

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
der Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik – Physikalisches Grundpraktikum**

Versuchsprotokoll

Trägheitsmomente (M2)
Arbeitsplatz 1

durchgeführt am **22.04.2009**
mit Versuchspartner **Andreas Koher** (529737)

Protokoll von **Sebastian Milster** (529125)

Gliederung:

- I. Einleitung
- II. Trägheitsmoment des Drehtisches
- III. Überprüfung der Formel für das Trägheitsellipsoid
- IV. Vergleich mit theoretischen Werten
- V. Auswertung

I. Einleitung

In diesem Versuch sollen die Trägheitsmomente eines Drehtisches und eines Zylinders ermittelt werden um sie mit den theoretischen Werten zu vergleichen. Die physikalischen Grundlagen, Versuchsaufbau und die Durchführung befinden sich im Skript "Mechanik und Thermodynamik" ab Seite 34. Die zehnfachen Perioden T_{10} wurden mit einer digitalen Stoppuhr am Nulldurchgang gemessen. Für die Bestimmung der Positionsabstände wurde der Abstand zwischen den beiden äußersten Löchern auf dem Drehtisch mit einem Messschieber gemessen und durch die Anzahl der Bohrungen geteilt. Mit dem Messschieber wurden auch die Höhen von Zylinder und Scheibe und der Durchmesser der Scheibe gemessen.

Abmessungen:	Formeln aus dem Skript:
<u>Drehtisch:</u> Positionsabstand: $6 \cdot d = (0,09 \pm (50 \cdot 10^{-6} + 0,09 \cdot 10^{-4})) m$ $d = (1,500 \pm 0,001) \cdot 10^{-2} m$	
<u>Metallscheibe:</u> Masse: $m = (247,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} kg$	$J = \int I^2 dm = \int I^2 \rho(\vec{r}) dV \quad (1)$
Radius: $2 \cdot R_S = (4,8 \pm 0,00548) \cdot 10^{-2} m$ $R_S = (2,400 \pm 0,003) \cdot 10^{-2} m$	Zusatzträgheitsmoment: Steinersche Satz: $J_Z = \frac{1}{2} m R^2 + m s^2 \quad (10)$
<u>Zylinder:</u> Masse: $m = (1351,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} kg$	$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} J_Z + \frac{4\pi^2}{D} J_T \quad (11)$
Radius: $2 \cdot R_Z = (4,4 \pm 0,00544) \cdot 10^{-2} m$ $R_Z = (2,200 \pm 0,003) \cdot 10^{-2} m$	$J_y = J_Z + (J_Y - J_Z) \sin^2 \gamma \quad (12)$
Höhe: $h = (9,000 \pm 0,006) \cdot 10^{-2} m$	$J_{0^\circ} = \frac{1}{2} m R^2 \quad ; \quad J_{90^\circ} = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 \quad (13)$
Der Messschieber hat eine sehr genaue Ermittlung von Abständen ermöglicht.	

II. Trägheitsmoment des Tisches

Messergebnisse:

t
Position 6
Abstand: 5d
8,5
8,5
8,5
8,53
8,53
8,53

Mittelwert: $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = 8,515 s$

Standardabweichung für t :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = 0,01643 s$$

Daraus ergibt sich der zufällige Fehler für t : $e_z = t_s \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,00671 s$

(Student-Faktor $t_s=1$ für $n \geq 6$)

Für die systematischen Fehler ist uns nur die Messunsicherheit der Stoppuhr mit $e_s=0.01 s$ bekannt. Daraus ergibt sich die Messgenauigkeit für t :

$$u = |e_z| + |e_s| = 0,01671 s$$

Vollständiges Messergebnis:

$$T_{10} = \bar{t} \pm u = (8,515 \pm 0,01671) s$$

Bestimmung von T mit $T = \frac{T_{10}}{10}$:

$$\Rightarrow T = (0,8515 \pm 0,001671) s$$

(Index beschreibt die Position) $T_6 = (0,852 \pm 0,002) s$

t
Position 5
Abstand: 4d
7,41
7,41
7,41
7,44
7,37
7,44

$$T_5 = (0,714 \pm 0,002) s$$

t
Position 4
Abstand: 3d
6,47
6,47
6,47
6,47
6,47
6,44

$$T_4 = (0,647 \pm 0,002) s$$

t
Position 3
Abstand: 2d
5,68
5,66
5,66
5,66
5,59
5,66
5,68

$$T_3 = (0,567 \pm 0,002) s$$

t
Position 2
Abstand: d
5,13
5,04
5,16
5,16
5,05
5,13

$$T_2 = (0,511 \pm 0,003) s$$

t
Position 1
Abstand: 0d
4,94
4,94
4,97
5
4,91
5

$$T_1 = (0,496 \pm 0,002) s$$

t
ohne Scheibe
4,68
4,75
4,66
4,75
4,75
4,68

$$T_0 = (0,471 \pm 0,003) s$$

Graphische Darstellung $T^2(J_Z)$:

Nach (10) gilt für die Trägheitsmomente folgender Zusammenhang

$$J_Z = \frac{1}{2} mR^2 + ms^2$$

Der Fehler für J_Z berechnet sich wie folgt:

$$u_m = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} ; u_R = 0,003 \cdot 10^{-2} \text{ m} ; u_s = \frac{s}{d} \cdot 0,001 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$u_{J_Z} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_Z}{\partial m} \cdot u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial J_Z}{\partial R} \cdot u_R\right)^2 + \left(\frac{\partial J_Z}{\partial s} \cdot u_s\right)^2}$$

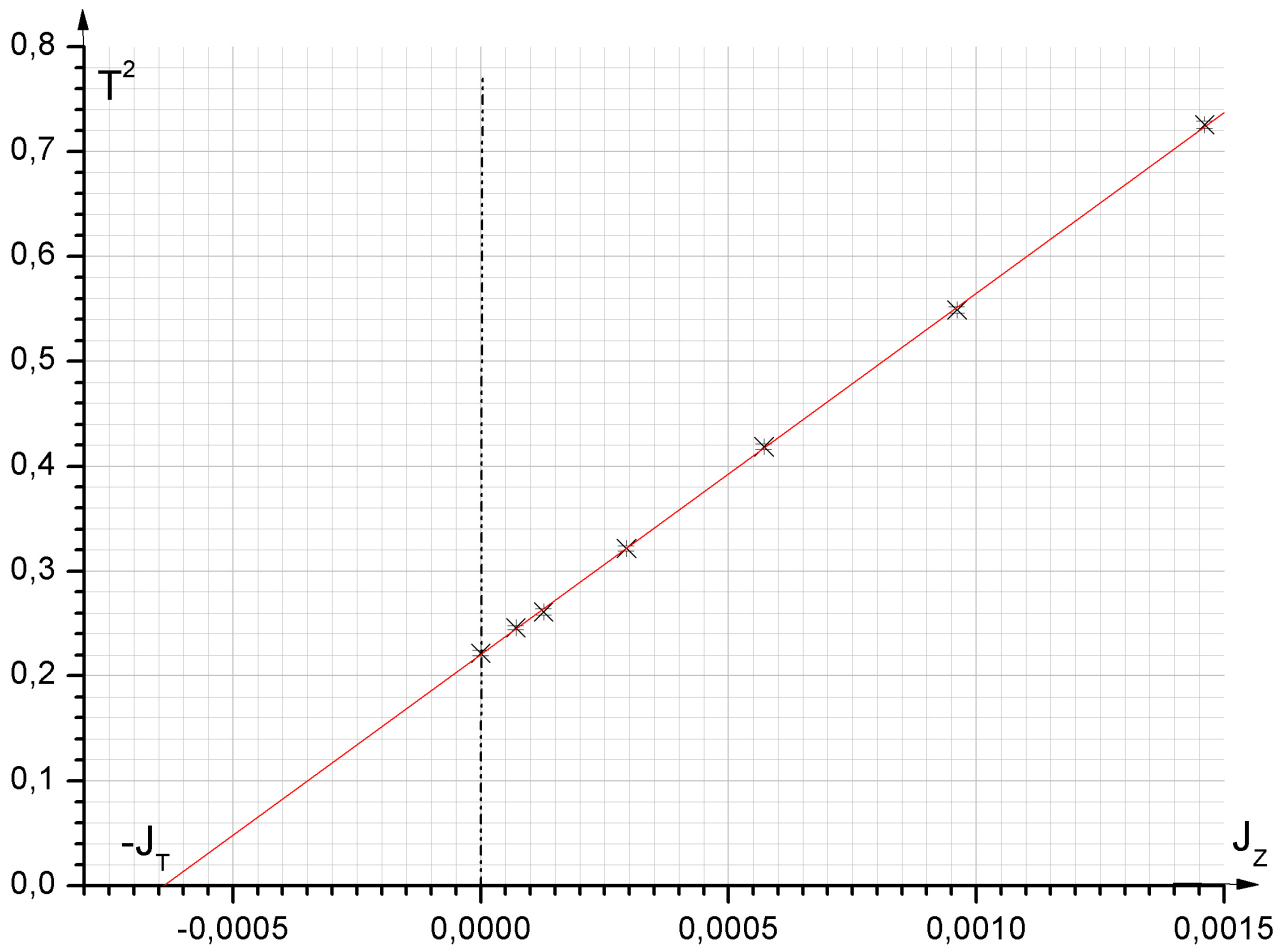
$$u_{J_Z} = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} R^2 + s^2\right) \cdot u_m\right)^2 + (mR \cdot u_R)^2 + (2ms \cdot u_s)^2}$$

Der Fehler für T^2 ergibt sich aus:

$$u_{T_i^2} = \left(2 \cdot \frac{u_{T_i}}{T_i}\right) \cdot \bar{T}_i^2$$

Messergebnisse und daraus berechnete Größen:

i	s in m	u _s in m	T _i in s	u _{T_i} in s	T _i ² in s ²	u _{T_i²} in s ²	J _Z in 10 ⁻³ ·kg·m ²	u _{J_Z} in 10 ⁻⁶ ·kg·m ²
0	0	0	0,471	0,003	0,22184	0,00283	0	0
1	0	0	0,496	0,002	0,24602	0,00198	0,07116	0,18023
2	0,015	1E-5	0,511	0,003	0,26112	0,00307	0,12676	0,19945
3	0,03	2E-5	0,567	0,002	0,32149	0,00227	0,29355	0,36564
4	0,045	3E-5	0,647	0,002	0,41861	0,00259	0,57154	0,7282
5	0,06	4E-5	0,741	0,002	0,54908	0,00296	0,96072	1,26079
6	0,075	5E-5	0,852	0,002	0,7259	0,00341	1,4611	1,95341



An dieser Graphik lässt sich für $T^2=0$ das Trägheitsmoment J_T des Drehtisches ablesen. Der abgelesene Wert beträgt: $-J_T = -6,4018 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$$T^2(J_Z) = \frac{4\pi^2}{D} J_Z + \frac{4\pi^2}{D} J_T \quad (11)$$

Es gilt $y = a \cdot x + b$ mit $y = T^2$, $x = J_Z$, $a = \frac{4\pi^2}{D}$ und $b = \frac{4\pi^2}{D} J_T$.

Folgende Werte ergeben sich bei der numerischen Auswertung:

$$a = 344,53857 \pm 1,6589$$

$$b = 0,22064 \pm 9,77519 \cdot 10^{-4}$$

Aus der Gleichung (11) kann J_T berechnet werden.

$$T^2(0) = b = \frac{4\pi^2}{D} J_T = a \cdot J_T \quad ; \quad J_T = \frac{b}{a}$$

$$\bar{J}_T = \frac{0,22064}{344,53857} = 6,40393 \cdot 10^{-4} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$u_{J_T} = \left(\frac{u_a}{a} + \frac{u_b}{b} \right) \cdot \bar{J}_T$$

$$u_{J_T} = 5,9206 \cdot 10^{-6}$$

$$J_T = (6,404 \pm 0,059) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Die Berechnung liefert ein Ergebnis, das mit dem abgelesenen Wert fast übereinstimmt.

III. Überprüfung der Formel für das Trägheitsellipsoid

Zylinder
T_{10} in s ; $\gamma=0^\circ$
5,91
5,91
5,87
5,85
5,87
5,91

Zylinder
T_{10} in s ; $\gamma=15^\circ$
6,13
6
6,06
6,09
6,06
6,09

Zylinder
T_{10} in s ; $\gamma=30^\circ$
6,56
6,47
6,53
6,5
6,47
6,56

Zylinder
T_{10} in s ; $\gamma=45^\circ$
7,16
7,13
7,18
7,16
7,13
7,18

$$T_{0^\circ}=(0,589\pm 0,003)s \quad T_{15^\circ}=(0,607\pm 0,004)s \quad T_{30^\circ}=(0,652\pm 0,004)s \quad T_{45^\circ}=(0,716\pm 0,003)s$$

Zylinder
T_{10} in s ; $\gamma=60^\circ$
7,68
7,68
7,72
7,66
7,72
7,68

Zylinder
T_{10} in s ; $\gamma=75^\circ$
8,13
8,06
8,06
8,04
8,06
8,04

Zylinder
T_{10} in s ; $\gamma=90^\circ$
8,22
8,18
8,22
8,25
8,22
8,28

T_{10} in s
mit Gestell
4,87
4,85
4,82
4,82
4,82
4,82

$$T_{60^\circ}=(0,769\pm 0,002)s \quad T_{75^\circ}=(0,807\pm 0,003)s \quad T_{90^\circ}=(0,823\pm 0,003)s \quad T_G=(0,483\pm 0,002)s$$

Das Trägheitsmoment für das Gestell des Zylinders lässt sich aus der Gleichung (11) berechnen, wobei das Zusatzträgheitsmoment nun das des Gestells (ohne Zylinder!) ist (J_G):

$$J_G = \frac{T_G^2}{a} - J_T$$

$$\bar{J}_G = \left(\frac{(0,483)^2}{344,53857} - 6,404 \cdot 10^{-4} \right)$$

$$\bar{J}_G = 0,3671 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$u_{J_G} = \left(2 \cdot \frac{u_{T_G}}{T_G} + \frac{u_a}{a} \right) \cdot \bar{J}_G + u_{J_T}$$

$$u_{J_G} = 6,381 \cdot 10^{-6}$$

$$J_G = (0,367 \pm 0,064) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Mit den bekannten Trägheitsmomenten J_T und J_G lässt sich nun das Trägheitsmoment des Zylinders J_{Zy} bezüglich der Drehachse A bestimmen:

$$\text{mit } J_y = J_{Zy} + J_G \text{ und } T^2 = a(J_y + J_T) \text{ (aus (11))}$$

$$\text{ergibt sich } J_{Zy} = \frac{T^2}{a} - J_G - J_T$$

$$\text{und } u_{J_{Zy}} = \left(2 \cdot \frac{u_{T^2}}{T^2} + \frac{u_a}{a} \right) \cdot \bar{J}_{Zy} + u_{J_G} + u_{J_T}$$

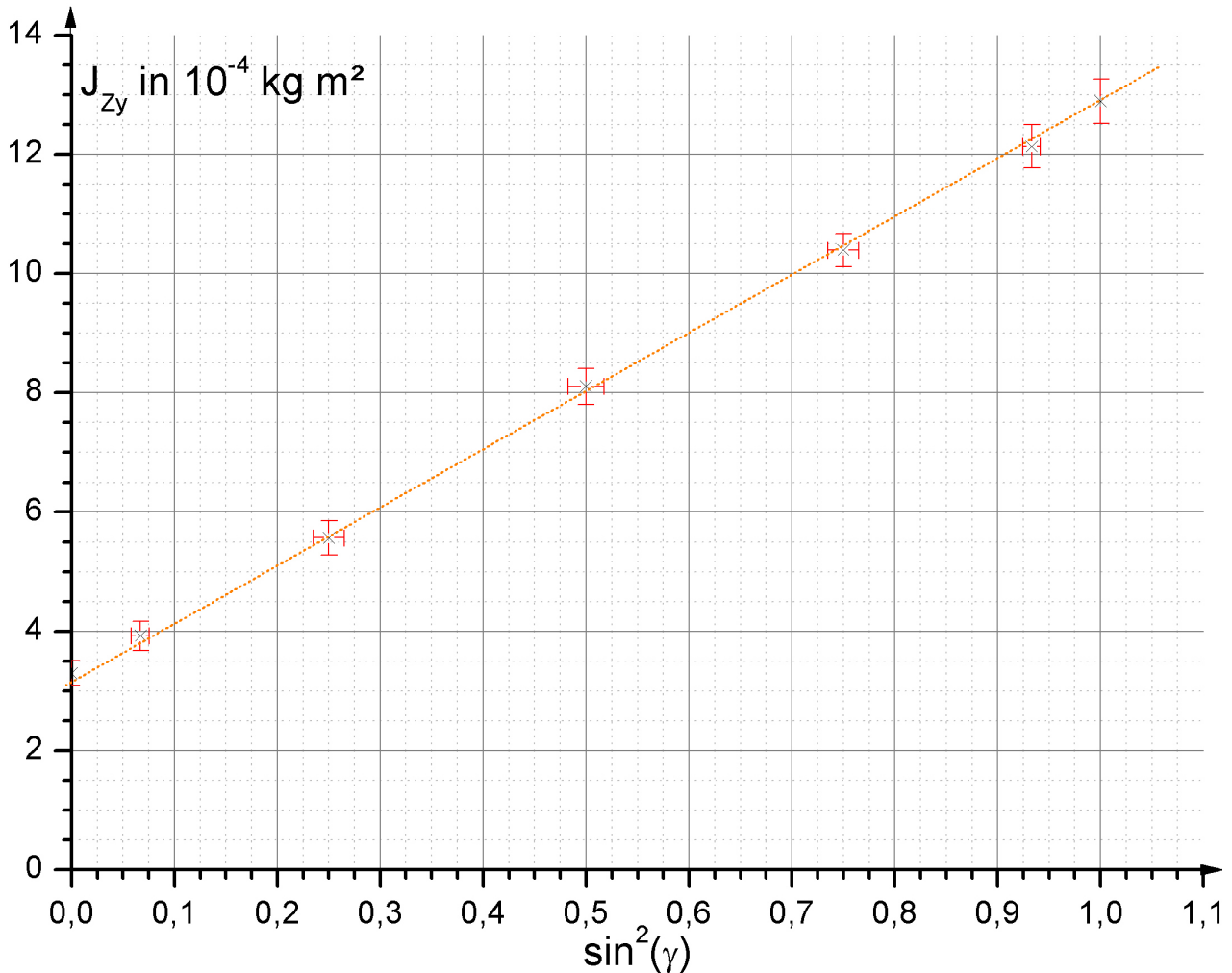
Messwerte und daraus berechnete Größen:

γ in $^\circ$	u_γ in $^\circ$	$\sin^2\gamma$	$u_{\sin^2\gamma}$	T_γ in s	u_{T_γ} in s	T_γ^2 in s^2	$u_{T_\gamma^2}$ in s^2	J_{Zy} in 10^{-4} kg m^2	$u_{J_{Zy}}$ in 10^{-4} kg m^2
0	1	0	0	0,589	0,003	0,34692	0,00353	3,29815	0,20607
15	1	0,06699	0,00873	0,607	0,004	0,36845	0,00486	3,92298	0,2453
30	1	0,25	0,01511	0,652	0,004	0,4251	0,00522	5,56736	0,28643
45	1	0,5	0,01745	0,716	0,003	0,51266	0,0043	8,1085	0,29794
60	1	0,75	0,01511	0,769	0,002	0,59136	0,00308	10,39285	0,28116
75	1	0,93301	0,00873	0,807	0,003	0,65125	0,00484	12,13106	0,3618
90	1	1	0	0,823	0,003	0,67733	0,00494	12,88802	0,37297

Die Ableseunsicherheit für den Winkel wurde auf 1° bzw. $u_\gamma = 1^\circ \hat{=} \frac{2\pi}{360}$ abgeschätzt. Die Unsicherheiten für $\sin^2\gamma$ berechnen sich wie folgt:

$$u_{\sin^2\gamma} = \left| \frac{\partial \sin^2\gamma}{\partial \gamma} \cdot u_\gamma \right| = |2 \cdot \sin\gamma \cdot \cos\gamma \cdot u_\gamma|$$

Daraus ergibt sich $J_{Zy}(\sin^2\gamma)$:



Es ist eindeutig eine lineare Abhängigkeit zu erkennen, womit die Formel für das Trägheitsellipsoid $J_y = J_z + (J_y - J_z) \sin^2\gamma$ bestätigt wird, da J_z und J_y unveränderliche Eigenschaften des Zylinders sind.

IV. Vergleich mit theoretischen Werten

Aus der Tabelle:

$$J_{0^\circ} = (3,298 \pm 0,206) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad ; \quad J_{90^\circ} = (12,888 \pm 0,373) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Mit (13) können wir die Trägheitsmomente berechnen:

$J_{0^\circ} = \frac{1}{2} mR^2$	$J_{90^\circ} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2$
$\bar{J}_{0^\circ} = \frac{1}{2} \cdot 1,351 \text{ kg} \cdot (0,022 \text{ m})^2$	$\bar{J}_{90^\circ} = \frac{1}{4} \cdot 1,351 \text{ kg} \cdot (0,022 \text{ m})^2 + \frac{1}{12} \cdot 1,351 \cdot (0,09 \text{ m})^2$
$\bar{J}_{0^\circ} = 3,2694 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$	$\bar{J}_{90^\circ} = 10,7540 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
$u_{J_{0^\circ}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} R^2 \cdot u_m\right)^2 + (mR \cdot u_R)^2}$	$u_{J_{90^\circ}} = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} h^2\right) \cdot u_m\right)^2 + \left(\frac{1}{2} mR \cdot u_R\right)^2 + \left(\frac{1}{6} mh \cdot u_h\right)^2}$
$u_{J_{0^\circ}} = 8,9199 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$	$u_{J_{90^\circ}} = 1,2975 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$
$J_{0^\circ} = (3,269 \pm 0,009) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$	$J_{90^\circ} = (10,754 \pm 0,013) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$

Die theoretischen Werte liegen in der selben Größenordnung wie die experimentellen. Für $\gamma = 0^\circ$ stimmen die Werte erstaunlich gut überein. Für $\gamma = 90^\circ$ ist der experimentell ermittelte Wert größer, was auf eine durch unbeachtete Störeinflüsse verzögerte Periodendauer schließen lässt. Dennoch ist das Ergebnis zufriedenstellend.

V. Auswertung

Es gibt ein paar Störeinflüsse, die in der Berechnung keine Betrachtung gefunden haben:

Zum einen gehört zur Halterung des Zylinders eine Schraube, die bei der Messung für das Gestell allein gefehlt hat und die experimentellen Werte für das Trägheitsmoment des Zylinders etwas vergrößert. Hinzukommt, dass es sich bei diesem Versuch um keinen ungedämpften harmonischen Schwinger handelt. Schon nach wenigen Perioden war eine deutliche Abnahme der Amplitude zu erkennen, was die Messung der Periodendauer beeinflusst haben muss. Die Abstände zwischen den Bohrungen wurden als gleich angenommen, was jedoch nicht zwingend der Fall sein muss und die Berechnung von J_T beeinflusst haben könnte. Die benutzten Formeln ((10),(13)) setzen absolut geometrische und homogene Körper voraus. Dies ist in der Realität nicht der Fall (z.B. Loch für Schraube im Zylinder) und beeinflusst die theoretischen Werte und all die Größen, die sich durch diese Annahme berechnen ließen.

Der einfache Versuchsaufbau war trotzdem ausreichend gut genug um die lineare Abhängigkeit für $T^2(J_Z)$ und $J_{Zy}(\sin^2 \gamma)$ zu zeigen. Die Messunsicherheit für J_T liegt bei knapp 1%, was auf eine gute Messreihe schließen lässt. Die Messunsicherheit von ca. 6% für J_{0° war durch die Fehlerfortpflanzung vieler Einflussgrößen nicht auszuschließen, dennoch konnten experimentell Werte ermittelt werden, die mit den theoretischen Werten sehr gut vergleichbar sind.