

VERSUCHSPROTOKOLL M3
ELASTIZITÄT UND TORSION

JOHANN FÖRSTER 519519
VERSUCHSPARTNER MEIKEL SOBANSKI
MESSPLATZ 2

HUMBOLDT UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung	3
2.1) Ergebnisse der Längenänderungsmessung	3-4
2.2) Grafische Darstellung $\Delta l(m)$ mit QtiPlot	4
2.3) Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der grafischen Darstellung	5
2.4) Ergebnisse der Zeitmessungen der Periodendauern	5
2.5) Bestimmung des Torsionsmoduls und der Poissonzahl	6
3) Fehleranalyse und Vergleich mit Referenzwerten	6
4) Quellenangabe	7
Anhang: Messprotokoll	8

1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Ziel des Versuches war es, einen Messingdraht durch Belastung mit Gewichten und Messung der Schwingungsdauer seiner Drehschwingung auf seine elastischen Eigenschaften zu untersuchen. Insbesondere wurden hierbei der Elastizitätsmodul E , der Torsionsmodul G und daraus die Poissonsche Zahl μ bestimmt und mit Referenzwerten verglichen.

2.1) Ergebnisse der Längenänderungsmessung

Masse m in g	Belastung Δl_1 in mm	Entlastung Δl_2 in mm	Mittelwert $\overline{\Delta l} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2}$ in mm	Abweichung $u_z = \overline{\Delta l} - \Delta l_1$ in mm
0	7,655	7,620	7,6375	0,0175
50	7,820	7,782	7,8010	0,0190
100	7,989	7,945	7,9670	0,0220
150	8,136	8,100	8,1180	0,0180
200	8,295	8,263	8,2790	0,0160
250	8,441	8,430	8,4355	0,0055
300	8,589	8,569	8,5790	0,0100
350	8,732	8,729	8,7305	0,0015
400	8,905	8,870	8,8875	0,0175
450	9,039	9,026	9,0325	0,0065
500	9,163	9,162	9,1625	0,0005
550	9,333	9,322	9,3275	0,0055
600	9,489	9,470	9,4795	0,0095
650	9,635	9,631	9,6330	0,0020
700	9,784	9,779	9,7815	0,0025
750	9,931	9,929	9,9300	0,0010
800	10,072	10,072	10,0720	0,0000

statistische Messunsicherheit:

Die statistische Unsicherheit wurde durch die halbe Differenz u_z der beiden Einzelmesswerte abgeschätzt, da für jede Belastung nur zwei Messwerte zur Verfügung standen und damit Angabe von Standardabweichung und Vertrauensbereich nicht sinnvoll ist.

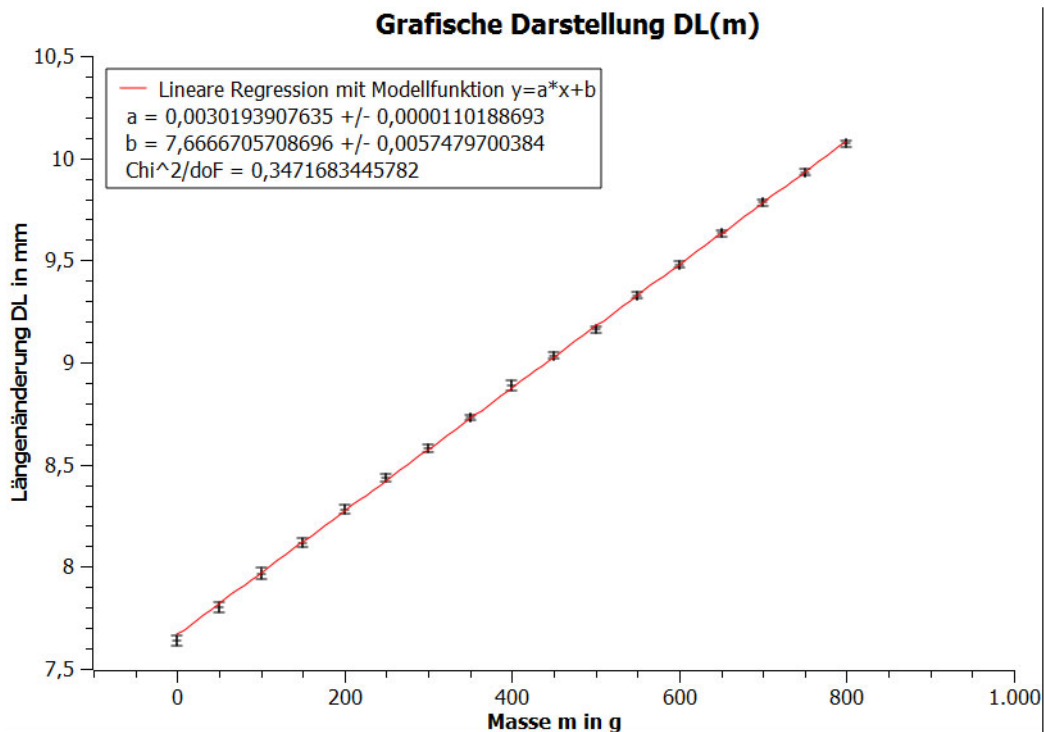
systematische Messunsicherheit:

Die systematische Unsicherheit der Bügelmessschraube ergibt sich gemäß [2], Seite 17 zu $u_{s1} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m} + 10^{-5} \cdot \overline{\Delta l}$. Die systematische Messunsicherheit der Libelle wird zu $u_{s2} = 0,01 \text{ mm}$ abgeschätzt.

Die Gesamtunsicherheit ergibt sich damit zu $u = \sqrt{u_z^2 + (u_{s1} + u_{s2})^2}$. Die sich ergebenden Eingangswerte zur Darstellung $\Delta l(m)$ befinden sich auf der nächsten Seite.

Masse m in g	Mittelwert Δl in mm	statistische Unsicherheit u_z in mm	systematische Unsicherheit $u_{s1} + u_{s2}$ in mm	Gesamtunsicherheit u in mm
0	7,6375	0,0175	0,01507638	0,023098638
50	7,8010	0,0190	0,01507801	0,024255853
100	7,9670	0,0220	0,01507967	0,026672016
150	8,1180	0,0180	0,01508118	0,023482802
200	8,2790	0,0160	0,01508279	0,021988419
250	8,4355	0,0055	0,01508436	0,016055770
300	8,5790	0,0100	0,01508579	0,018099201
350	8,7305	0,0015	0,01508731	0,015161688
400	8,8875	0,0175	0,01508888	0,023106799
450	9,0325	0,0065	0,01509033	0,016430700
500	9,1625	0,0005	0,01509163	0,015099905
550	9,3275	0,0055	0,01509328	0,016064151
600	9,4795	0,0095	0,01509480	0,017835438
650	9,6330	0,0020	0,01509633	0,015228236
700	9,7815	0,0025	0,01509782	0,015303399
750	9,9300	0,0010	0,01509930	0,015132378
800	10,0720	0,0000	0,01510072	0,015100720

2.2) Grafische Darstellung $\Delta l(m)$ mit QtiPlot



2.3) Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der grafischen Darstellung

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird zusätzlich zur Steigung a des Graphen $\Delta l(m)$ die Gesamtlänge l und der Radius R des Messingdrahtes benötigt, welche laut Angabe am Versuchsplatz $l = (2160 \pm 5)$ mm und $R = (0,15 \pm 0,005)$ mm betragen. Nach Gleichung (11), Quelle [1], Seite 42 unten ist $\Delta l(m) = \frac{lg}{EA}m = \frac{lg}{E\pi R^2}m$. Damit lässt sich der Elastizitätsmodul aus dem Anstieg a wie folgt bestimmen: $a = \frac{lg}{E\pi R^2} \Leftrightarrow E = \frac{lg}{a\pi R^2} = \frac{2,16m \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{\pi \cdot (0,15 \cdot 10^{-3}m)^2 \cdot 0,0030193907635 \frac{m}{kg}} = 9,928212078 \cdot 10^{10}$ Pa. Die Unsicherheit ergibt sich nach der Fehlerfortpflanzung zu: $u(E) = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l}u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial R}u(R)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial a}u(a)\right)^2} = 6,6327 \cdot 10^9$ Pa.

Ergebnis: $E = (9,9 \pm 0,7) \cdot 10^{10}$ Pa

2.4) Ergebnisse der Zeitmessungen der Periodendauern

T_V : Periodendauer bei Belastung mit 50g

T_S : Periodendauer bei Belastung mit 50g und Zylinderscheibe

n : Anzahl der Messungen, $n=6$

Messung	$30T_V$ in s	T_V in s	$10T_S$ in s	T_S in S
1	186,06	6,20200	124,66	12,466
2	185,85	6,19500	124,41	12,441
3	186,09	6,20300	125,59	12,559
4	185,87	6,19567	125,35	12,535
5	185,94	6,19800	126,56	12,656
6	186,05	6,20167	126,28	12,628
Mittelwert $\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$	185,97667	6,19922	125,47500	12,548
Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{T} - T_i)^2}$	0,10386	0,00346	0,85470	0,085
Vertrauensbereich $\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n}}s$	0,04240021	0,00141334	0,348929315	0,034892931

Die systematische Messunsicherheit der gemessenen Größen ergibt sich aus der Reaktionszeit, die für zweimaliges drücken der Start/Stop-Taste mit $u_R = 0,2s$ abgeschätzt wird, sowie der Unsicherheit der Stoppuhr, die sich nach [2], Seite 18 zu $u_S = 0,01s + 5 \cdot 10^{-4} \cdot T$ ergibt. $\Rightarrow u(30T_V) = 0,2s + 0,01s + 5 \cdot 185,97667 \cdot 10^{-4}s = 0,302988 \Rightarrow u(T_V) = \frac{1}{30}u(30T_V) = 0,0100996s$; $u(10T_S) = 0,2s + 0,01s + 5 \cdot 125,475 \cdot 10^{-4}s = 0,272738 \Rightarrow u(T_S) = \frac{1}{10}u(10T_S) = 0,0272738s$

Ergebnis: $T_V = \bar{T}_V \pm \sqrt{\bar{s}(T_V)^2 + u(T_V)^2} = (6,20 \pm 0,02)s$

$T_S = \bar{T}_S \pm \sqrt{\bar{s}(T_S)^2 + u(T_S)^2} = (12,55 \pm 0,05)s$

2.5) Bestimmung des Torsionsmoduls und der Poissonzahl

Nach Quelle [1], Seite 42 oben lässt sich das Torsionsmodul G berechnen zu:

$$G = \frac{4\pi l m r^2}{R^4(T_S^2 - T_V^2)}, \text{ wobei hier laut Angabe am Versuchsplatz } m = (130,472 \pm 0,001)\text{g und } r = (25,0 \pm 0,05)\text{mm ist } \Rightarrow G = \frac{4\pi * 2,16\text{m} * 0,130472\text{kg} * (0,025\text{m})^2}{(0,15 * 10^{-3}\text{m})^4 * ((12,548\text{s})^2 - (6,19922\text{s})^2)} = 3,673404571 * 10^{10} \text{ Pa. Die Unsicherheit beträgt nach der Fehlerfortpflanzung:}$$

$$u(G) = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial l} u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial m} u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r} u(r)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R} u(R)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T_S} u(T_S)\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T_V} u(T_V)\right)^2} = 1,003607572 * 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\text{Ergebnis: } G = (3,7 \pm 1,1) * 10^{10} \text{ Pa}$$

Zur Berechnung der Poissonzahl lässt sich die Formel $E = 2G(1 + \mu)$ ([1], Seite 43) umstellen zu $\mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{9,928212078 * 10^{10} \text{ Pa}}{2 * 3,673404571 * 10^{10} \text{ Pa}} - 1 = 0,351363821$

$$\text{Die Unsicherheit beträgt } u(\mu) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial G} u(G)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial E} u(E)\right)^2} = 0,144462737$$

$$\text{Ergebnis: } \mu = 0,35 \pm 0,15$$

3) Fehleranalyse und Vergleich mit Referenzwerten

Die erzielten Ergebnisse entsprechen gut den Erwartungen, ein Vergleich des Elastizitätsmoduls mit dem Vergleichswert $E = (7,8-12,3)\text{Pa}$ [3] zeigt, dass der ermittelte Elastizitätsmodul ($E = 9,9 \pm 0,7)\text{Pa}$ gut im zu erwartenden Bereich liegt. Auch der ermittelte Torsionsmodul $G = (3,7 \pm 1,1) * 10^{10} \text{ Pa}$ stimmt innerhalb seiner Messunsicherheit gut mit dem Referenzwert $G = 3,9 * 10^{10} \text{ Pa}$ [4] überein. Zusätzlich stimmt auch die aus E und G ermittelte Poissonzahl $\mu = 0,35 \pm 0,15$ mit den Referenzwerten $\mu = 0,37$ [3] und $\mu = 0,34$ [4] überein. Die Abweichungen innerhalb der Referenzwerte sind vor allem damit zu begründen, dass die elastischen Eigenschaften von der Umgebungstemperatur abhängen und dass verschiedene Messinglegierungen auch verschiedene elastische Eigenschaften haben. Die Umgebungstemperatur wurde für die zweite Messreihe (Entlastung) zu $T = 26,8^\circ\text{C}$ gemessen, allerdings kann diese Temperatur für die erste Messreihe (Belastung) anders gewesen sein, da zwischen erster und zweiter Messreihe eine relativ lange Pause aufgrund des Abtestates lag. Die Temperatur für die erste Messreihe wurde jedoch nicht gemessen. Eine getrennte Betrachtung der Messreihen führt zu folgenden Mittelwerten bei den Elastizitätsmodulen: Belastung: $E_B = 9,9785 * 10^{10} \text{ Pa}$; Entlastung: $E_E = 9,8174 * 10^{10} \text{ Pa}$, was auf eine leichte Temperaturänderung hindeutet. Die Messunsicherheit des Torsionsmoduls ist relativ groß ausgefallen, da es aus sehr vielen fehlerbehafteten Messgrößen ermittelt wurde. Zusätzlich wurde vernachlässigt, dass bei der Drehschwingung auch noch andere, störende Bewegungen durchgeführt wurden.

4) Quellenangabe

- [1] Skript “Phys. Grundpraktikum I: Mechanik und Thermodynamik“, 2005, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/GPRI.html> (Stand: 18.05.2008)
- [2] Skript “Phys. Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik“, 2007, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Einfuehrung/PDF-Datei/Einfuehrung.pdf> (Stand: 18.05.2008)
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Messing> (Stand: 18.05.2008)
- [4] <http://physics.uwstout.edu/StatStr/statics/tables/cyoungs.htm> (Stand: 18.05.2008)