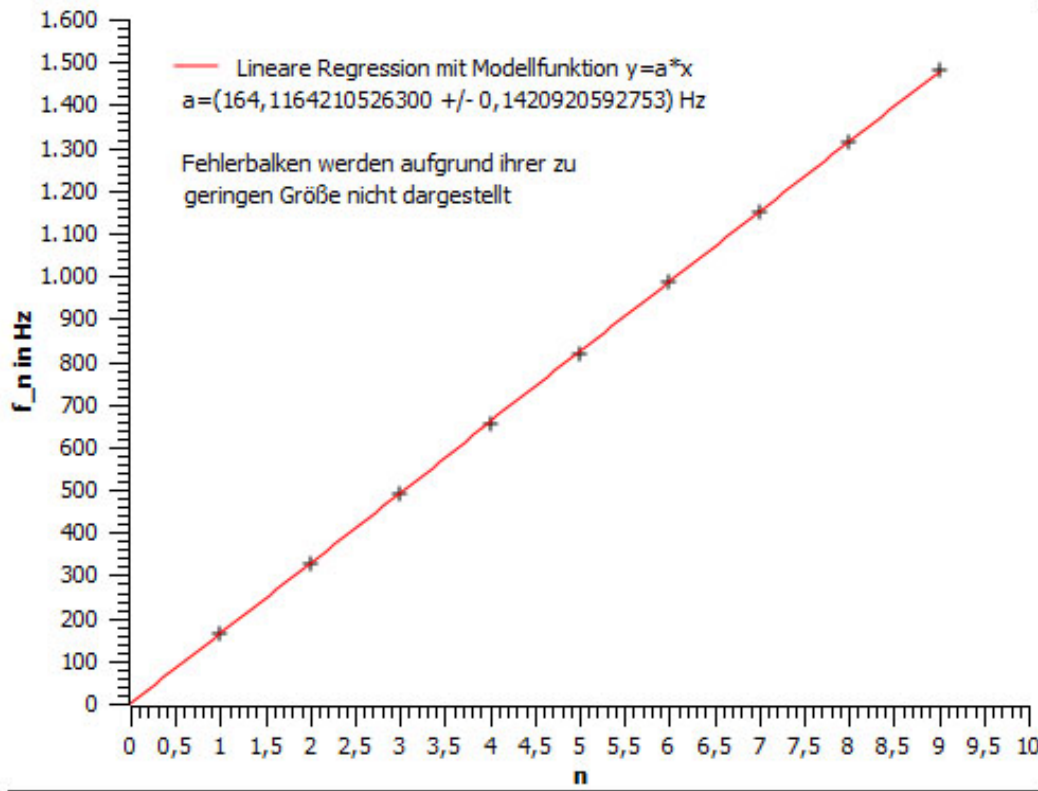
Die Abweichung der experimentellen Lagen zu den theoretischen Vorhersagen ergibt sich analog zur Standardabweichung zu:

$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i - i \frac{l}{n}\right)^2}$, wobei hier $\frac{1}{n-1}$ statt $\frac{1}{n-2}$ steht, da der Mittelwert ein theoretischer exakter Wert und kein experimenteller Wert ist. Damit folgt für die Abweichungen:

Mode n	s in mm
2	0
3	0,79
4	0,58
5	1,27
6	0,32
7	0,60
8	0,42
9	0,45

Bis auf Mode $n=5$ liegen alle Standardabweichungen unterhalb der Unsicherheit $u(x) \approx 1,1mm$. Die Abweichung resultiert hauptsächlich aus dem ersten Messwert, dessen Ungenauigkeit aufgrund der Nähe zur Erregerspule größer ist. Das Ergebnis entspricht also voll den Erwartungen.

2.3) Grafische Darstellung $f_n = f(n)$ und Berechnung der linearen Massendichte μ sowie der Phasengeschwindigkeit c^{trans}



Grafische Darstellung der Abhängigkeit $f_n(n)$

Die Abszissenwerte wurden als fehlerfrei angenommen, während die Ordinatenwerte fehlerbehaftet sind. Der Anstieg a der linearen Regression ergab sich entsprechend [2], Seite 41 zu:

$$a = \frac{1}{D} \left(\sum_{i=1}^n \frac{i f(i)}{u(f(i))^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u(f(i))^2} - \sum_{i=1}^n \frac{i}{u(f(i))^2} \sum_{i=1}^n \frac{f(i)}{u(f(i))^2} \right)$$

$$\text{mit der Unsicherheit } u(a) = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u(f(i))^2}}$$

$$\text{und } D = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{u(f(i))^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u(f(i))^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{i}{u(f(i))^2} \right)^2$$

Nach Gleichung 11, Quelle [1], Seite 56 gilt: $f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$, wobei sich der Anstieg a identifizieren lässt mit $\sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \frac{1}{2l}$, wodurch für die lineare Massendichte μ folgt:

$$\mu = \frac{F_0}{4l^2 a^2} = \frac{9,81274 \cdot 3 + 0,52}{4 \cdot (0,6)^2 \cdot (164,1164210526300)^2} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \approx 0,772 \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

$$\text{mit } u(\mu) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial a} u(a) \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial F_0} u(F_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial l} u(l) \right)^2} \approx 0,003 \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

$$\Rightarrow \mu = (0,772 \pm 0,003) \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

Die experimentell ermittelte Massendichte liegt leicht unterhalb der Herstellerangabe $\mu = 0,78 \frac{\text{g}}{\text{m}}$.

Für die Phasengeschwindigkeit gilt $c^{trans} = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} = 196,9 \frac{m}{s}$ ([1], Seite 55) mit

$$u(c^{trans}) = \sqrt{\left(\frac{\partial c^{trans}}{\partial F_0} u(F_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial c^{trans}}{\partial \mu} u(\mu)\right)^2} \approx 0,2 \frac{m}{s}$$

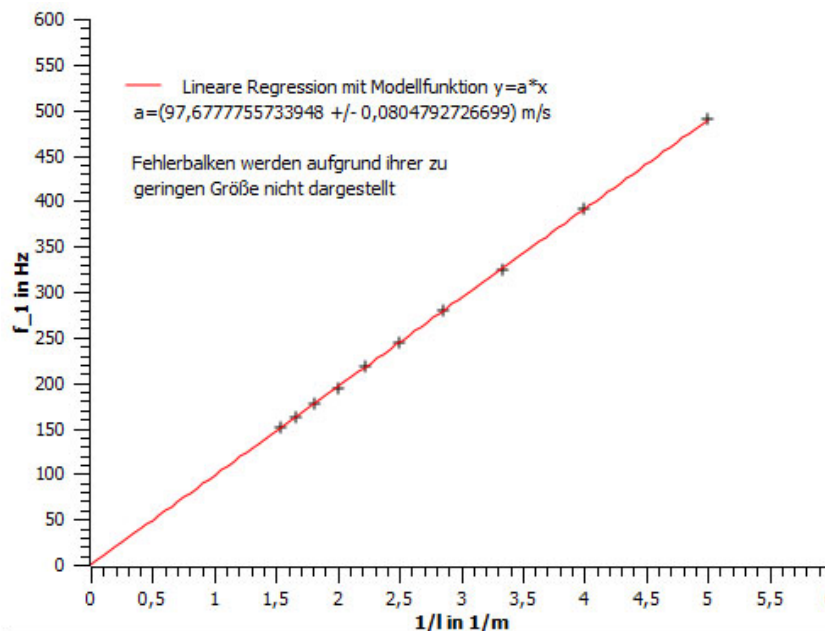
$$\Rightarrow c^{trans} = (196,9 \pm 0,2) \frac{m}{s}$$

2.4) Ergebnisse der Messung der Resonanzfrequenz f_1 für 10 verschiedene Saitenlängen und Belastung mit 1kg(k=3)

Experimentell wurden folgende Ergebnisse ermittelt:

Länge l in cm	$\frac{1}{l}$ in $\frac{1}{m}$	Resonanzfrequenz f_1 in Hz
20 ± 0,03	5,000 ± 0,009	489,2 ± 0,02
25 ± 0,04	4,000 ± 0,006	391,4 ± 0,02
30 ± 0,04	3,333 ± 0,005	324,8 ± 0,02
35 ± 0,05	2,857 ± 0,004	279,2 ± 0,02
40 ± 0,05	2,500 ± 0,003	243,8 ± 0,02
45 ± 0,05	2,222 ± 0,003	217,8 ± 0,02
50 ± 0,06	2,000 ± 0,002	194,3 ± 0,02
55 ± 0,06	1,818 ± 0,002	176,66 ± 0,02
60 ± 0,07	1,667 ± 0,002	162,18 ± 0,02
65 ± 0,07	1,538 ± 0,002	150,06 ± 0,02

2.5) Grafische Darstellung $f_1 = f\left(\frac{1}{l}\right)$ und Berechnung der Phasengeschwindigkeit c^{trans}



Grafische Darstellung der Abhängigkeit $f_1\left(\frac{1}{l}\right)$

Der Anstieg der Regressionsgeraden und seine Unsicherheit ergeben sich analog zu 2.3)

Gemäß Gleichung 17, Quelle [1], Seite 58 ergibt sich für die Eigenfrequenz $f_1 = \frac{c^{trans}}{2l}$, wodurch sich der Anstieg a identifizieren lässt mit $a = \frac{c^{trans}}{2}$. Draus folgt $c^{trans} = 2a = 195,3555 \frac{m}{s}$, $u(c^{trans}) = 2 * u(a) = 0,161 \frac{m}{s}$

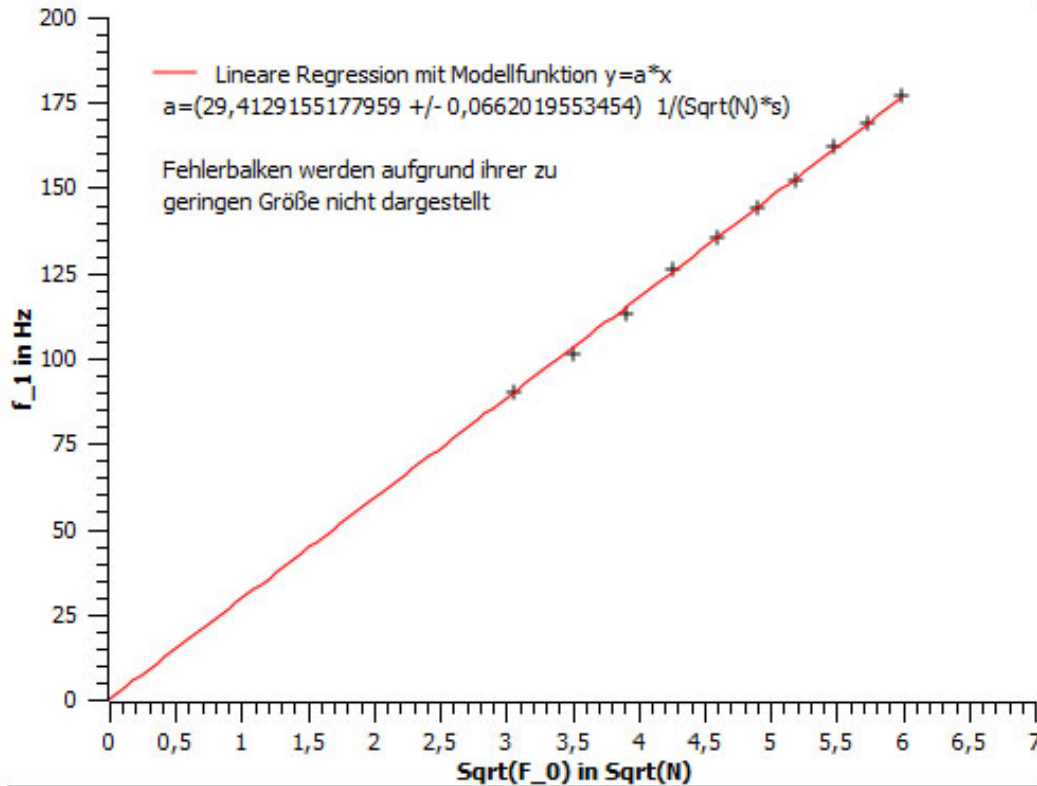
$$\Rightarrow c^{trans} = (195,4 \pm 0,2) \frac{m}{s}$$

Das Ergebnis für c^{trans} ist etwas kleiner als das Ergebnis aus 2.3) und sie überschneiden sich auch nicht innerhalb ihrer Messunsicherheit.

2.6) Ergebnisse der Messung der Resonanzfrequenz f_1 für die konstante Saitenlänge $l=0,6m$ und Belastung mit 10 verschiedenen Zugkräften

Masse m in g	Kerbe	Zugspannung F_0 in N	$\sqrt{F_0}$ in \sqrt{N}	f_1 in Hz
300	3	$9,35 \pm 0,01$	$3,058 \pm 0,002$	$89,84 \pm 0,02$
400	3	$12,30 \pm 0,02$	$3,506 \pm 0,002$	$101,52 \pm 0,02$
500	3	$15,24 \pm 0,02$	$3,904 \pm 0,002$	$113,26 \pm 0,02$
600	3	$18,18 \pm 0,02$	$4,264 \pm 0,002$	$126,18 \pm 0,02$
700	3	$21,13 \pm 0,02$	$4,596 \pm 0,003$	$135,26 \pm 0,02$
800	3	$24,07 \pm 0,03$	$4,906 \pm 0,003$	$143,98 \pm 0,02$
900	3	$27,01 \pm 0,03$	$5,198 \pm 0,003$	$152,18 \pm 0,02$
1000	3	$29,96 \pm 0,03$	$5,473 \pm 0,003$	$162,20 \pm 0,02$
1100	3	$32,90 \pm 0,03$	$5,736 \pm 0,003$	$168,80 \pm 0,02$
900	4	$35,85 \pm 0,04$	$5,987 \pm 0,003$	$177,20 \pm 0,02$

2.7) Grafische Darstellung $f_1 = f(\sqrt{F_0})$ und Berechnung der linearen Massendichte μ



Grafische Darstellung der Abhängigkeit $f_1(\sqrt{F_0})$

Der Anstieg der Regressionsgeraden und seine Unsicherheit ergeben sich analog zu 2.3)

Nach Gleichung 11, Quelle [1], Seite 56 gilt für die Eigenfrequenz $f_1^{trans} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$

Damit lässt sich der Anstieg identifizieren mit $a = \frac{1}{2l\sqrt{\mu}}$ und für die lineare Massendichte μ folgt $\mu = \frac{1}{4l^2 a^2} = \frac{1}{4 \cdot (0,6)^2 \cdot (29,4129155177959)^2} \frac{\text{kg}}{\text{m}} = 0,803 \frac{\text{g}}{\text{m}}$.

Für die Unsicherheit gilt nach der Fehlerfortpflanzung

$$u(\mu) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial l} u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial a} u(a)\right)^2} \approx 0,004 * 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \mu = (0,803 \pm 0,004) \frac{\text{g}}{\text{m}}$$

Der ermittelte Wert für μ überschneidet sich innerhalb seiner Messunsicherheit nicht mit dem in 2.3) ermittelten und ist größer als dieser, außerdem überschneidet er sich innerhalb seiner Messunsicherheit nicht mit der Herstellerangabe $\mu = 0,78 \frac{\text{g}}{\text{m}}$.

3) Fehleranalyse und kritische Selbsteinschätzung

Im Großen und Ganzen liegen die experimentell ermittelten Werte in der Nähe der theoretischen Erwartungen, vor allem die erwarteten Lagen der Schwingungsknoten konnten experimentell bestätigt werden. Allerdings haben offensichtlich mathematisch nicht erfasste Messunsicherheiten das Ergebnis beeinflusst, denn weder die experimentell bestimmten Ergebnisse der linearen Massendichte μ in 2.3) und 2.7) noch die Ergebnisse der Phasengeschwindigkeiten c^{trans} in 2.3) und 2.5) überschneiden sich innerhalb ihrer Unsicherheiten. Außerdem stehen die beiden ermittelten linearen Massendichten μ im Widerspruch zur Herstellerangabe. Grund für diese Abweichungen ist vermutlich zum eine viel zu geringe Abschätzung der Genauigkeit des Tonfrequenzgenerators, da bei mehrfachem einstellen der stehenden Welle eine Genauigkeit von 1 LSD nicht erreicht werden konnte. Zum anderen wurde auch die Ungenauigkeit des Oszilloskops vernachlässigt, wobei dabei auch das experimentelle Geschick der Experimentatoren eine Rolle spielt. Außerdem wurde die Ungenauigkeit der Horizontalstellung des Kraftübersetzungshebels und die Unsicherheit der Massen vernachlässigt, was die Zugspannung F_0 beeinflusst hat.

4) Quellenangabe

[1] Skript “Phys. Grundpraktikum I: Mechanik und Thermodynamik“, 2005, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/GPRI.html> (Stand: 08.06.2008)

[2] Skript “Phys. Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik“, 2007, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Einfuehrung/PDF-Datei/Einfuehrung.pdf> (Stand: 01.06.2008)

[3] http://www.laiv-mv.de/land-mv/LAiV_prod/LAiV/AfGVK/_faltblaetter/FB.L.S.H.pdf (Stand: 01.06.2008)