

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I

Institut für Physik
Physikalisches Grundpraktikum I:
Mechanik und Wärmelehre (Modul P4)
SS 2009



Versuch: M2 Trägheitsmomente
durchgeführt am 29.04.2009
Messplatz 4 (LCP 3'15)

Verfasser: Richter, Gregor
Versuchspartner: XXXXXXXXXX

Mtknr.: XXXXXXXXXX
Mtknr.: XXXXXXXXXX

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabenstellung und Versuchsbeschreibung	Seite
1.1. Zielstellung des Versuchs	2
1.2. Versuchsbeschreibung	2
2. Messungenauigkeiten	2
3. Auswertung	
3.1. Motivation für die Bestimmung des Trägheitsmomentes	3
3.2. Bestimmung der Kalibrierungskurve des Drehtisches	4
3.3. Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Zylinders in Abhängigkeit vom Winkel zwischen Symmetrieachse und Rotationsachse	5
4. Diskussion und Interpretation	
4.1. Kalibrierungskurve des Drehtisches	7
4.2. Vergleich von experimentellen und theoretischen Werten für die Hauptträgheitsmomente des Zylinders	7
4.3. Bedeutung der Hauptträgheitsmomente	8
Anhang	
A1: Fehlerrechnung	10
Quellenverzeichnis	11
Anlage: Messdatenprotokoll	

1. Aufgabenstellung und Versuchsbeschreibung

1.1. Zielstellung des Versuchs

Ziel des Versuches ist die experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Zylinders in Abhängigkeit von dem Neigungswinkel zwischen Drehachse und Symmetrieachse des Zylinders.

1.2. Versuchsbeschreibung

Es erfolgt zuerst eine senkrechte Justierung des Drehtisches, durch drehen an den Fußschrauben, bis die Gasblase der Wasserwaage mittig in der Markierung ist. Daraufhin wird sechs mal die Zeit für 10 Schwingungen des Drehtischs ohne Scheibe bzw. für 6 verschiedene Abstände der Scheibe vom Mittelpunkt des Drehtisches gemessen. Danach wird für verschiedene Winkel sechs mal die Zeit für 10 Schwingungen des Drehtisches mit einem mittig auf der Scheibe fixierten, schwenkbaren Zylinder gemessen, wobei die Symmetrieachse des Zylinders zwischen $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ zur Rotationsachse des Drehtisches in Schritten von 15° gedreht wird. Im Anschluss messen wir noch 6 mal die Zeit für 10 Schwingungen des Drehtischs mit der Halterung des Zylinders.

2. Messungenauigkeiten

Die Zeitmessungen wurden mit einer digitalen Stoppuhr gemessen, wobei sich der Fehler für die 10 Schwingungen aus pythagoreischer Addition (da e_s und e_z unkorreliert) des systematischen Fehlers ($e_s = 5 \cdot 10^{-4} MW + 0.01$) und dem Vertrauensbereich der Messdaten ergibt. Der durch die Reaktionszeit resultierende zufällige Fehler tritt beim Starten und Stoppen der Zeitmessung auf und hat das gleiche Vorzeichen, weshalb die gemessene Zeitdifferenz im Mittel unverändert bleibt und der Fehler vernachlässigt werden kann. Für die Messungenauigkeit bzgl. einer Schwingung muss der Fehler für 10 Schwingungen lediglich durch 10 dividiert werden (Fehlerfortpflanzungsgesetz). Die Längenmessungen der Radien von Zylinder und Scheibe und der Höhe des Zylinder wurden mit einem Messschieber mit $e_s = 10^{-4} MW + 50\mu\text{m}$ und $e_z = 50\mu\text{m}$ (halber Skalenteil) gemessen, die Messungenauigkeit erfolgt mit pythagoreischer Addition (da e_s und e_z unkorreliert). Die Längenmessungen der Abstände s der Scheibe von der Drehachse erfolgte ebenfalls mit einem Messschieber, da die Messposition (Mittelpunkte der Löcher) abgeschätzt werden musste, schätzen wir den zufälligen Fehler größer mit $e_z = 500\mu\text{m}$ ab. Da hier nur die Messung der maximalen Distanz erfolgte, kann man die Messungenauigkeiten der anderen Distanzen noch mit dem Faktor $n/5$ multiplizieren (Fehlerfortpflanzung), wobei n die Anzahl der Lochabstände ist, und damit genauer ermitteln. Die Messungenauigkeit der Massen waren am Messplatz mit $\pm 0.1\text{g}$ angegeben. Die Winkelmessungen mit dem Winkelmesser schätzen wir mit $\pm 3^\circ$ ab, da die Winkelmessung nur bei völliger Parallelität zur Aufhängung genau sein kann.

3. Auswertung

3.1. Motivation für die Bestimmung des Trägheitsmomentes

Das Trägheitsmoment gibt die Trägheit eines starren Körpers bezüglich der Änderung seiner Drehbewegung an. Es ist dabei ein Maß für die Verteilung der Masse bezüglich einer festgelegten Drehachse um die die Rotationsbewegung stattfindet. Aus der energetischen Betrachtung einer Menge von Massenelementen Δm_i die sich auf einer Kreisbahn mit dem senkrechten Abstand r_{pi} (zur Drehachse) und der Tangentialgeschwindigkeit v_{ti} um eine Drehachse bewegen, ergibt sich dann im Grenzübergang mit $\vec{v}_{ti} \cdot \vec{r}_{pi} = 0$ bzw. $v_{ti} = \omega r_{pi}$:

$$E_{rot} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_{pi}^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \int r_p^2 dm . \quad (1)$$

Mit der Definition des Integrals als Trägheitsmoment J :

$$J = \int r_p^2 dm . \quad (2)$$

Für einfache symmetrische Körper lässt sich das Trägheitsmoment berechnen, bei komplizierteren Körpern muss es experimentell bestimmt werden.

Das Trägheitsmoment ist immer auf eine Drehachse bezogen. Nun existieren unendlich viele Drehachsen um die ein Körper rotieren kann. Analog zur Translation eines Körpers ist der Drehimpuls L definiert als $\vec{L} = J \vec{\omega}$. Da die Vektoren \vec{L} und $\vec{\omega}$ nicht unbedingt kollinear sein müssen, muss \hat{J} ein Tensor 2. Stufe sein, der sogenannte Trägheitstensor (in unserem Fall auf Achsen durch den Schwerpunkt bezogen). Dieser lässt sich durch Drehung des Koordinatensystems ($r(x, y, z) \rightarrow r(\zeta, \eta, \xi)$) in Diagonalf orm bringen. Wobei sich aus $2 \cdot E_{rot} = \vec{\omega}^t \hat{J} \vec{\omega} = J \cdot \omega^2$ mit $\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \cdot \vec{n}$ und folgender Division durch $|\vec{\omega}|^2$, und dem Vektor

$$\vec{p} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{J_{\vec{n}}}}$$

(\vec{n} - Vektor in Richtung der Drehachse, $J_{\vec{n}}$ - Trägheitsmoment bezüglich \vec{n} als Drehachse) sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$\vec{p}^t \hat{J} \vec{p} = J_{\zeta} p_{\zeta}^2 + J_{\eta} p_{\eta}^2 + J_{\xi} p_{\xi}^2 = 1 \quad (3)$$

Dies ist die quadratische Gleichung eines Ellipsoiden (im Koordinatensystem mit ζ, η, ξ als orthogonale Basis) auf dem sich jedes Trägheitsmoment des Körpers um eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt befindet. Bei $J_{\zeta}, J_{\eta}, J_{\xi}$ sind die Schnittpunkte des Ellipsoiden mit der jeweiligen Achse. Es reicht also die Bestimmung von drei skalaren Trägheitsmomenten um das Trägheitsmoment einer Bewegung um eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt zu erhalten. Alle weiteren möglichen Rotationsachsen müssen nun zu den Achsen durch den Schwerpunkt parallel sein. In diesem Fall kann man das Trägheitsmoment mit dem Steiner'schen Satz

$$J_A = J_S + M \cdot a^2 \quad (4)$$

ermitteln (Wobei J_A das skalare Trägheitsmoment um die Achse A ist und a der senkrechte Abstand zu A, J_S ist das Trägheitsmoment durch einer zu A parallelen Achse durch den Schwerpunkt).

3.2. Bestimmung der Kalibrierungskurve des Drehtisches

Zur experimentellen Bestimmung von Trägheitsmomenten bedienen wir uns eines Drehtisches. Dieser besteht aus einem auf einer Achse drehbar gelagertem Teller, der nach Auslenkung, durch die elastische Deformation einer mit der Rotationsachse verbundenen Schneckenfeder, eine gedämpfte Schwingung vollzieht. Wenn wir die dissipativen Prozesse vernachlässigen, erhalten wir als Bewegungsgleichung die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung:

$$J_A \ddot{\varphi} + D\varphi = 0$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt die Periodendauer T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}, \quad (5)$$

wobei J_A das Trägheitsmoment der Anordnung bezüglich der Drehachse A ist und D das Richtmoment der Feder. Nun erhöhen wir das Trägheitsmoment der Anordnung systematisch um ein Zusatzträgheitsmoment J_Z , in dem wir eine Scheibe mit bekannter Masse m und bekanntem Radius R auf dem Teller im Abstand s von der Drehachse anbringen. Nach dem Steiner'schen Satz gilt für das Trägheitsmoment der Scheibe:

$$J_Z = \frac{1}{2} m \cdot R^2 + m \cdot s^2.$$

Nun ist das gesamte Trägheitsmoment der Anordnung die Summe von J_Z und dem Trägheitsmoment des Tellers J_T . Wir erhalten also nach quadrieren beider Seiten:

$$T^2 = 4 \frac{\pi^2}{D} J_Z + 4 \frac{\pi^2}{D} J_T = a \cdot J_Z + b, \quad (6)$$

mit den Zusammenhängen

$$a = 4 \frac{\pi^2}{D} \quad \text{und} \quad b = 4 \frac{\pi^2}{D} J_T = a \cdot J_T$$

und erhalten somit

$$J_T = \frac{b}{a}. \quad (7)$$

J_Z in $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	0	7.18E-5 ±2.19E-7	1.28E-4 ±7.82E-7	2.95E-4 ±3.00E-6	5.75E-4 ±6.74E-6	9.66E-4 ±1.21E-5	1.47E-3 ±1.89E-5
T^2 in s^2	0.163 ± 0.002	0.186 ± 0.001	0.203 ± 0.003	0.243 ± 0.003	0.316 ± 0.002	0.425 ± 0.006	0.560 ± 0.004

Tabelle 1: Quadrat der Periodendauer mit dazugehörigem Zusatzträgheitsmoment

Wir führen im folgenden mit den Messwerten eine lineare Regression durch¹.

¹ Regression mit qti-plot Modellfkt.: $y=ax+b$ mit instrumenteller Wertung der y-Fehler

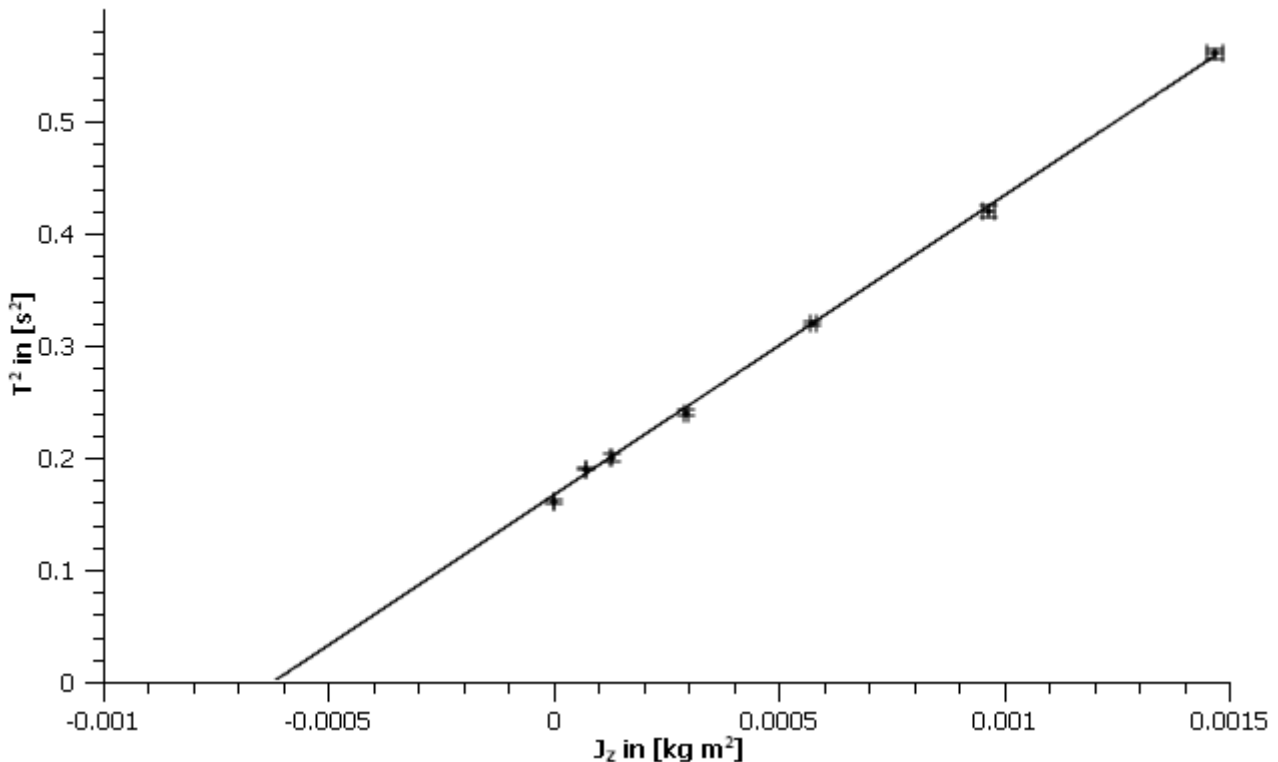


Abb. 1: grafische Darstellung von $T^2=f(J_z)$

Die Messgenauigkeiten von J_z und T^2 wurden mithilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt². Die Regression erfolgte zur Ermittlung der Koeffizienten der Regressionsfunktion, wobei wir für das Trägheitsmoment des Tellers: $J_T=(623.0\pm 0.2)\cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ erhalten. Der Fehler von J_T wurde mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für korrelierte Größen ermittelt³. Aus der Kalibrierungskurve kann man das skalare Trägheitsmoment eines beliebigen starren Körpers ablesen, in dem man das zum experimentell ermittelten T^2 -Wert gehörende Trägheitsmoment abliest. Alle Trägheitsmomente, die man mit der Kalibrierungskurve ermitteln kann, beziehen sich auf die Rotationsachse des Drehtisches als Rotationsachse des Körpers.

3.3. Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Zylinders in Abhängigkeit vom Winkel zwischen Symmetrieachse und Rotationsachse

Aus Gl. (6) erhalten wir für das Trägheitsmoment eines beliebigen starren Körpers auf dem Drehtisch den folgenden Zusammenhang:

$$J'_\gamma = \frac{T^2}{a} - J_T. \quad (8)$$

Da die Messungen mit der Halterung für den Zylinder erfolgten, ermitteln wir mit Gl. (8) das Trägheitsmoment der Zylinderhalterung J_H als Korrekturgröße. Es gilt also für das Trägheitsmoment des Zylinders, mit Neigungswinkel γ zwischen Rotationsachse und Symmetrieachse des Zylinders, der Zusammenhang:

$$J_\gamma = J'_\gamma - J_H.$$

² Siehe Anhang A1

³ Siehe Anhang A1

Winkel in °	0 ± 3	15 ± 3	30 ± 3	45 ± 3	60 ± 3	75 ± 3	90 ± 3
J_γ in $\text{kg}\cdot\text{m}^2$	2.27E-04 ±1.92E-5	2.93E-04 ±1.90E-5	4.71E-04 ±2.23E-5	7.23E-04 ±2.34E-5	9.60E-04 ±2.60E-5	1.17E-03 ±2.55E-5	1.19E-03 ±2.67E-5

Tabelle 1: experimentell ermittelte Trägheitsmomente des Zylinders mit dazugehörigen Neigungswinkeln γ zwischen Symmetrieachse und Rotationsachse

Nun gilt für die Richtung der Drehachse:

$$\vec{n} = (0, \sin(\gamma), \cos(\gamma))^t$$

was eingesetzt in Gl. (3)

$$J_\gamma = J_Z + (J_Y - J_Z) \sin^2(\gamma) \quad (9)$$

ergibt. Wenn Gl. (3) gilt, kann man die experimentell bestimmten J_γ in Abhängigkeit von $\sin^2(\gamma)$ auftragen und müsste laut Gl. (9) eine lineare Funktion erhalten. Wir führen mit den ermittelten Werten eine lineare Regression durch.

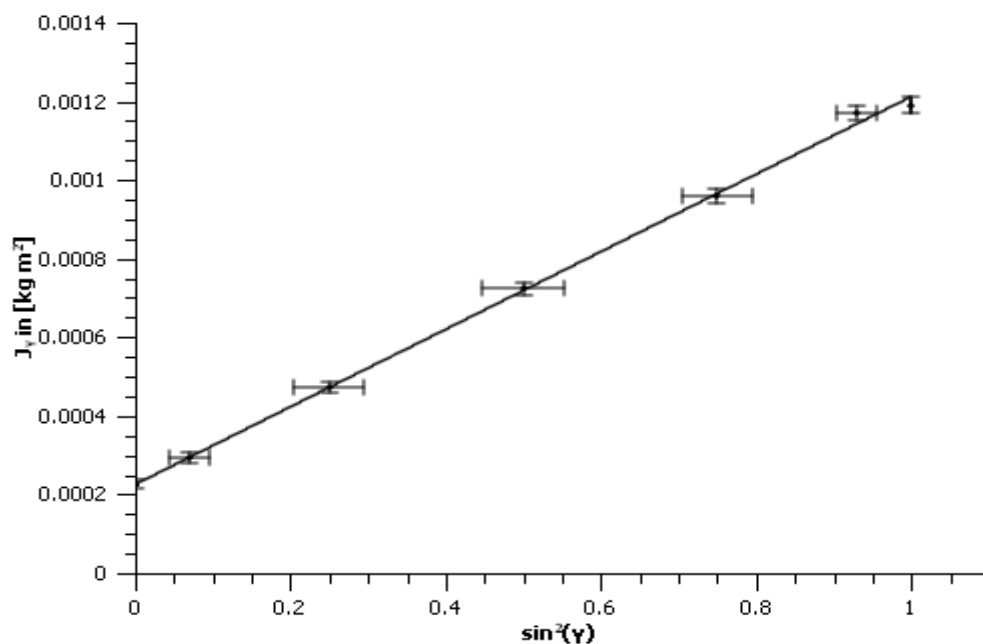


Abb. 2: grafische Darstellung von $J_\gamma = f(\sin^2(\gamma))$

Wie erwartet liegen die Funktionswerte auf einer Geraden, für deren Koeffizienten wir $a = (9.86 \pm 0.16) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ und $b = (2.26 \pm 0.08) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ erhalten. Nun müsste laut Gl. (9) $a = (J_Y - J_Z)$ und $b = J_Z$ gelten. Aus den experimentell ermittelten Werten erhalten wir $a = J_Y - J_Z = (9.61 \pm 0.33) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ und $b = J_Z = (2.27 \pm 0.19) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$, wobei die Messungenauigkeiten mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt wurden. Die Konfidenzintervalle überschneiden sich offensichtlich.

4. Diskussion und Interpretation

4.1. Kalibrierungskurve des Drehtisches

Die Stoppuhrauslösung wurde nach dem Erreichen des einen Umkehrpunktes gerichtet, da dort die Geschwindigkeit der Drehtischeanordnung am geringsten ist. Die Reibung wurde vernachlässigt, obwohl die Auswirkungen durchaus sichtbar waren. Durch das wiederholte Messen der Zeiten, konnte eine statistische Auswertung erfolgen, weshalb der zufällige Fehler gering abgeschätzt wurde. Die Messunsicherheiten sind erstaunlich gering, was in Abbildung 1 auch dafür verantwortlich ist, dass nicht alle Konfidenzintervalle der Messwerte den Graphen schneiden. Vor allem für geringe Zeitintervalle muss vermutet werden, dass der in 2. diskutierte Ansatz, der reaktionszeitbedingte Fehler verschwindet im Mittel, überdacht werden muss, da sich bei diesen Zeiten ein Δt (vor allem im Quadrat) stärker bemerkbar macht. Der Vertrauensbereich allein als zufälliger Fehler ist wahrscheinlich zu gering abgeschätzt.

4.2. Vergleich von experimentellen und theoretischen Werten für die Hauptträgheitsmomente des Zylinders

Mit Hilfe der Gl. (2) lässt sich das Trägheitsmoment berechnen. Für die Symmetrieachse als Rotationsachse und der homogenen Dichte ρ erhält man in Zylinderkoordinaten:

$$J_z = \iiint r^2 \rho r dr d\varphi dz = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^3 dr d\varphi dz = \frac{1}{2} \rho (\pi h R^2) R^2 = \frac{1}{2} m R^2 .$$

Für die anderen beiden Hauptachsen, für die das Trägheitsmoment identisch (symmetrischer Kreisel) ist, ist das Errechnen schon komplizierter, man erhält

$$J_y = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 .$$

Mit den gemessenen Werten erhalten wir auf dem rechnerischen Weg für die beiden Hauptträgheitsmomente $J_z = (3.29 \pm 0.01) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ und $J_y = (12.96 \pm 0.02) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

Experimentell hatten wir $J_z = (2.27 \pm 0.19) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ und $J_y = (11.88 \pm 0.27) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

Die beiden Konfidenzintervalle überschneiden sich nicht. Ursache dafür könnte ein zu gering abgeschätzter Fehler bei der Fehlerrechnung sein. Vor allem der Fehler der Zeitmessung scheint, wie in 4.1 bereits diskutiert, zu gering.

Eine weitere Ursache dafür liegt in der Tatsache begründet, dass der Zylinder nicht homogen war (Bohrung für die Halterung) und man das Trägheitsmoment der Schraube, komplett vernachlässigt hat. Weiterhin blieb die Dämpfung der Feder in Gl. (5) komplett unberücksichtigt. Außerdem gehen wir davon aus, dass es sich bei dem Zylinder um einen vollkommen homogenen Körper handelt, was jedoch nicht verifiziert werden konnte.

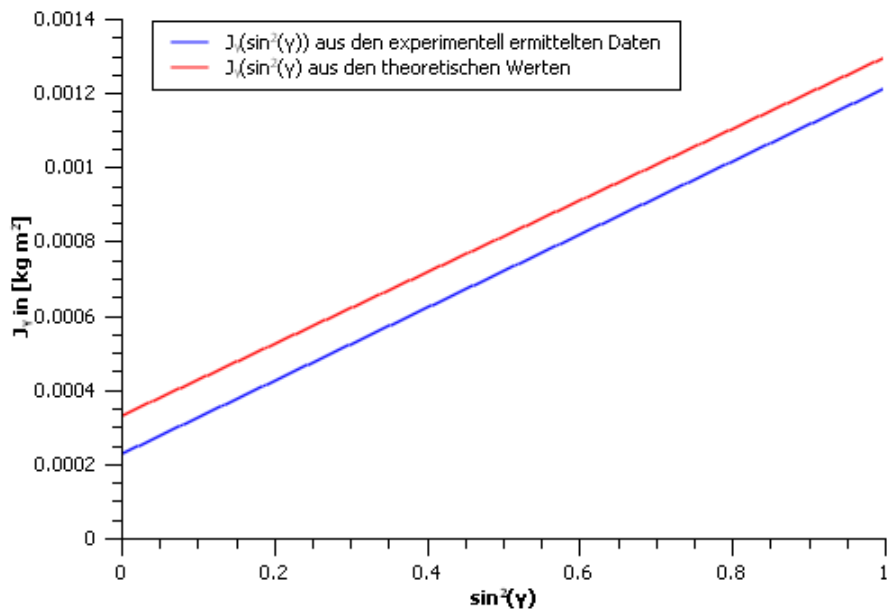


Abb. 3: $J_y=f(\sin^2(\gamma))$ aus theoretischen (oberer Graph) und experimentellen Daten (unterer Graph)

Wenn man nun für die theoretischen Werte $J_y=f(\sin^2(\gamma))$ plottet (mit den Koeffizienten: $a=J_Y-J_Z=(9.67\pm 0.02)\cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ und $b=J_Z=(3.29\pm 0.01)\cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$), fällt auf, dass der Graph aus den theoretischen Daten annähernd parallel zu dem aus den Messdaten erstellten Graphen ist⁴. Es liegt die Vermutung nahe, dass die Abweichungen durch ein zu großes J_H zu Stande kommen. Denn es gilt ja:

$$J_y=(J'_Z-J_H)+([J'_Y-J_H]-[J'_Z-J_H])\sin^2(\gamma)=J'_Z-J_H+(J'_Y-J'_Z)\sin^2(\gamma)$$

der Anstieg bleibt unbeeinflusst, der Schnittpunkt mit der J_y -Achse aber nicht, was den parallelen Graphen erklären würde. Nun gehen die Zeitmessungen auch quadratisch in die Trägheitsmomentbestimmung ein (siehe Gl. (8)), weshalb geringe Abweichungen relativ große Diskrepanzen in den ermittelten Werten mit sich bringen. Eine gewisse Kohärenz von theoretischen und experimentellen Werten ist vorhanden, da die Konfidenzintervalle der Anstiege sich überschneiden. Da der Schnittpunkt mit der J_y -Achse jedoch eine gewisse Diskrepanz aufweist, sollte eine erneute Bestimmung der Halterung stattfinden.

4.3. Bedeutung der Hauptträgheitsmomente

Die Ermittlung von Hauptträgheitsmomente ist nicht nur interessant, weil man damit den Trägheitsellipsoiden bestimmen kann, sondern weil Drehungen um die Hauptachsen (Rotationsachsen auf die sich die Hauptträgheitsmomente beziehen) bestimmte Eigenschaften aufweisen. Die Hauptachsen werden auch als freie Achsen bezeichnet, da um diese eine einfache Rotation möglich ist, ohne diese fest zu lagern. Ein starrer Körper, der eine reine Rotationsbewegung vollführt, hat grundsätzlich drei Freiheitsgrade der Bewegung. Wir wollen diese Bewegung jedoch durch eine befestigte Drehachse auf einen Freiheitsgrad einschränken. In diesem Fall muss die Lagerung etwaige Kräfte abfangen, es kommt also zum Verschleiß. Man behilft sich nun damit, das man den Körper so lagert, dass er um eine der Hauptachsen rotiert, wobei wir hier noch Einschränkungen vornehmen müssen. Denn eine stabile Rotation findet nur um die Hauptachsen des größten und kleinsten Trägheitsmomentes statt. In dem Fall, dass wir die Lagerung des Körpers so vorgenommen haben, dass eine Rotation um eine der Hauptachsen des größten bzw. kleinsten Trägheitsmoment realisiert wird, läuft diese Rotation stabil, ohne das auf die Lagerung der

4 Zum Vergleich: Anstieg der experimentell ermittelten Kurve siehe 3.3 (S. 6)

Drehachse große Kräfte wirken (auswuchten).

Wir wollen noch einmal Gl. (9) betrachten. Wenn J_z gleich J_y (J_y ist gleich J_x) ist, verschwindet der Faktor vor dem $\sin^2(\gamma)$ und das Trägheitsmoment des Zylinders ist unabhängig vom Neigungswinkel zwischen Symmetrieachse und Rotationsachse eine Konstante. Der Trägheitsellipsoid ist in diesem Fall eine Kugel, weshalb man auch von einem sphärischen Kreisel spricht. Daraus folgt, dass das Trägheitsmoment um jede beliebige Achse gleich ist. Für einen solchen Zylinder gilt:

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 = J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

woraus wir $h^2 = 3 R^2$ bzw. $h = \sqrt{3} R$ erhalten. Für sphärische und symmetrische Kreisel ist die Rotation um jede Hauptachse stabil.

Anhang

A1. Fehlerrechnung

Die Zeiten wurden jeweils 6 mal gemessen um eine statistische Auswertung der Streuung sinnvoll zu machen. Den zufälligen Fehler der Zeitmessungen erhalten wir deshalb als den Vertrauensbereich. Die Messungenauigkeiten der Ergebnisse und Zwischenergebnisse wurden, außer in einem Fall, mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für nicht korrelierte Größen

$$u_F = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial x} \cdot u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F(x, y, \dots)}{\partial y} \cdot u_y\right)^2 + \dots}$$

berechnet.

Für die Berechnung der Messungenauigkeit des Trägheitsmomentes des Drehtisches J_T (nach Gl. 7) müssen wir jedoch das Fehlerfortpflanzungsgesetz für korrelierte Größen anwenden. Für eine Größe, die sich mit einer Funktion in Abhängigkeit von zwei Variablen $f = F(x, y)$ berechnen lässt, ergibt sich dann für die Messunsicherheit:

$$u_F = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot u_y\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot u_{xy}}$$

wobei wir u_{xy} aus der Relation

$$r_{xy} = \frac{u_{xy}}{u_x \cdot u_y} \quad \text{bzw.} \quad u_{xy} = r_{xy} \cdot u_x \cdot u_y$$

erhalten. Das Quadrat des Korrelationskoeffizienten erhalten wir über Regression aus der Plot Software.

Quellen

- Skript: „Physikalisches Grundpraktikum: Mechanik und Thermodynamik 2005“, Humboldt Universität zu Berlin
- Skript: „Physikalisches Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik“, Humboldt Universität zu Berlin
- Wolfgang Demtröder: „Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme“ 5. Auflage (Springer, Berlin, Heidelberg 1994)