

VERSUCHSPROTOKOLL O10  
LINSENSYSTEME

JOHANN FÖRSTER 519519  
VERSUCHSPARTNER MEIKEL SOBANSKI

VERSUCHSORT: NEW14'212 MESSPLATZ 1

VERSUCHSDATUM: 18.11.2008

VERSUCHSBETREUER: DR. UWE PREPPERNAU

HUMBOLDT UNIVERSITÄT ZU BERLIN  
INSTITUT FÜR PHYSIK

# INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung .....	3
2.1) Bestimmung der Brennweite von Linse 2 nach der Besselmethode.....	3-4
2.2) Bestimmung der Brennweite von Linse 3 mittels Sphärometer .....	4-5
2.3) Bestimmung der Brennweite $f$ , des Hauptebenenabstandes $a$ und der Lage der Hauptebenen des Linsensystems nach der Methode nach Abbe .....	5-7
2.4) Konstruktion der Hauptebenen mit den in 2.1) und 2.2) ermittelten Brennweiten der Einzellinsen im Maßstab 1:2 .....	8
2.5) Vergleich der Ergebnisse der Methode nach Abbe mit den Ergebnissen der Konstruktion .....	9
3) Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung .....	9-10
4) Quellenangabe.....	10
Anhang: Messprotokoll .....	11

## 1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Ziel des Versuches war es, ein Linsensystem bestehend aus zwei Einzellinsen, deren Brennweiten zu Beginn des Versuches nach der Besselmethode (Linse 2) bzw. mit einem Sphärometer (Linse 3) bestimmt wurden, mit der Methode nach Abbe bezüglich der Hauptebenen (Lage, Abstand, Brennweite des Systems) zu untersuchen und mit den theoretischen Erwartungen, die sich aus Linsenabstand und Einzelbrennweiten ergeben, zu vergleichen. Die physikalischen Grundlagen und die genaue Aufgabenstellung sind in Quelle [1] auf Seite 70-73 und in Quelle [2], Seite 19-21 zu finden.

### 2.1) Bestimmung der Brennweite von Linse 2 nach der Besselmethode

Zur Bestimmung der Brennweite nach der Besselmethode wurden für zehn verschiedene Abstände  $l$  zwischen Gegenstand und Schirm die beiden Lagen  $b_{1,2}$  gemessen, bei denen auf dem Schirm ein scharfes Bild entstand. Aus der Differenz  $e = b_2 - b_1$  dieser Lagen lässt sich dann nach Quelle [2], Seite 21, Gleichung 5 die Brennweite bestimmen zu  $f_2 = \frac{l^2 - e^2}{4l}$ .

Alle Längenmessungen wurden mit einer fest auf der Bank angebrachten Längenskala (1 Skalenteil=1mm) durchgeführt. Die Unsicherheit des Abstandes  $l$  zwischen Gegenstand und Schirm setzt sich zusammen aus der Ungenauigkeit der Lage des Gegenstandes ( $\Delta G$ ), der Lage des Schirms ( $\Delta S$ ) und der Ablesegenauigkeit ( $\Delta A$ ), die jeweils zu einem halben Skalenteil abgeschätzt werden ( $\Delta G = \Delta S = \Delta A = 0,5\text{mm}$ ), sowie des Teilungsfehlers ( $\Delta L$ ) der Längenskala, der sich nach Quelle [3], Seite 17 für einen Büromaßstab zu  $\Delta L = 0,2\text{mm} + 10^{-3} * l$  ergibt. Für die Messunsicherheit von  $l$  folgt damit  $u_l = \sqrt{\Delta G^2 + \Delta S^2 + \Delta A^2 + \Delta L^2}$ .

Da es sich bei der Größe  $e = b_2 - b_1$  um eine Differenzmessung handelt, heben sich alle systematischen Fehler bis auf die Ablesegenauigkeit auf, da zwei Längen gemessen wurden ergibt sich damit  $u_e = \sqrt{2}\Delta A$ .

Die systematische Ungenauigkeit der Brennweite  $f_2$  ergibt sich dann nach der Fehlerfortpflanzung zu  $u_{s,f_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial e} u_e\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial l} u_l\right)^2}$ .

Die durchgeführten Messungen lieferten die folgenden Ergebnisse:

Abstand G-S l / cm	Lage 1 b <sub>1</sub> / cm	Lage 2 b <sub>2</sub> / cm	Differenz e / cm	Brennweite f <sub>2</sub> / cm	Abweichung vom Mittelwert ( $\bar{f}_2 - f_2$ ) / cm
110	38,4	71,7	33,3	24,980	-0,032
115	36,4	78,4	42,0	24,915	0,032
120	35,2	84,6	49,4	24,916	0,031
125	34,5	90,5	56,0	24,978	-0,031
130	33,7	96,5	62,8	24,916	0,032
135	33,0	101,9	68,9	24,959	-0,012
140	32,5	107,4	74,9	24,982	-0,035
145	32,1	112,9	80,8	24,994	-0,046
150	31,6	118,5	86,9	24,914	0,033
155	31,3	123,9	92,6	24,920	0,028

$$\text{Mittelwert: } \bar{f}_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} f_{2,i} = 24,947\text{cm}$$

$$\text{Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (\bar{f}_2 - f_{2,i})^2} = 0,034\text{cm}$$

$$\text{Vertrauensbereich: } \bar{s} = \sqrt{\frac{1}{10}} s = 0,011\text{cm}$$

systematische Unsicherheit (Maximalwert bei l=155cm, e=92,6cm):

$$u_{s,f_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial e} u_e\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial l} u_l\right)^2} = 0,0695\text{cm}$$

$$\text{Gesamtunsicherheit: } u_{f_2} = \sqrt{\bar{s}^2 + u_{s,f_2}^2} = 0,0703\text{cm}$$

$$\text{Ergebnis: } f_2 = \bar{f}_2 \pm u_{f_2} = (24,95 \pm 0,07)\text{cm}$$

## 2.2) Bestimmung der Brennweite von Linse 3 mittels Sphärometer

Zur Bestimmung der Brennweite  $f_3$  von Linse 3 nach der Formel

$\frac{1}{f_3} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  ([2], Seite 19, Gleichung 1) benötigt man die beiden Krümmungsradien  $R_{1,2}$  sowie den Brechungsindex  $n$  des Linsenglases, dieser wurde am Versuchsplatz mit  $n=1,52$  angegeben, die Unsicherheit wird zu  $u_n=0,005$  abgeschätzt. Die Krümmungsradien der Linsen lassen sich nach dem Satz des Pythagoras aus den gemessenen Höhen  $h_{1,2}$  und dem Radius  $r$  der Sphärometerauflage bestimmen:  $R^2 = r^2 + (R - h)^2 \Rightarrow R = \frac{r^2+h^2}{2h}$ . Der Radius  $r$  wurde am Versuchsplatz mit  $r=15\text{mm}$  angegeben, die Unsicherheit wird zu  $u_r = 0,2\text{mm}$  abgeschätzt. Die systematische Unsicherheit der Höhenmessungen mit Sphärometer beträgt nach Quelle [3], Seite 17 (Bügelmessschraube)  $u_{s,h_i} = 0,005\text{mm} + h_i * 10^{-5}$ , der zweite Term ( $h_i * 10^{-5}$ ) ist dabei aufgrund der gemessenen Höhen im Bereich von 0,64mm bis 0,65mm vernachlässigbar. Bei den Messungen wurde jeweils sechsfach die gleiche Höhe gemessen, die zufällige Ungenauigkeit der Messungen wird zu einem halben Skalenteil  $u_{z,h_i} = 0,005\text{mm}$  abgeschätzt.

Für die Gesamtunsicherheit der Höhenmessungen folgt damit

$$u_{h_i} = \sqrt{u_{z,h_i}^2 + u_{s,h_i}^2} = 0,007\text{mm und für die Höhen folgt}$$

$h_1 = (0,65 \pm 0,007)\text{mm}$  und  $h_2 = (0,64 \pm 0,007)\text{mm}$ , da beide Höhen positiv

gezählt wurden handelt es sich also um eine Bikonvexlinse. Die Unsicherheit der

Radien ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung zu  $u_{R_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_i}{\partial h_i} u_{h_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_i}{\partial r} u_r\right)^2}$

und für die Krümmungsradien folgt  $R_1 = (173 \pm 5)\text{mm}$  und  $R_2 = (176 \pm 5)\text{mm}$ .

Nun lässt sich die Brennweite  $f_3$  bestimmen zu  $f_3 = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_1+R_2)} = 16,80\text{cm}$ .

Die Unsicherheit ergibt sich nach der Fehlerfortpflanzung zu

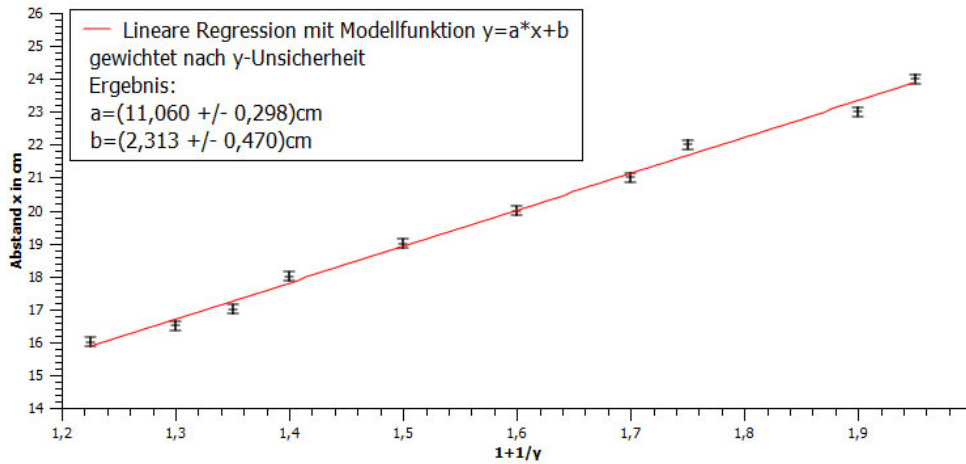
$$u_{f_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_3}{\partial n} u_n\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial R_1} u_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial R_2} u_{R_2}\right)^2} = 0,38\text{cm}.$$

Ergebnis:  $f_3 = (16,8 \pm 0,4)\text{cm}$

### 2.3) Bestimmung der Brennweite f, des Hauptebenenabstandes a und der Lage der Hauptebenen des Linsensystems nach der Methode nach Abbe

Das Linsensystem bestand aus Linse 2 und Linse 3, die im Abstand von  $d=6\text{cm}$  (als fehlerfrei angenommen) angeordnet waren. Die Ablesekante K der Messungen war die rechte Reiterkante der Linsenhalterung, was in etwa mit der Lage von Linse 3 übereinstimmt. Die Objektreihenfolge beim nicht gedrehten Linsensystem war also Gegenstand; Linse 2; Linse 3; Schirm. Nun wurde der Abstand  $x$  (Gegenstand zu Kante K) in Abhängigkeit von  $1 + \frac{1}{\gamma}$  bestimmt, wobei  $\gamma = \frac{B}{G}$  der Abbildungsmaßstab ist. Der Abbildungsmaßstab ergibt sich aus der Größe  $G$  des Gegenstandes (Längenskala) innerhalb zweier horizontaler Strichlinien im Abstand von  $(20,0 \pm 0,5)\text{mm}$  auf dem Schirm zu  $\gamma = \frac{20\text{mm}}{G}$ . Die Unsicherheit der Lage  $x$  ergibt sich aus der Unsicherheit der Lage des Gegenstandes ( $\Delta G = 0,5\text{mm}$ ), der Ablesegenauigkeit ( $\Delta A = 0,5\text{mm}$ ) und des Teilungsfehlers der Längenskala ( $\Delta L = 0,2\text{mm} + 10^{-3} * x$ ) und wird abgeschätzt zu  $u_x = \Delta G + \Delta A + \Delta L$  (Größtfehlerabschätzung). Nach der Bestimmung von  $x$  in Abhängigkeit von  $(1 + \frac{1}{\gamma})$  wurde das Linsensystem um  $180^\circ$  gedreht und völlig analog  $x'$  in Abhängigkeit von  $1 + \frac{1}{\gamma'}$  bestimmt.

Für die Lage  $x$  in Abhängigkeit von  $1 + \frac{1}{\gamma}$  ergibt sich mit QtiPlot folgende Darstellung:

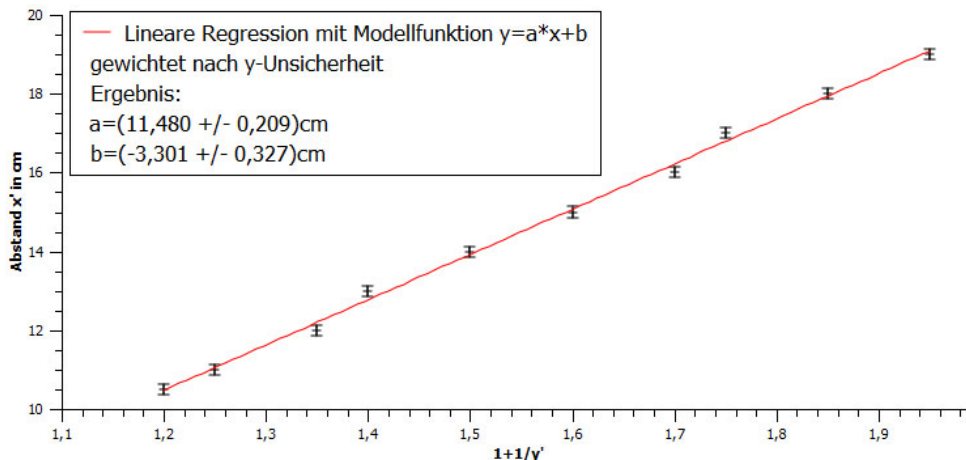


Abhängigkeit der Lage  $x$  von  $1 + \frac{1}{\gamma}$

Offensichtlich werden nicht alle Messwerte innerhalb ihrer Unsicherheit vom Regressionsgraphen erfasst, was durch die Vernachlässigung der Unsicherheiten der Abszissenwerte (Unsicherheit von  $1 + \frac{1}{\gamma}$ ) zu erklären ist. Nach Quelle [1], Seite 72, Gleichung 3, ist der Anstieg  $a$  der Geraden mit der Brennweite  $f$  des Systems und der Achsenabschnitt  $b$  der geraden mit dem Abstand  $c$  der gegenstandsseitigen Hauptebene zur Kante zu identifizieren, der in Richtung Gegenstand positiv gerechnet wird.

$$\Rightarrow f = (11,1 \pm 0,3) \text{ cm}; c = (2,3 \pm 0,5) \text{ cm}$$

Nach der Drehung des Linsensystems um  $180^\circ$  ergibt sich völlig analog  $x'$  in Abhängigkeit von  $1 + \frac{1}{\gamma'}$  mit QtiPlot:



Abhängigkeit der Lage  $x'$  von  $1 + \frac{1}{\gamma'}$

Auch beim um  $180^\circ$  gedrehten System liegen nicht alle Messwerte innerhalb ihrer Unsicherheit im Regressionsgraphen, die Abweichungen sind jedoch etwas geringer als beim nicht gedrehten System. Nach Quelle [1], Seite 72, Gleichung 4 lässt sich nun erneut der Anstieg  $a$  des Graphen mit der Brennweite  $f'$  des Systems und der Achsenabschnitt  $b$  mit dem Abstand  $c'$  zwischen Kante und bildseitiger Hauptebene identifizieren, welcher in Richtung Schirm positiv gerechnet wird.

$$\Rightarrow f' = (11,5 \pm 0,2) \text{cm}; c' = (-3,3 \pm 0,3) \text{cm}$$

Die Gegenstandsseitige Hauptebene liegt also in Bezug auf die Kante K beziehungsweise Linse 3  $(2,3 \pm 0,5) \text{cm}$  in Richtung Gegenstand und die bildseitige Hauptebene in Bezug auf K  $(3,3 \pm 0,3) \text{cm}$  in Richtung Gegenstand.

Der Hauptebenenabstand  $a$  beträgt nach [1], Seite 72, Gleichung 5  $a = c + c' = -0,988 \text{cm}$  mit der Unsicherheit  $u_a = \sqrt{u_c^2 + u_{c'}^2} = 0,572 \text{cm}$ .

$$\Rightarrow \text{Hauptebenenabstand: } a = (-1,0 \pm 0,6) \text{cm}$$

Das negative Vorzeichen deutet darauf hin, dass die gegenstandsseitige Hauptebene und die bildseitige Hauptebene vertauscht sind. Außerdem ist die Ungenauigkeit des Abstandes mit ca. 60% sehr groß, da die Unsicherheiten der einzelnen Hauptebenenlagen im Vergleich zum Abstand bereits sehr groß sind.

Die Brennweiten  $f$  und  $f'$  überschneiden sich innerhalb ihrer Messunsicherheiten, es wird gemäß [3], Seite 47 ein nach Messunsicherheiten gewichtetes Mittel

gebildet. Der Mittelwert ergibt sich dann zu  $\bar{f} = \frac{\frac{f}{u_f^2} + \frac{f'}{u_{f'}^2}}{\frac{1}{u_f^2} + \frac{1}{u_{f'}^2}} = 11,34 \text{cm}$  mit der

Unsicherheit  $u_{\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u_f^2} + \frac{1}{u_{f'}^2}}} = 0,17 \text{cm}$ .

$$\Rightarrow \text{Brennweite des Systems: } f = (11,3 \pm 0,2) \text{cm}$$





## 2.5) Vergleich der Ergebnisse der Methode nach Abbe mit den Ergebnissen der Konstruktion

physikalische Größe	Methode nach Abbe	Konstruktion
Brennweite $f$ / cm	$11,3 \pm 0,2$	$11,0 \pm 0,2$
Abstand $c$ / cm	$2,3 \pm 0,5$	$2,0 \pm 0,2$
Abstand $c'$ / cm	$-3,3 \pm 0,3$	$-2,6 \pm 0,2$
Hauptebenenabstand $a$ / cm	$-1,0 \pm 0,6$	$-0,6 \pm 0,2$

Bis auf den Abstand  $c'$  zwischen Linse 3 und der bildseitigen Hauptebene stimmen alle Werte innerhalb ihrer Messunsicherheit überein und zumindest liegen die Werte für  $c'$  in der selben Größenordnung, die Abweichung ist auf nicht berücksichtigte Messunsicherheiten bei der Methode nach Abbe und Ungenauigkeiten bei der Konstruktion zurückzuführen.

### 3) Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Die erzielten Resultate entsprechen weitgehend den Erwartungen, die im ersten Versuchsteil bestimmten Brennweiten der Einzellinsen liefern im Zusammenhang mit der graphischen Konstruktion in 2.4) das gleiche Ergebnis für die Brennweite des Linsensystems wie die Methode nach Abbe in 2.3), grobe Messfehler sind daher unwahrscheinlich. Auffällig ist, dass die Besselmethode zur Brennweitenbestimmung in 2.1) zu einer deutlich kleineren Unsicherheit der Brennweite ( $u \approx 0,28\%$ ) führt als die Ausmessung mit dem Sphärometer ( $u \approx 2,4\%$ ) in 2.2). Unter der Voraussetzung, dass nicht berücksichtigte systematische Messabweichungen bei der Brennweitenbestimmung mit der Besselmethode verhältnismäßig gering sind, könnte man daher, da es sich bei Linse 3 ebenfalls um eine Sammellinse handelt und die Bedingung  $l \gg 4f$  auf der optischen Bank problemlos auch erfüllt werden kann, die Genauigkeit der Brennweite  $f_3$  deutlich erhöhen, indem man sie ebenfalls mit der Besselmethode bestimmt. Trotzdem haben aber mathematisch nicht beachtete Messabweichungen vor allem bei der Besselmethode und der Methode nach Abbe das Ergebnis beeinflusst. Zum einen ist das „Scharfempfinden“ des Bildes auf dem Schirm sehr subjektiv, wodurch es einen Spielraum für die Lage des Schirmes gab, unter dem man das Bild als scharf empfinden kann, diese Ungenauigkeit ist jedoch auch zum Teil zufällig und damit durch viele Messungen verringerbar. Weiterhin war nicht gewährleistet, dass Schirmebene und Linsenebene(n) perfekt parallel waren, da die Versuchsjustierung nur nach Augenmaß erfolgte. Bei der Methode nach Abbe wurde außerdem die Ungenauigkeit des Abbildungsmaßstabes  $\gamma$  vernachlässigt, doch sowohl Gegenstands-, als auch Bildgröße [ $B=(20,0 \pm 0,5)\text{mm}$ ] auf dem Schirm waren fehlerbehaftet, was die Abweichung der Messwerte vom Regressionsgraphen erklärt.

Für eine lineare Regression mit Gewichtung nach Unsicherheiten der Ordinatenwerte wird jedoch vorausgesetzt, dass die Fehler der Abszissenwerte, also in dem Fall des Abbildungsmaßstabes, vernachlässigt werden können. Bei der Konstruktion des Strahlenverlaufes im Linsensystem in 2.4) mit Millimeterpapier und Bleistift sind ebenfalls Ungenauigkeiten aufgrund der Liniendicke und Linienrichtungen (z.B. keine perfekte Parallelverschiebung) aufgetreten und die Unsicherheiten der Einzelbrennweiten wurden bei der Konstruktion ebenfalls nicht berücksichtigt, aufgrund der guten Übereinstimmung der Konstruktionsergebnisse mit den Ergebnissen der Methode nach Abbe scheinen sich diese Effekte jedoch in Grenzen zu halten.

#### **4) Quellenangabe (Stand: 22.11.2008)**

- [1] Skript "Phys. Grundpraktikum: Elektrodynamik und Optik", 2005, online verfügbar unter [http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik und Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik und Optik.pdf](http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf)
- [2] Skript "Einführungspraktikum", 2007, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Einfuehrungspraktikum/PDF-Dateien/Einfuehrungspraktikum.pdf>
- [3] Skript "Phys. Grundpraktikum: Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik", 2007, online verfügbar unter <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Einfuehrung/PDF-Datei/Einfuehrung.pdf>