

VERSUCHSPROTOKOLL M2  
TRÄGHEITSMOMENTE

JOHANN FÖRSTER 519519  
VERSUCHSPARTNER MEIKEL SOBANSKI  
MESSPLATZ 2

HUMBOLDT UNIVERSITÄT ZU BERLIN  
INSTITUT FÜR PHYSIK

# INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung .....	3
2.1) Schwingungsdauer des Drehtisches selbst und des Drehtisches mit Kreisscheibe .....	3
2.2) Grafische Darstellung $T^2 = f(J_Z)$ mit QtiPlot .....	4
2.3) Schwingungsdauer des Drehtisches mit Zylinder und Bestimmung der Trägheitsmomente .....	5
2.4) Grafische Darstellung $J_\gamma = f(\sin^2\gamma)$ mit QtiPlot .....	6
2.5) Vergleich von experimentellen und theoretischen Werten für Hauptträgheitsmomente des Zylinders .....	6
3) Fehleranalyse und kritische Selbsteinschätzung .....	7
4) Quellenangabe .....	7
Anhang: Messprotokoll .....	8

## 1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Ziel des Versuches war es, mit Hilfe eines schwingungsfähigen Drehtisches (mit Schneckenfeder, Richtmoment  $D$ ) das Trägheitsmoment des Drehtisches selbst gemäß [1], Seite 37 mit Hilfe einer Kreisscheibe (Masse  $m_{Sch}$ , Radius  $R_{Sch}$ ) und schließlich das Trägheitsmoment eines Zylinders (Masse  $m_z$ , Radius  $R_z$ , Höhe  $h_z$ ) unter verschiedenen Winkeln  $\gamma$  zwischen Symmetrieachse des Zylinders und Drehachse des Drehtisches zu bestimmen. Hierfür wurden neben den Körpereigenschaften ( $R_{Sch}$ ,  $R_z$ ,  $h_z$  mittels Messschieber,  $m_{Sch}$  und  $m_z$  incl. Fehler aus Angabe am Versuchsplatz) vor allem die zehnfache Schwingungsdauer des Drehtisches (ggf. mit den jeweiligen Körpern) mittels einer digitalen Stoppuhr gemessen.

### 2.1) Schwingungsdauer des Drehtisches selbst und des Drehtisches mit Kreisscheibe

Systematische Messunsicherheit der digitalen Stoppuhr: Nach [2], Seite 18 ergibt sich für die Unsicherheit  $\Delta t_s = 0,01s + 5t * 10^{-4}s$ , was für alle gemessenen Zeiten stets kleiner ist als 0,015s. Zusammen mit der Reaktionszeit lässt sich daher die systematische Messunsicherheit der zehnfachen Schwingungsdauer zu  $\Delta t = 0,2s$  abschätzen. Da jeweils immer nur 2 Messwerte vorliegen, wird die statistische Messunsicherheit durch die halbe Differenz der Messwerte abgeschätzt.

Drehtisch ohne Kreisscheibe:

Messung 1	Messung 2	Mittelwert	statistische Messunsicherheit	Ergebnis
$10T_1$ in s	$10T_2$ in s	$\bar{T} = \sum_{i=1}^2 T_i = \frac{10T_1 + 10T_2}{20}$ in s	$u_s = \frac{ 10T_1 - 10T_2 }{2}$ in s	$\underline{T} = \bar{T} \pm \sqrt{\left(\frac{u_s}{10}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{10}\right)^2}$ in s
4,44	4,37	0,4405	0,035	0,44 ± 0,03

Drehtisch mit Kreisscheibe

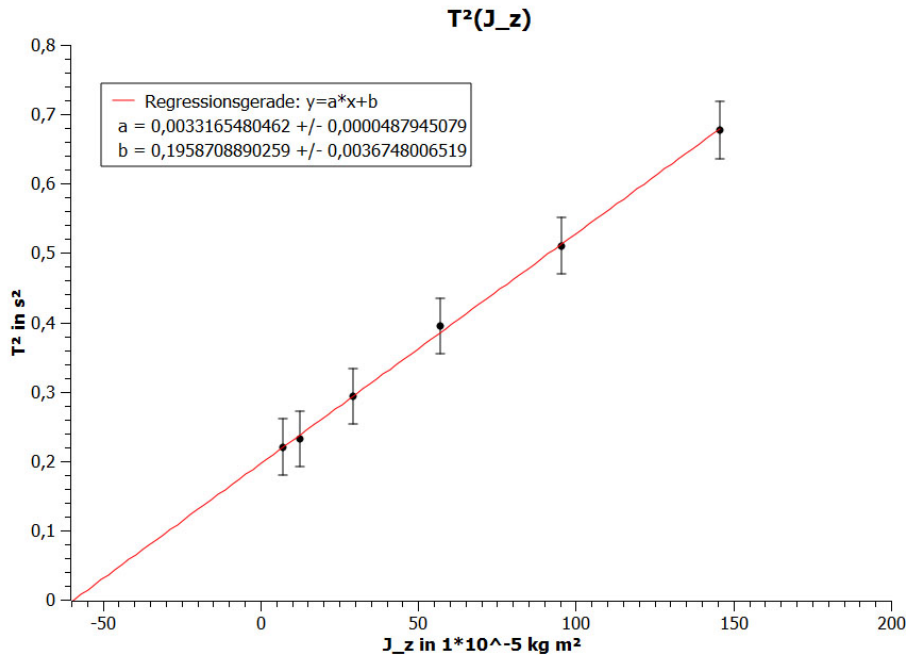
Abstand Drehachse	Messung 1	Messung 2	Mittelwert	statistische Messunsicherheit	Ergebnis
	$10T_1$ in s	$10T_2$ in s	$\bar{T} = \sum_{i=1}^2 T_i = \frac{10T_1 + 10T_2}{20}$ in s	$u_s = \frac{ 10T_1 - 10T_2 }{2}$ in s	$\underline{T} = \bar{T} \pm \sqrt{\left(\frac{u_s}{10}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{10}\right)^2}$ in s
0	4,66	4,72	0,4690	0,030	0,47 ± 0,03
a	4,85	4,78	0,4815	0,035	0,48 ± 0,03
2a	5,41	5,41	0,5410	0	0,54 ± 0,02
3a	6,28	6,28	0,6280	0	0,63 ± 0,02
4a	7,13	7,16	0,7145	0,015	0,71 ± 0,03
5a	8,28	8,18	0,8230	0,050	0,82 ± 0,03

mit  $a = (1,5 \pm 6 * 10^{-3})\text{cm}$  (Unsicherheit gemäß [2], Seite 17)

## 2.2) Grafische Darstellung $T^2 = f(J_Z)$ mit QtiPlot

Für das Trägheitsmoment der Kreisscheibe gilt:  $J_Z = \frac{1}{2}mR^2 + ms^2$  ([1], Seite 36 unten), wobei  $m = (246,4 \pm 0,1)\text{g}$  und  $R = (2,4 \pm 6 \cdot 10^{-3})\text{cm}$ . (Unsicherheit von  $m$  aus Angabe am Versuchsplatz, Unsicherheit von  $R$  gemäß [2], Seite 17). Für die Unsicherheit des Trägheitsmoments folgt aus der Fehlerfortpflanzung:  $u(J_Z) = \frac{\partial J_Z}{\partial m} * u(m) + \frac{\partial J_Z}{\partial R} * u(R) + \frac{\partial J_Z}{\partial s} * u(s) = (\frac{1}{2}R^2 + s^2) * u(m) + mR * u(R) + 2ms * u(s)$

Abstand $s$ in cm	$J_Z$ in $\text{kg} * \text{m}^2$	$u(J_Z)$ in $\text{kg} * \text{m}^2$	Ergebnis in $\text{kg} * \text{m}^2$
0	$7,09632 * 10^{-5}$	$3,836 * 10^{-7}$	$(7,10 \pm 0,04) * 10^{-5}$
1,5	$1,264032 * 10^{-4}$	$8,49636 * 10^{-7}$	$(1,264 \pm 0,009) * 10^{-4}$
3	$2,927232 * 10^{-4}$	$1,361 * 10^{-6}$	$(2,93 \pm 0,02) * 10^{-4}$
4,5	$5,699232 * 10^{-4}$	$1,917 * 10^{-6}$	$(5,70 \pm 0,02) * 10^{-4}$
6	$9,580032 * 10^{-4}$	$2,518 * 10^{-6}$	$(9,58 \pm 0,03) * 10^{-4}$
7,5	$1,4569632 * 10^{-3}$	$3,164 * 10^{-6}$	$(1,457 \pm 0,004) * 10^{-3}$



Laut [1], Seite 36 unten wird die  $J_Z$ -Achse bei  $J_Z = -J_T$  geschnitten, daher ergibt sich das Trägheitsmoment des Tisches  $J_T$  zu  $J_T = b/a * 10^{-5} \text{kgm}^2 = 5,905866 * 10^{-4} \text{kgm}^2$ . Die Unsicherheit beträgt  $u(J_T) = \frac{\partial J_T}{\partial a} * u(a) + \left| \frac{\partial J_T * u(b)}{\partial b} \right| = \frac{u(a)}{b} + \frac{a * u(b)}{b^2} = 5,66789 * 10^{-9} \text{kgm}^2 \Rightarrow J_T = (5,90587 \pm 0,00006) * 10^{-4} \text{kgm}^2$ .

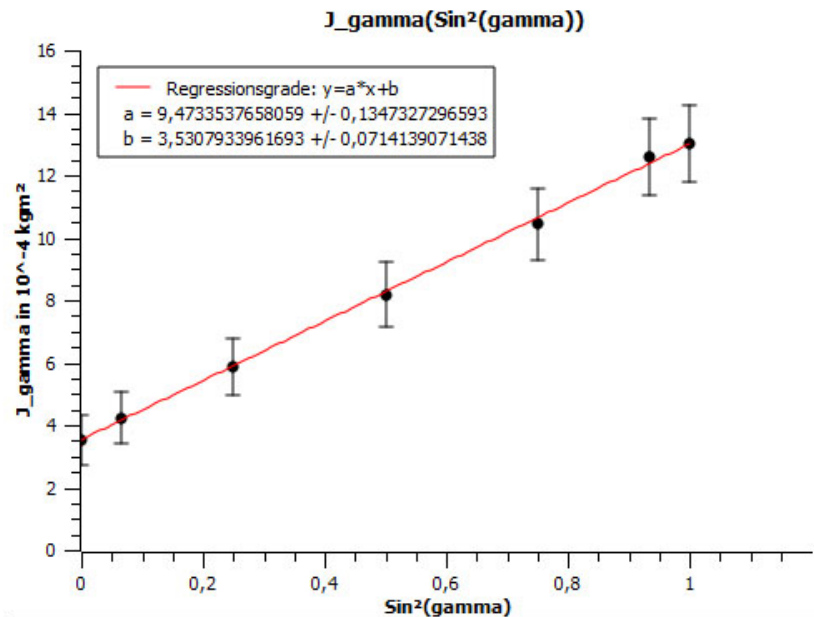
### 2.3) Schwingungsdauer des Drehtisches mit Zylinder und Bestimmung der Trägheitsmomente

Winkel in °	Messung 1 10T <sub>1</sub> in s	Messung 2 10T <sub>2</sub> in s	Mittelwert $\bar{T} = \sum_{i=1}^2 T_i =$ $\frac{10T_1+10T_2}{20}$ in s	statistische Messunsicherheit $u_s = \frac{ 10T_1-10T_2 }{2}$ in s	Ergebnis $\underline{T} = \bar{T} \pm$ $\sqrt{\left(\frac{u_s}{10}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{10}\right)^2}$ in s
0	5,59	5,60	0,5595	0,005	0,56±0,03
15	5,85	5,75	0,5800	0,05	0,58±0,03
30	6,25	6,29	0,6250	0,02	0,63±0,03
45	6,82	6,85	0,6835	0,015	0,68±0,03
60	7,37	7,35	0,7360	0,01	0,74±0,03
75	7,85	7,82	0,7835	0,015	0,78±0,03
90	7,91	7,94	0,7925	0,015	0,79±0,03

Zur Bestimmung der Trägheitsmomente wird zusätzlich das Richtmoment D der Schneckenfeder benötigt, welches sich aus dem Anstieg des Graphen  $T^2 = f(J_Z)$  bestimmen lässt zu:  $D = \frac{4*\pi^2}{a} = 0,119034662 \frac{kgm^2}{s^2}$ , die Unsicherheit ergibt sich zu  $u(D) = \left| \frac{\partial D}{\partial a} * u(a) \right| = 1,75130 * 10^{-3} \frac{kgm^2}{s^2} \Rightarrow D = 0,199 \pm 0,002 \frac{kgm^2}{s^2}$

Winkel in °	$J_\gamma$ in $kgm^2$ $J_\gamma = \frac{DT^2}{4\pi^2} - J_T$	$u(J_\gamma)$ in $kgm^2$ $u(J_\gamma) = \left  \frac{\partial J_\gamma u(T)}{\partial T} \right  + \left  \frac{\partial J_\gamma u(D)}{\partial D} \right  + \left  \frac{\partial J_\gamma u(J_T)}{\partial J_T} \right $	Ergebnis in $kgm^2$ $\underline{J} = J_\gamma \pm u(J_\gamma)$
0	3,532871*10 <sup>-4</sup>	8,134 * 10 <sup>-5</sup>	(3,5 ± 0,9) * 10 <sup>-4</sup>
15	4,237210*10 <sup>-4</sup>	8,488 * 10 <sup>-5</sup>	(4,2 ± 0,9) * 10 <sup>-4</sup>
30	5,872193*10 <sup>-4</sup>	9,271 * 10 <sup>-5</sup>	(6 ± 1) * 10 <sup>-4</sup>
45	8,180233*10 <sup>-4</sup>	1,032 * 10 <sup>-4</sup>	(8 ± 2) * 10 <sup>-4</sup>
60	1,042726*10 <sup>-3</sup>	1,128 * 10 <sup>-4</sup>	(1,0 ± 0,2) * 10 <sup>-3</sup>
75	1,260351*10 <sup>-3</sup>	1,217 * 10 <sup>-4</sup>	(1,3 ± 0,2) * 10 <sup>-3</sup>
90	1,303118*10 <sup>-3</sup>	1,234 * 10 <sup>-4</sup>	(1,3 ± 0,2) * 10 <sup>-3</sup>

## 2.4) Grafische Darstellung $J_\gamma = f(\sin^2\gamma)$ mit QtiPlot



## 2.5) Vergleich von experimentellen und theoretischen Werten für Hauptträgheitsmomente des Zylinders

experimentell wurde ermittelt:

$$J_{\gamma=0^\circ} = (3,5 \pm 0,9) * 10^{-4} \text{kgm}^2$$

$$J_{\gamma=90^\circ} = (1,3 \pm 0,2) * 10^{-3} \text{kgm}^2$$

Die gemessenen Körpereigenschaften des Zylinders sind:

$$m = 1352,9 \text{ g} , u(m) = 0,1 \text{ g} , R = 2,7 \text{ cm} , u(R) = 6 * 10^{-3} \text{ cm} ,$$

$$h = 8,3 \text{ cm} , u(h) = 6 * 10^{-3} \text{ cm}$$

(u(h),u(R) nach [2], Seite 17, u(m) aus Angabe am Versuchsplatz)

Die theoretischen Werte ergeben sich nach [1], Seite 38 oben damit zu:

$$J_{\gamma=0^\circ} = \frac{mR^2}{2} = 4,93132 * 10^{-4} \text{kgm}^2$$

$$J_{\gamma=90^\circ} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} = 1,02324 * 10^{-3} \text{kgm}^2$$

$$u(J_{\gamma=0^\circ}) = \frac{\partial J_{\gamma=0^\circ}}{\partial R} u(R) + \frac{\partial J_{\gamma=0^\circ}}{\partial m} u(m) = 2,228 * 10^{-6} \text{kgm}^2$$

$$u(J_{\gamma=90^\circ}) = \frac{\partial J_{\gamma=90^\circ}}{\partial R} u(R) + \frac{\partial J_{\gamma=90^\circ}}{\partial m} u(m) + \frac{\partial J_{\gamma=90^\circ}}{\partial h} u(h) = 2,294 * 10^{-6} \text{kgm}^2$$

$$\Rightarrow J_{\gamma=0^\circ} = (4,93 \pm 0,03) * 10^{-4} \text{kgm}^2$$

$$\Rightarrow J_{\gamma=90^\circ} = (1,023 \pm 0,003) * 10^{-3} \text{kgm}^2$$

Die Ergebnisse überschneiden sich nicht innerhalb ihrer Messabweichungen, also haben nicht beachtete systematische Messabweichungen das Ergebnis beeinflusst.

Für  $\gamma = 0^\circ$  ist der theoretische, für  $\gamma = 90^\circ$  der experimentelle Wert größer.

Außerdem ist die Unsicherheit der theoretischen Werte geringer als die der experimentellen Werte.

### 3) Fehleranalyse und kritische Selbsteinschätzung

Die erzielten Ergebnisse entsprechen relativ gut den Erwartungen, die grafischen Abhängigkeiten der Darstellungen  $T^2 = f(J_Z)$  und  $J_\gamma = f(\sin^2\gamma)$  waren wie erwartet in guter Näherung linear und die theoretischen Werte von  $J_{\gamma=0^\circ}$  und  $J_{\gamma=90^\circ}$  lagen in der selben Größenordnung wie die experimentellen Werte, wobei es allerdings eigenartig ist, daß der theoretische Wert von  $J_{\gamma=0^\circ}$  über dem experimentellen Wert liegt, da die Halterung des Zylinders bei allen experimentellen Werten zu einem zu groß gemessenen  $J_\gamma$  führen sollte. Letzteres könnte man durch eine zusätzliche Bestimmung des Trägheitsmomentes der Halterung beseitigen. Die größten Messunsicherheiten des Versuches entstanden bei den Zeitmessungen, da es jeweils nur zwei Messwerte gab und dadurch die statistische Messunsicherheit sehr groß ist, zusätzlich ist das Messen mit der Stoppuhr generell relativ ungenau und die Reaktionszeit schlecht einzuschätzen. Diese Effekte könnte man z.B. minimieren, indem man die Zeitmessung per Lichtschranke erfolgen lassen würde. Eine weitere nicht beachtete Messunsicherheit entstand durch das Einstellen des Neigungswinkels  $\gamma$  des Zylinders mit Hilfe der Schablone.

### 4) Quellenangabe

[1] Skript "Phys. Grundpraktikum I: Mechanik und Thermodynamik", 2005, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/GPRI.html> (Stand: 08.05.2008)

[2] Skript "Phys. Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik", 2007, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Einfuehrung/PDF-Datei/Einfuehrung.pdf> (Stand: 08.05.2008)