

## Inhaltsverzeichnis

Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung .....	2
Versuchsziel .....	2
Versuchsbeschreibung .....	2
Auswertung und Präsentation der Messdaten .....	2
Messunsicherheiten .....	2
Ermittlung des Trägheitsmomentes vom Drehtisch.....	3
Bestimmung des Trägheitsmomentes vom Zylinder.....	4
Auswertung des Experiments.....	6
Vergleich der experimentellen und errechneten Werten.....	6
Kritische Bewertung des Versuchs .....	6
Zylinder mit Trägheitsellipsoid einer Kugel .....	6
Freie Achsen .....	6
Auswuchten.....	6
Quellen .....	7

## Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

### Versuchsziel

In diesem Versuch werden Trägheitsmomente durch Messung der Schwingungsdauer eines Drehschwingers ermittelt. Dieser führt wegen einer elastischen Deformation einer Schneckenfeder eine schwach gedämpfte Drehschwingung aus. Während des Versuches wird die Dämpfung vernachlässigt.

Es wird untersucht wie sich das Trägheitsmoment eines Drehtisches bei Veränderung durch eine verschiebbare Kreisscheibe (Masse  $m_S$ , Radius  $R_S$ ) verhält. Wir berechnen dann das Zusatzträgheitsmoment der Scheibe  $J_Z$  und das Trägheitsmoment des Drehtisches  $J_T$ . Daraufhin ermitteln wir das Trägheitsmoment eines Zylinders  $J_Y$  in Abhängigkeit seiner Winkelposition. Bei  $0^\circ$  bzw.  $90^\circ$  entspricht dieses Trägheitsmoment das der Hauptträgheitsachse in z- bzw. y-Richtung.

### Versuchsbeschreibung

Zuerst wird der Drehtisch waagrecht justiert. Es wird dazu an den Schrauben solange gedreht bis die Wasserwaage mittig ist.

Dann wird sechsmal die Zeit  $10T$  für zehn Schwingungen des Drehtisches ohne Scheibe bzw. mit sechs verschiedenen Positionen aufgenommen. Im zweiten Teil wird wieder sechsmal die Zeit für zehn Schwingungen aufgenommen, aber diesmal ist zentral auf dem Drehteller ein schwenkbarer Zylinder (Masse  $m_Z$ , Radius  $R_Z$ , Höhe  $h_Z$ ) befestigt, der zwischen  $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$  zur Drehtischachse in Schritten von  $15^\circ$  gedreht wird. Dabei wird der Tisch immer gleich ausgelenkt. (Weitere Informationen Quelle 1 S.34 ff.)

## Auswertung und Präsentation der Messdaten

### Messunsicherheiten

Die Messunsicherheiten werden in der folgenden Tabelle dargestellt.

	zufälliger Fehler	systematischer Fehler	Messunsicherheit
$m_S$ in g	/	/	0,1
$m_Z$ in g	/	/	0,1
$r_S$ in m	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5} + 10^{-5} \cdot MW$	$7,24 \cdot 10^{-5}$
$r_Z$ in m	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5} + 10^{-5} \cdot MW$	$7,23 \cdot 10^{-5}$
$h_Z$ in m	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5} + 10^{-5} \cdot MW$	$7,81 \cdot 10^{-5}$
$u_T$ in s	<u>Vertrauensbereich</u>	<u><math>0,01 + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \text{Mittelwert}</math></u>	/
	10	10	
$u_S$ in m	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5} + 10^{-5} \cdot MW$	$1,01 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 1

Die Messunsicherheiten der Massen waren am Versuchsort angegeben, deswegen habe ich keine Information über den zufälligen bzw. systematischen Fehler. Die Größen  $r_S$ ,  $r_Z$ ,  $h_Z$  und  $s$  bestehen alle aus einem halben Skalenteil als zufälligen Fehler und  $50\mu\text{m} + 10^{-4} \cdot MW$  (MW – Messwert) als systematischen Fehler. Der zufällige Fehler der Periodendauer ist ein Zehntel des Vertrauensbereiches und der systematische ist ein Zehntel von  $0,01 + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \text{Mittelwert}$ . (vgl. Quelle 2 S. 17 f.)

Die Messunsicherheit wird bei allen durch pythagoräische Addition errechnet außer die des Abstandes zwischen den Löchern  $u_S$ , welche durch Größtfehlerabschätzung bestimmt wird, aufgrund der ungenauen Mittelpunktbestimmung beim Messen.

## Ermittlung des Trägheitsmomentes vom Drehtisch

Zunächst ermittle ich aus den Messdaten die Werte für die grafische Darstellung von  $T^2 = f(J_Z)$ , wobei  $J_Z = \frac{1}{2}m_S R_S^2 + m_S s^2$  ist. Hier ist  $s$  der Abstand zum Mittelpunkt des Drehtisches. In der folgenden Tabelle 1 sind zu dem die Messungenauigkeiten mit angegeben, die sich beide durch Fehlerfortpflanzung berechnen lassen:

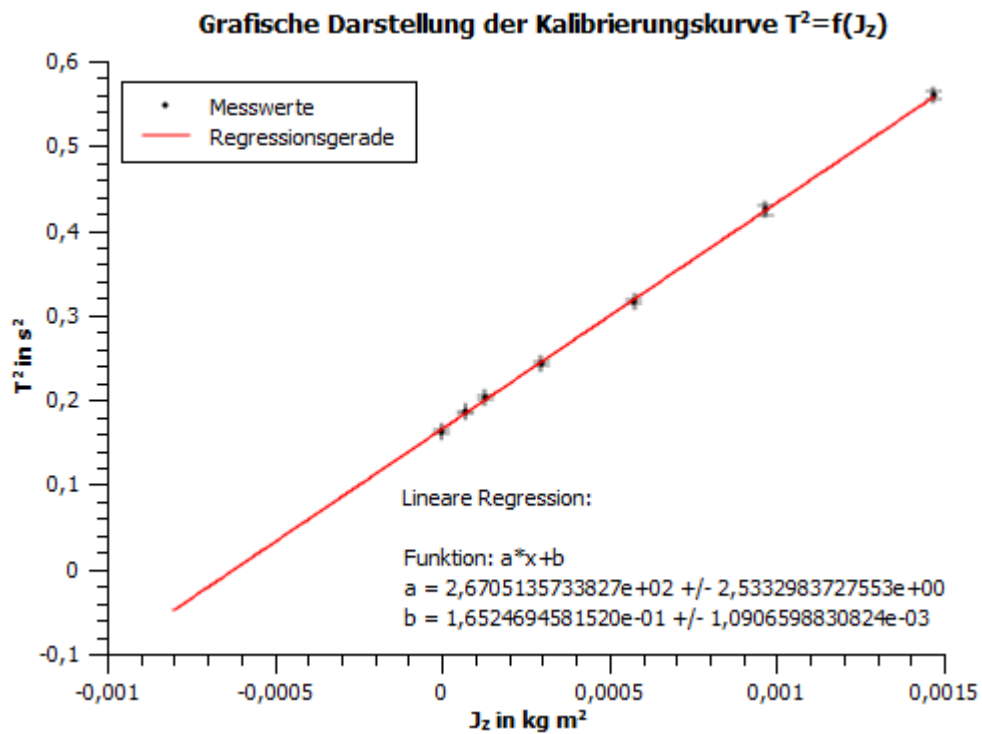
$$u_{T^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial T^2}{\partial T}\right)^2 u_T^2} \text{ und } u_{J_Z} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_Z}{\partial m_S} u_{m_S}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_Z}{\partial R_S} u_{R_S}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_Z}{\partial s} u_s\right)^2}.$$

In meinen weiteren Ausführungen gilt, dass die Symbole  $u_i$  die Messunsicherheiten der Messgröße  $i$  sind.

	$T^2$ in $s^2$	$J_Z$ in $kg \cdot m^2$	$u_{T^2}$ in $s^2$	$u_{J_Z}$ in $kg \cdot m^2$
ohne Scheibe	0,16	0	$1,96 \cdot 10^{-3}$	0
$s = 0 \text{ cm}$	0,19	$7,18 \cdot 10^{-5}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$	$4,24 \cdot 10^{-7}$
$s = 1,5 \text{ cm}$	0,20	$1,28 \cdot 10^{-4}$	$3,11 \cdot 10^{-3}$	$6,78 \cdot 10^{-7}$
$s = 3,0 \text{ cm}$	0,24	$2,95 \cdot 10^{-4}$	$3,19 \cdot 10^{-3}$	$1,14 \cdot 10^{-7}$
$s = 4,5 \text{ cm}$	0,32	$5,75 \cdot 10^{-4}$	$2,28 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-6}$
$s = 6,0 \text{ cm}$	0,42	$9,66 \cdot 10^{-4}$	$5,79 \cdot 10^{-3}$	$2,17 \cdot 10^{-6}$
$s = 7,5 \text{ cm}$	0,56	$1,47 \cdot 10^{-3}$	$4,15 \cdot 10^{-3}$	$2,71 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 2

Nun folgt die grafische Darstellung mit Fehlerkreuzen.



Die Zusatzträgheitsmomente  $J_Z$  stehen im linearen Zusammenhang mit den Quadraten der Periodendauern  $T^2$ . Dies entspricht der folgenden Gleichung (Quelle 1 S.36 Gl. 11):

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} J_Z + \frac{4\pi^2}{D} J_T \quad (1),$$

welche die  $J_Z$ -Achse bei  $J_Z = -J_T$  schneidet. Mit dem Programm QtiPlot führe ich nun eine lineare Regression durch, dabei gilt:

$$a = \frac{4\pi^2}{D} \text{ und } b = \frac{4\pi^2}{D} J_T = a J_T.$$

Dabei erhalte ich:

$$a = (267 \pm 3) \frac{s^2}{kgm^2} \text{ und } b = (0,165 \pm 0,001) s^2.$$

Nun lässt sich das Trägheitsmoment des Tisches berechnen. Es gilt:

$$J_T = \frac{b}{a} \quad (2).$$

Die Unsicherheit  $u_{J_T}$  muss durch das Fortpflanzungsgesetz korrelierter Größen berechnet werden. Daraus folgt:

$$u_{J_Z} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_T}{\partial a} u_a\right)^2 + \left(\frac{\partial J_T}{\partial b} u_b\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial J_T}{\partial a} \cdot \frac{\partial J_T}{\partial b} \cdot u_{ab}}.$$

Die Unsicherheit  $u_{ab}$  ist hier durch  $u_{ab} = u_a \cdot u_b$  zu berechnen, denn nach Formel 38 in Quelle 2 gilt für exakt lineare Zusammenhänge:

$$1 = \frac{u_{ab}}{u_a \cdot u_b}.$$

Das vollständige Ergebnis für das Trägheitsmoment der Drehtischen lautet somit:

$$J_T = (619 \pm 2) 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

## Bestimmung des Trägheitsmomentes vom Zylinder

Das Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse wird wie folgt berechnet:

$$\int r^2 dm = \int r^2 \rho dV.$$

Nun benutzt man die Zylinderkoordinaten zur Vereinfachung der Berechnung:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r r^3 \rho dz d\varphi dr = L 2\pi \frac{r^4}{4} \rho = \frac{1}{2} m r^2,$$

denn

$$m = V\rho = L\pi r^2 \rho.$$

Bei der experimentellen Bestimmung wurde der Zylinder zunächst um seine Z-Achse gedreht und dann in 15° Schritten bis zu dem Winkel gedreht, bei dem der Zylinder um die Y-Achse gedreht wurde (vgl. Quelle 1 S.36 Abb.4b).

Allgemein werden diese wie folgt berechnet (Quelle 1 S. 38 Gl.13):

$$J_z = J_{0^\circ} = \frac{1}{2} m_z R_z^2 \text{ und } J_y = J_{90^\circ} = \frac{1}{4} m_z R_z^2 + \frac{1}{12} m_z h_z^2 \quad (3).$$

(Hier handelt es sich um ein kleines z und bezieht sich wie das y auf die Drehachse.)

Zunächst berechne ich jedoch das Trägheitsmoment für jeden Winkel aus den Messdaten. Dazu benutze ich (1). Daraus folgt:

$$J_Y' = \frac{T^2 - b}{a} \quad (4).$$

Die Halterung, in der der Zylinder befestigt wurde, beeinflusst mit deren Trägheitsmoment  $J_H$  die Bestimmung des Trägheitsmomentes des Zylinders. Deswegen haben wir im Vorfeld eine Messung nur mit der Halterung durchgeführt., sodass wir folgende Korrektur vornehmen:

$$J_Y = J_Y' - J_H.$$

$J_Y$  ist linear abhängig von  $\sin^2 \gamma$ . Diesen Zusammenhang beschreibt die Gleichung (Quelle 1 S.37 Gl.12):

$$J_Y = J_z + (J_y - J_z) \sin^2 \gamma,$$

welchen ich anhand folgender Daten grafisch darstellen werde.

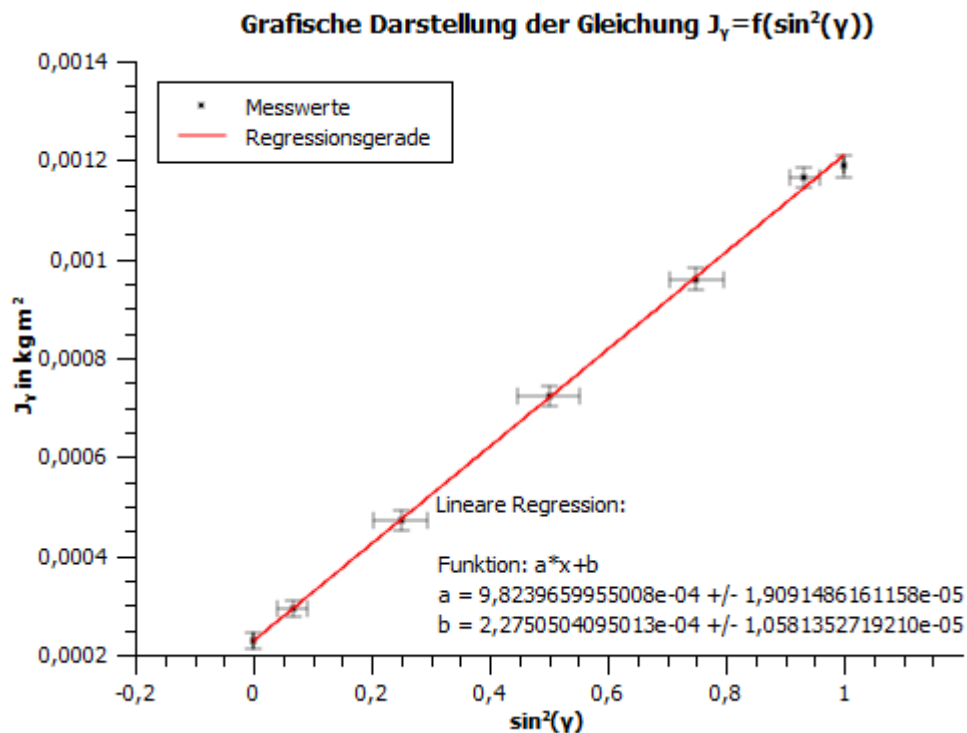
	$J_Y$ in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$\sin^2 \gamma$	$u_{J_Y}$ in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$u_{\sin^2 \gamma}$
$\gamma = 0^\circ$	$2,27 \cdot 10^{-4}$	0	$1,63 \cdot 10^{-5}$	0
$\gamma = 15^\circ$	$2,93 \cdot 10^{-4}$	0,07	$1,58 \cdot 10^{-5}$	$2,62 \cdot 10^{-2}$
$\gamma = 30^\circ$	$4,71 \cdot 10^{-4}$	0,25	$1,91 \cdot 10^{-5}$	$4,53 \cdot 10^{-2}$
$\gamma = 45^\circ$	$7,23 \cdot 10^{-4}$	0,50	$1,97 \cdot 10^{-5}$	$5,24 \cdot 10^{-2}$
$\gamma = 60^\circ$	$9,60 \cdot 10^{-4}$	0,75	$2,22 \cdot 10^{-5}$	$4,53 \cdot 10^{-2}$
$\gamma = 75^\circ$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	0,93	$2,10 \cdot 10^{-5}$	$2,62 \cdot 10^{-2}$
$\gamma = 90^\circ$	$1,19 \cdot 10^{-4}$	1,00	$2,24 \cdot 10^{-5}$	$6,41 \cdot 10^{-18}$

Tabelle 3

Dabei wird die Messunsicherheit von  $J_y$  und  $\sin^2 \gamma$  durch Fehlerfortpflanzung wie folgt berechnet:

$$u_{J_y} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_y}{\partial T^2} u_{T^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_y}{\partial b} u_b\right)^2 + \left(\frac{\partial J_y}{\partial a} u_a\right)^2} \quad \text{und} \quad u_{\sin^2 \gamma} = \frac{\partial \sin^2 \gamma}{\partial \gamma} u_\gamma.$$

Im Diagramm ist dieser Zusammenhang mit Fehlerkreuzen dargestellt.



Hier habe ich wieder eine lineare Regression durchgeführt. Die Gleichung (Quelle 1 S.37 Gl.12):

$$J_y = J_z + (J_y - J_z) \sin^2 \gamma$$

beschreibt den linearen Zusammenhang. Und durch die Regression erhalte ich:

$$a = (J_y - J_z) = (9,8 \pm 0,2) 10^{-4} \text{kgm}^2$$

und

$$b = J_z = (2,3 \pm 0,1) 10^{-4} \text{kgm}^2.$$

Somit ergibt sich für das Trägheitsmoment  $J_y$ :

$$J_y = a + b = (12,1 \pm 0,2) 10^{-4} \text{kgm}^2.$$

Die Unsicherheit berechnet sich durch die Fehlerfortpflanzung.

Nun verbleibt die Berechnung der Werte für  $J_z$  und  $J_y$  aus der Gleichung (3). Mit den Unsicherheiten, die sich aus der Fehlerfortpflanzung:

$$u_{J_{0^\circ}} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{0^\circ}}{\partial m_z} u_{m_z}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{0^\circ}}{\partial R_z} u_{R_z}\right)^2} \quad \text{und} \quad u_{J_{90^\circ}} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{90^\circ}}{\partial m_z} u_{m_z}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{90^\circ}}{\partial R_z} u_{R_z}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{90^\circ}}{\partial h_z} u_{h_z}\right)^2}$$

ergeben, bringt uns dies die in der Tabelle 4 aufgeführten Werte.

	Errechneter Wert	Experimenteller Wert
$J_z$ in $\text{kgm}^2$	$(3,29 \pm 0,02) 10^{-4}$	$(2,3 \pm 0,1) 10^{-4}$
$J_y$ in $\text{kgm}^2$	$(12,96 \pm 0,02) 10^{-4}$	$(12,1 \pm 0,2) 10^{-4}$

Tabelle 4

## Auswertung des Experiments

### Vergleich der experimentellen und errechneten Werten

Man sieht, dass sich die Werte für  $J_z$  und  $J_y$  unterscheiden und das sogar so, dass die errechneten Werte zu groß ausfallen. Dies deutet auf eine nicht beachtete bzw. falsch eingeschätzte Messunsicherheit hin und kann verschiedene Gründe haben. Als Erstes ist man davon ausgegangen, dass der Zylinder eine homogene Masseverteilung hat, was nicht der Fall sein muss. Schon allein das Loch zur Befestigung der Schraube sorgt für eine Inhomogenität. Als Zweites ist das Trägheitsmoment der Schraube nicht in die Korrektur bzw. theoretischen Ermittlung eingegangen. Außerdem ist die Schwingung gedämpft, was in der Auswertung nicht berücksichtigt wurde. Das führt dazu, dass die Quadrate der Periodendauern zu klein ausfallen und somit auch der experimentelle Wert. Diese Ursache ist meiner Meinung nach der wichtigste Punkt der Fehlerbetrachtung.

### Kritische Bewertung des Versuchs

Allgemein waren bei diesem Versuch die Markierungen zur Auslenkung der Schneckenfeder ungenau, somit konnten nicht immer die gleichen Anfangsbedingungen geschaffen werden, was zu kleineren gemessenen Periodendauern führt. Die Schwingungsdauern der größeren Trägheitsmomente waren schwer zu ermitteln, weil der Zeitpunkt nur abgeschätzt werden konnte, an dem der Drehtisch den Umkehrpunkt erreicht. Dadurch wird die Stoppuhr eventuell zu früh oder zu spät gedrückt, was einen unbeachteten Fehler bringt. Der Winkel des Zylinders konnte nicht sehr genau abgeschätzt werden. Die Fehler, die durch die Dämpfung und die Inhomogenität des Zylinders hervorgerufen werden, wurden ja schon im Absatz davor benannt.

### Zylinder mit Trägheitsellipsoid einer Kugel

Das Trägheitsellipsoid ist eine Kugel genau, dann wenn alle Trägheitsmomente der Hauptachsen gleich groß sind ( $J_x = J_y = J_z$ ), wobei  $J_y = J_z = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2$ . Daraus folgt:

$$\frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2.$$

Nach einigen um Formungen erhalte ich

$$h = \sqrt{3} \cdot R,$$

wobei h die Höhe des Zylinders ist und R der Radius.

### Freie Achsen

Freie Achsen sind Achsen, auf die bei der Rotation keinerlei Kräfte, die aus der Rotation entspringen, wirken. Dies ist der Fall, wenn die Masse des Körpers rings um die Drehungsachse symmetrisch verteilt ist, denn bei symmetrischer Masseverteilung heben sich die Kräfte, die von der Rotationsachse weg zeigen mit denen zur Rotationsachse auf.

### Auswuchten

Eine wichtige Anwendung der Theorie stabiler Rotationen ist das Auswuchten von Rädern oder rotierenden Maschinenteilen. Für ruhigen Lauf muss die Hauptträgheitsachse in der Drehachse liegen. Meistens ist die Drehachse konstruktiv vorgegeben. Beim statischen Auswuchten wird zuerst der Schwerpunkt auf die Drehachse gebracht. Beim anschließenden dynamischen Auswuchten wird durch Zusatzgewichte oder Materialentnahme die Verteilung der Massen solange verändert, bis die Drehachse auch Hauptträgheitsachse ist.

## Quellen

- 1- Skript: „Physikalisches Grundpraktikum: Mechanik und Thermodynamik 2005“, Humboldt Universität zu Berlin
- 2- Skript: „Physikalisches Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik 2007“, Humboldt Universität zu Berlin