

M2: Trägheitsmomente

Verfasserin: Dan-Nha Huynh, 512230

Versuchspartner: Marco Kraft

Versuchsbetreuer: Dr. U. Herzog

Versuchsplatz: 4

Versuchsdatum: 25. Juni 2008

1. ZIELSTELLUNG	3
2. VERWENDETE MESSINSTRUMENTE	3
3. VERSUCHSAUFBAU	3
4. ERSTELLUNG DER EICKURVE	3
4.1 DURCHFÜHRUNG	3
4.2 MESSDATEN	4
4.3 ERSTELLUNG DER DATEN FÜR DIE EICKURVE	5
4.4 EICKURVE	6
5. ÜBERPRÜFUNG DER FORMEL FÜR DAS TRÄGHEITSELLIPSOID	6
5.1 VORBETRACHTUNG	6
5.2 DURCHFÜHRUNG	7
5.3 MESSDATEN	7
5.4 MODIFIZIERUNG DER MESSDATEN	8
5.5 ERSTELLUNG DES GRAPHEN	8
5.6 BEURTEILUNG DER QUALITÄT DER MESSERGEBNISSE BZW. DES ERSTELLTEN GRAPHEN	9
5.6.1 Berechnung theoretischer Werte	9
5.6.2 Gegenüberstellung theoretischer und experimenteller Werte	10
6. KRITISCHE BETRACHTUNG	10
7. APPENDIX	11

1. Zielstellung

Überprüfung der folgenden Formel für das Trägheitsellipsoid:

$$J_{\vec{n}} = \vec{n}(J \cdot \vec{n}) = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$$

bzw.

(Gl. 1-1)

$$J_x p_x^2 + J_y p_y^2 + J_z p_z^2 = 1$$

Hinweis: Für weitere Informationen zu den Aufgabenstellungen sowie den physikalischen und rechentechnischen Grundlagen dieses Versuches sei auf die beiden Skripteⁱ verwiesen.

2. Verwendete Messinstrumente

Messschieber ($e_s = 5 \cdot 10^{-5} \text{m} + 10^{-4} \cdot l$), Digitalstoppuhr ($e_s = 0,01 \text{s} + 5 \cdot 10^{-4} t$), Winkelmesser ($e_s = 2^\circ$)

3. Versuchsaufbau

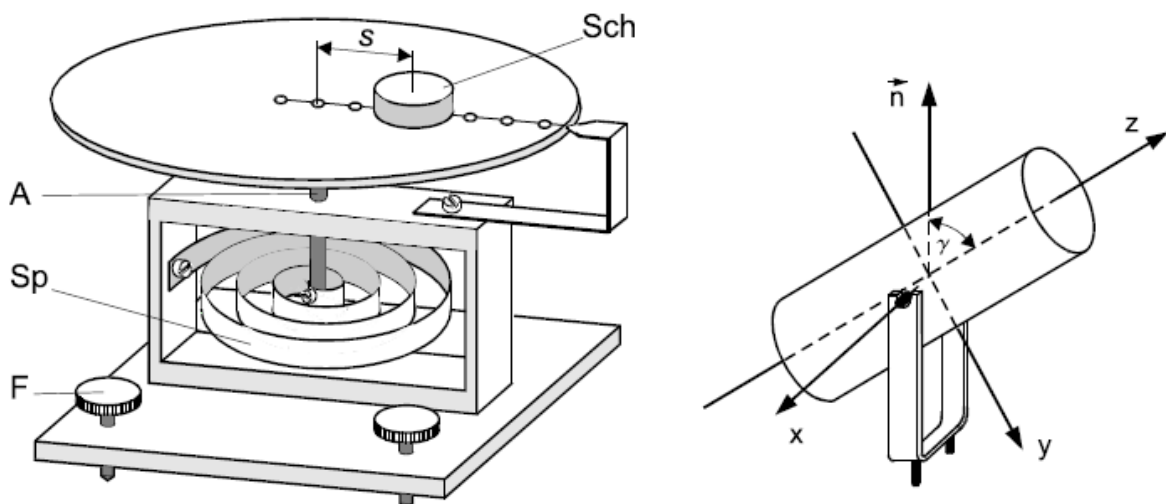


Abbildung 3-1ⁱⁱ

A: Drehachse, Sp: Schneckenfeder, F: Fußschraube, Sch: Scheibe, s: senkrechter Abstand der Symmetrieachse von Sch zur Drehachse A

4. Erstellung der Eichkurve

Durchführung

Für sechs verschiedene Abstände s der Symmetrieachse der aufgelegten Scheibe von der Drehachse A werden je zweimal die zehnfachen Schwingungsdauern ($10 \cdot T$) gemessen. Ebenso wird ohne Zusatzträgheitsmoment die zehnfache Schwingungsdauer des Tisches zweimal gemessen. Dabei wird jeweils am Umkehrpunkt gestoppt.

Aus den Messwerten können die einfachen Schwingungsdauern T und deren Quadrate T^2 gebildet werden. Zur Ermittlung der Abstände s wird die Gesamtlänge s_G gemessen und diese durch 6 geteilt.

Messdaten

Masse der Scheibe: $m_s = (248,4 \pm 0,1)g$

Durchmesser der Scheibe: $d_s = (4,81 \pm 0,05)cm$

Radius der Scheibe: $r_s = (2,41 \pm 0,03)cm$

Gesamtlänge: $s_G = (9,38 \pm 0,10)cm$

Abstand der Symmetrieachse von A: $s = (1,56 \pm 0,02)cm$

Messung ohne Zusatzträgheitsmoment:

Messung i	10·T/s	T/s	T ² /s ²
1	4,04	0,404	0,163216
2	4,03	0,403	0,162409
Arith. Mittelwert $\Sigma/2$	4,035	0,4035	0,16281225

Tabelle 4.2-1

Messung mit Zusatzträgheitsmoment:

Messung i	n·s/cm n=0,...,5	10·T/s	T/s	T ² /s ²
1	0	4,24	0,424	0,179776
2	0	4,27	0,427	0,182329
Arith. Mittelwert $\Sigma/2$	0	4,255	0,4255	0,18105025
3	1,56	4,46	0,446	0,198916
4	1,56	4,45	0,445	0,198025
Arith. Mittelwert $\Sigma/2$	1,56	4,455	0,4455	0,19847025
5	3,12	4,89	0,489	0,239121
6	3,12	4,92	0,492	0,242064
Arith. Mittelwert $\Sigma/2$	3,12	4,905	0,4905	0,24059025
7	4,68	5,68	0,568	0,322624
8	4,68	5,67	0,567	0,321489
Arith. Mittelwert $\Sigma/2$	4,68	5,675	0,5675	0,32205625
9	6,24	6,55	0,655	0,429025
10	6,24	6,54	0,654	0,427716
Arith. Mittelwert $\Sigma/2$	6,24	6,545	0,6545	0,42837025
11	7,8	7,5	0,75	0,5625
12	7,8	7,49	0,749	0,561001
Arith. Mittelwert $\Sigma/2$	7,8	7,495	0,7495	0,56175025

Tabelle 4.2-2

Anmerkung: Als bestanzunehmende Werte wurden jeweils aus den zwei Messwerten zum jeweiligen Abstand bzw. aus den beiden Messwerten der Messung ohne Zusatzträgheitsmoment (ohne Scheibe), die arithmetischen Mittelwerte gebildet.

Erstellung der Daten für die Eichkurve

Aus dem Steinerschen Satz folgt für das Zusatzträgheitsmoment bezüglich A:

$$J_Z = \underbrace{\frac{1}{2} m_s \cdot r_s^2}_{J_s} + m_s \cdot s^2 = \frac{1}{2} m_s \cdot \left(\frac{d_s}{2} \right)^2 + m_s \cdot s^2 \quad (\text{Gl. 4.3-1})$$

J_s : Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich ihrer Symmetrieachse

Somit können die verschiedenen J_Z berechnet werden, ihre Messunsicherheit ergibt sich dabei folgendermaßen:

- Die systematische Messabweichung $e_s(J_Z)$ ergibt sich aus der pythagoreischen Fehlerfortpflanzung und wird für jeden Abstand erneut berechnet:

$$e_s(J_Z) = \sqrt{\left(\left(\frac{r_s^2}{2} + s^2 \right) \cdot u_{m_s} \right)^2 + (m_s \cdot r_s \cdot u_{r_s})^2 + (2m_s \cdot s \cdot u_s)^2} \quad (\text{Gl. 4.3-2})$$

- Die statistische Messabweichung $e_z(J_Z)$ ergibt sich hingegen aus der Größtfehlerabschätzung, d.h. es wird jeweils der Betrag der größten Abweichung der Messwerte bezüglich des arithmetischen Mittelwertes angenommen.

Somit erhält man aus

$$u_{J_Z} = \sqrt{e_z^2(J_Z) + e_s^2(J_Z)} \quad (\text{Gl. 4.3-3})$$

die Messunsicherheit des jeweiligen J_Z .

Ebenfalls müssen systematische und zufällige Messabweichung bzw. die Messunsicherheit für das Quadrat der Schwingungsdauern bestimmt werden:

- systematische Messabweichung $e_s(T^2)$:

$$e_s(T^2) = |2 \cdot T \cdot u_T| \quad (\text{Gl. 4.3-4})$$

u_T : systematische Messunsicherheit der Digitalstoppuhr (wie folgt in Abschnitt 2 angegeben)

- Die statistische Messabweichung $e_z(T^2)$ wird analog zu $e_z(J_Z)$ angenommen.

Die Messunsicherheit u_{T^2} ergibt sich dann wiederum analog zu u_{J_Z} .

Trägt man nun die Ergebnisse der vorangegangenen Berechnungen zusammen, so erhält man folgende Tabelle:

T^2/s^2	u_{T^2}/s^2	J_Z/kgm^2	u_{J_Z}/kgm^2
0,18105025	0,008783967	7,1838E-05	4,4415E-07
0,19847025	0,009119371	0,00013229	7,1352E-07
0,24059025	0,010157414	0,00031364	1,221E-06
0,32205625	0,011685856	0,00061589	1,796E-06
0,42837025	0,013534217	0,00103905	2,4111E-06
0,56175025	0,015569812	0,0015831	3,0616E-06

Tabelle 4.3-1

Eichkurve

Aus den Daten aus Tabelle 4.3-1 ergibt sich dann folgende Eichkurve, wobei T^2 in Abhängigkeit von J_z aufgetragen wird. Der Fit wird dabei mit folgender Formel durchgeführt

$$T^2(J_z) = a(J_z + J_T) \quad (\text{Gl. 4.4-1}),$$

J_T : Trägheitsmoment des Tisches bezüglich A

um korrelationsfreie Parameter a , und J_T zu erhalten.

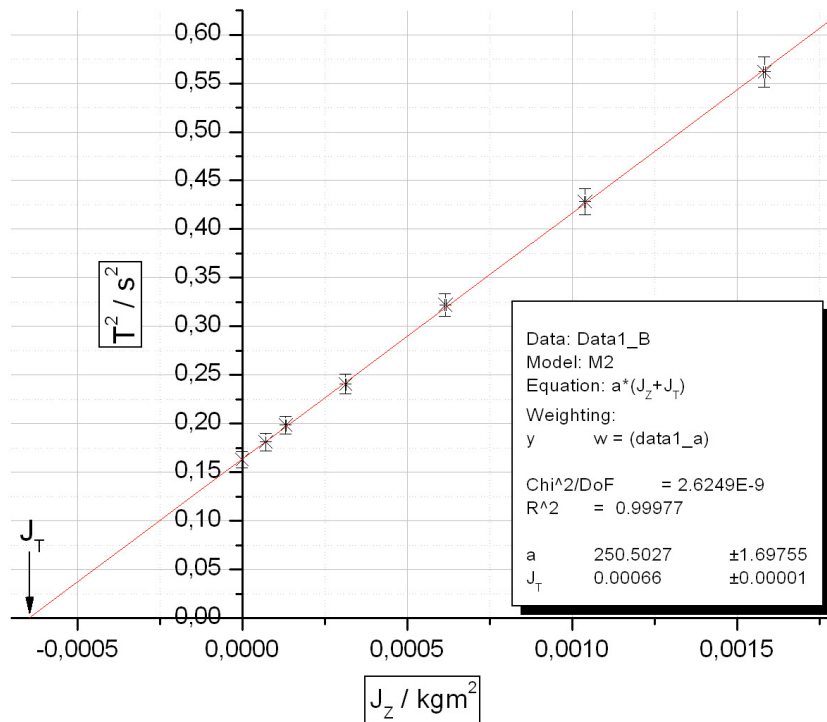


Abbildung 4.4-1

$$a = (251,0 \pm 2,0) \frac{s^2}{kg \cdot m^2}$$

$$J_T = (6,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$$

5. Überprüfung der Formel für das Trägheitsellipsoid

Vorbetrachtung

Mit Hilfe der Eichkurve lässt sich nun im Folgenden die Gl. 1-1 überprüfen. Zunächst muss Gl. 1-1 jedoch zunächst umgeformt werden. Für folgende Zwecke wird für \vec{n} derart gewählt:

$$\vec{n} = \left(0, \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \gamma, \cos \gamma \right) \quad (\text{Gl. 5.1-1})$$

Setzt man nun jene Relation ein so ergibt sich unter Verwendung von $\cos^2 \gamma = 1 - \sin^2 \gamma$ folgender Zusammenhang:

$$J_\gamma := J_{\bar{n}} = J_z + (J_y - J_z) \sin^2 \gamma \quad (\text{Gl. 5.1-2})$$

Wird nun J_γ gegen $\sin^2 \gamma$ aufgetragen, so müsste sich bei Korrektheit der verwendeten Formeln ein linearer Zusammenhang ergeben.

Durchführung

Ein in einer Halterung schwenkbarer Zylinder wird in der Mitte des Drehtisches angebracht. Die Lage der Symmetrieachse wird dabei in 15° Schritten von 0° bis 90° verändert (s. Abbildung 3-1) und zu jeder Winkelstellung je zweimal die 10-fache Periodendauer gemessen.

Messdaten

Masse des Zylinders: $m_z = (1354,7 \pm 0,1)g$

Durchmesser der Scheibe: $d_z = (4,41 \pm 0,05)cm$

Radius der Scheibe: $r_z = (2,21 \pm 0,02)cm$

Höhe des Zylinders: $h_z = (10,0 \pm 0,1)cm$

Messung i	10·T/s	T/s	T ² /s ²	γ°	γrad	sin ² γ
1	5,13	0,513	0,263169	0	0	0
2	5,16	0,516	0,266256	0	0	0
Arith. Mittelwert Σ/2	5,145	0,5145	0,26471025	0	0	0
3	5,24	0,524	0,274576	15	0,261799388	0,0669873
4	5,26	0,526	0,276676	15	0,261799388	0,0669873
Arith. Mittelwert Σ/2	5,25	0,525	0,275625	15	0,261799388	0,0669873
5	5,73	0,573	0,328329	30	0,523598776	0,25
6	5,74	0,574	0,329476	30	0,523598776	0,25
Arith. Mittelwert Σ/2	5,735	0,5735	0,32890225	30	0,523598776	0,25
7	6,2	0,62	0,3844	45	0,785398163	0,5
8	6,22	0,622	0,386884	45	0,785398163	0,5
Arith. Mittelwert Σ/2	6,21	0,621	0,385641	45	0,785398163	0,5
9	6,76	0,676	0,456976	60	1,047197551	0,75
10	6,79	0,679	0,461041	60	1,047197551	0,75
Arith. Mittelwert Σ/2	6,775	0,6775	0,45900625	60	1,047197551	0,75
11	7,13	0,713	0,508369	75	1,308996939	0,9330127
12	7,14	0,714	0,509796	75	1,308996939	0,9330127
Arith. Mittelwert Σ/2	7,135	0,7135	0,50908225	75	1,308996939	0,9330127
13	7,25	0,725	0,525625	90	1,570796327	1
14	7,24	0,724	0,524176	90	1,570796327	1
Arith. Mittelwert Σ/2	7,245	0,7245	0,52490025	90	1,570796327	1

Tabelle 5.3-1

Modifizierung der Messdaten

Um tatsächlich den Zusammenhang $J_\gamma = f(\sin^2\gamma)$ grafisch darstellen zu können müssen die verschiedenen J_γ (= J_z) ermittelt werden. Diese sind aus der Eichkurve für die entsprechenden T^2 abzulesen bzw. von dem verwendeten Rechenprogramm ablesen zu lassen. Ebenfalls möglich ist die direkte Berechnung der J_γ aus Gl. 4.4-1, wie es in diesem Fall geschah:

$$J_\gamma = \frac{T^2}{a} - J_T \quad (\text{Gl. 5.4-1})$$

Für die Messunsicherheit von J_γ ergibt sich jeweils:

- Systematische Messabweichung

$$e_s(J_\gamma) = \sqrt{\left(\frac{2T}{a} \cdot u_T\right)^2 + \left(-\frac{T^2}{a^2} \cdot u_a\right)^2 + (-u_{J_T})^2} \quad (\text{Gl. 5.4-2})$$

- Die zufällige Messabweichung ergibt sich wiederum aus der in 4.3 erwähnten Größtfehlerabschätzung

Die Messunsicherheit ergibt sich entsprechend Gl. 4.3-3.

Die Messunsicherheit des eingestellten Winkels wird an dieser Stelle mit $u_\gamma = 2^\circ$ abgeschätzt, dies ergibt für alle $\sin^2 \gamma$ eine Messunsicherheit von:

$$u_{\sin^2 \gamma} = |2 \sin \gamma \cos \gamma \cdot u_\gamma|$$

$\gamma/^\circ$	$\sin^2\gamma$	$u_{\sin^2\gamma}$	J_γ/kgm^2	$u_{J_\gamma}/\text{kgm}^2$
0	0	0	0,000396716	4,43242E-05
15	0,0669873	0,017453293	0,000440288	4,49842E-05
30	0,25	0,030229989	0,000652969	4,90194E-05
45	0,5	0,034906585	0,000879468	5,33543E-05
60	0,75	0,030229989	0,001172341	5,87163E-05
75	0,9330127	0,017453293	0,001372243	6,14695E-05
90	1	4,27657E-18	0,001435388	6,24715E-05

Tabelle 5.4-1

Erstellung des Graphen

Nun kann J_γ in Abhängigkeit von $\sin^2 \gamma$ dargestellt werden:

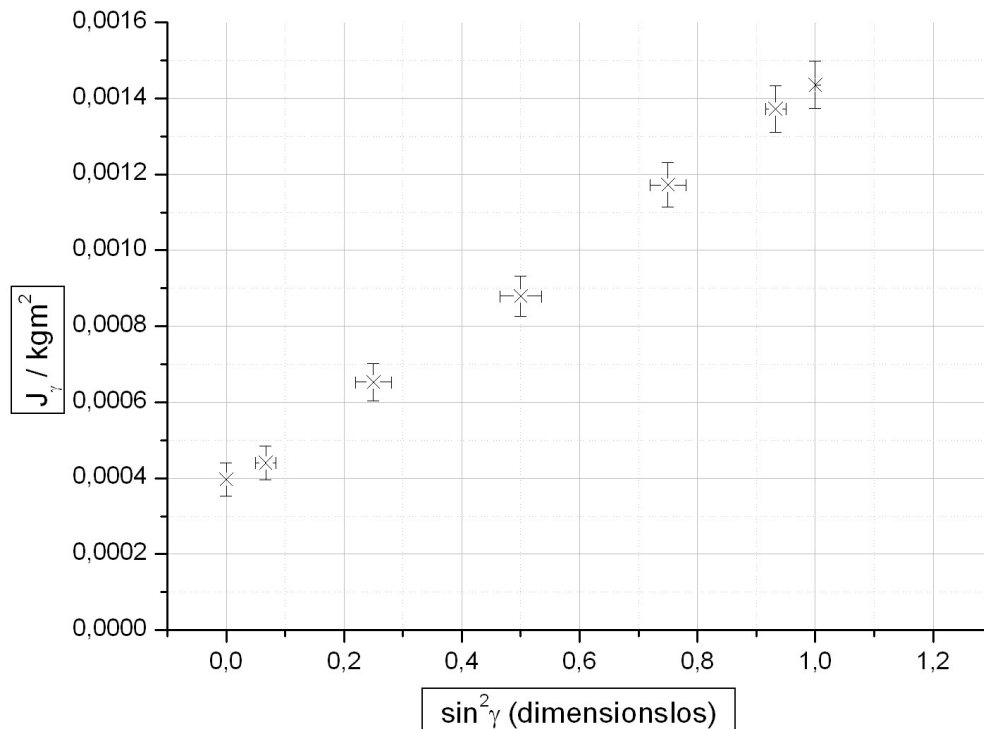


Abbildung 5.5-1

Es lässt sich hier ein linearer Zusammenhang der Messpunkte erkennen, wodurch sich die Gl. 1-1 bestätigt.

Beurteilung der Qualität der Messergebnisse bzw. des erstellten Graphen

Berechnung theoretischer Werte

Theoretisch lassen sich die Werte für $J_{\gamma=0^\circ}$ und $J_{\gamma=90^\circ}$ folgendermaßen berechnen:

$$J_{0^\circ} = \frac{1}{2} m \cdot r_Z^2 \quad (\text{Gl. 5.6-1})$$

$$J_{90^\circ} = \frac{1}{4} m \cdot r_Z^2 + \frac{1}{12} m h_Z^2 \quad (\text{Gl. 5.6-2})$$

Dabei ergeben sich die Messunsicherheiten wie folgt:

$$u_{J_{0^\circ}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} r_Z^2 \cdot u_{m_z}\right)^2 + \left(m_Z r_Z^2 \cdot u_{r_z}\right)^2} \quad (\text{Gl. 5.6-3})$$

$$u_{J_{90^\circ}} = \sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot \left(r_Z^2 + \frac{1}{3} h_Z^2\right) \cdot u_m\right)^2 + \left(\frac{1}{2} m_Z r_Z^2 \cdot u_{r_z}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} m_Z h_Z \cdot u_{h_z}\right)^2} \quad (\text{Gl. 5.6-4})$$

Somit ergibt sich:

$$\underline{\underline{J_{0^\circ} = (3,29 \pm 0,02) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}$$

$$\underline{\underline{J_{90^\circ} = (12,93 \pm 0,02) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}$$

Gegenüberstellung theoretischer und experimenteller Werte

Man lese die experimentellen Werte für $J_{\gamma=0^\circ}$ und $J_{\gamma=90^\circ}$ aus der Tabelle 5.4-1 ab und erhalte:

	Experimentelle Werte	Theoretische Werte
$\mathbf{J_{0^\circ}}$	$(4,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$(3,29 \pm 0,02) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\mathbf{J_{90^\circ}}$	$(14,4 \pm 0,6) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$(12,93 \pm 0,02) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Tabelle 5.6-1

Somit sind die experimentellen Werte deutlich größer als die theoretischen. Dies liegt vor allem daran, dass das Trägheitsmoment der Halterung, in der sich der Zylinder befindet, bei der theoretischen Berechnung nicht einbezogen wird. Dies hat jedoch keinen Einfluss auf die Aussagekraft von Abbildung 5.5-1, da der lineare Zusammenhang zwischen J_γ und $\sin^2 \gamma$, ob mit oder ohne Miteinbeziehung des Trägheitsmoments der Halterung, deutlich erkennbar ist und die eingangs erwähnte Formel bestätigt wird.

Auch die Messunsicherheitsgrenzen der experimentellen fallen bei den experimentellen Werten zu Recht höher aus, da zum Beispiel die Messunsicherheiten von Zeitquadrat, Geradenanstieg und $\sin^2 \gamma$ berücksichtigt werden müssen.

Man beachte, dass experimentelle und theoretische Ergebnisse innerhalb ihrer Messunsicherheitsgrenzen nicht miteinander vereinbar sind. Dies kann folgende Gründe haben:

6. Kritische Betrachtung

- Die Reaktionszeit des stoppenden Experimentators ist von entscheidender Bedeutung. Diese kann jedoch während des Versuches und schlimmer noch während zwei Stopzeiten stark variieren und ist somit stark konzentrationsabhängig.
- Die Zylinderhalterung ließ zu wünschen übrig, da der Zylinder nach Einstellung der Winkellage nicht zufrieden stellend befestigt werden konnte, eine Veränderung der Winkellage während der Messungen durchaus nicht ausgeschlossen werden kann.
- Auch erwies sich die Einstellung der verschiedenen Winkellagen als schwierig, da die Bestimmung der Lage mit Hilfe des Winkelmessers nur schwer erfolgte bzw. die Lage anhand des Winkelmessers schwer zu erkennen war.
- Des Weiteren führt der Drehtisch nicht wie für die Auswertung angenommen (s. insbesondere Bewegungsgleichung im Skript) keine ungedämpfte Schwingung aus, die Werte benötigten daher einer Korrektur.

- Mit Hilfe der Fußschrauben wurde die Ruhelage des Drehtisches, d.h. eine senkrechte Lage des Drehtisches, herbeigeführt. Aufgrund der Reibung der Tischaufhängung, stellt sich jedoch die Frage nach der Exaktheit der Bestimmung der Ruhelage.
- Zudem wurde in den Abschnitten 4.1 und 4.2 die Äquidistanz der verschiedenen Längen s vorausgesetzt. Dies ist jedoch möglicherweise nicht der Fall, was Auswirkungen auf die Fehlerbehaftung von J_z bzw. J_y hat.

Die Messunsicherheit der experimentellen Ergebnisse müsste daher über den errechneten Messunsicherheiten liegen.

Des Weiteren handelt es sich bei den verwendeten Körpern nicht um perfekt zylindrische Körper, was vor allem die theoretische Berechnung beeinflusst, jedoch auch aufgrund der Verwendung von Gl. 4.3-1 Auswirkungen auf die experimentellen Ergebnisse hat.

7. Appendix

Für die Erstellung dieses Protokolls wurden *Microsoft Word 2003*, *Microsoft Excel 2003* und *ORIGIN 7.0* verwendet.

Quellenangabe:

ⁱ A) Vgl. [34-38], *Physikalisches Grundpraktikum – Mechanik und Thermodynamik 2005*, Humboldt-Universität, Berlin, August 2005

B) Vgl. *Physikalisches Grundpraktikum – Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik 2007*, Humboldt-Universität, Berlin, November 2007

ⁱⁱ [36], *Physikalisches Grundpraktikum – Mechanik und Thermodynamik 2005*, Humboldt-Universität, Berlin, August 2005