

Institut für Physik - Humboldt-Universität zu Berlin

Physikalisches Grundpraktikum II

O10-Linsensysteme

S. Zimmer, Matr.Nr.: 507363; F. Noeske, Matr.Nr.: 507508
Betreuer: Dr. rer. nat. Preppernau; Versuchsort: NEW 14'2,212; Platz 3
(Dated: 26. Juni 2006)

Optische Geräte bestehen in den wenigsten Fällen aus nur einer Linse, bzw. nur aus einer sehr geringen Anzahl an Elementen. Handelt es sich um Dünne Linsen, so kann man Berechnungen hier sehr einfach durchführen. Ziel des vorliegenden Versuches ist die Untersuchung eines komplexen Linsensystems bestehend aus zwei unterschiedlichen Linsen. Im weiteren Verlauf wird sich zeigen, dass die Berechnung charakteristischer Größen hier nicht mehr so leicht möglich ist und man sich mit der Modellvorstellung der **Hauptebenen** behelfen muss.

Physikalische Grundlagen

Zunächst sei auf die sehr ausführliche Darstellung in [1], ab S. 70 hingewiesen. Dort findet man eine sehr ausführliche Darstellung zu den physikalischen Hintergründen und der Durchführung. Der Versuch gliedert sich in mehrere Bestandteile:

- Bestimmung Brennweiten von Linse 2 durch die sog. Bessel-Methode
- Bestimmung der Brennweite von Linse 3 mittels eines Sphärometers
- Hauptebenenkonstruktion durch die gegebenen Werte
- Bestimmung des Hauptebenenabstands und der -brennweite nach Abbe und Vergleich mit den Ergebnissen aus der Konstruktion

Zu den im folgenden angegebenen Formeln werden zusätzlich die bekannten Formeln und Zusammenhänge der Fehlerrechnung und -statistik genutzt. Es wird ausschließlich eine Fehlerfortpflanzung unkorrelierter Größen vorgenommen. Da bei allen Messungen eine ausreichende Zahl der Messwerte vorhanden ist, ist eine statistische Betrachtung der zufälligen Fehler nach den Grundlagen der Fehlerstatistik möglich.

Verwendete Gleichungen

Wie bereits eingangs erwähnt wurde, kann man den Strahlengang durch eine Dünne Linse leicht durch die Gleichungen der geometrischen Optik bestimmen. Bei einem Linsensystem ist dies nicht mehr möglich. Anstelle der Einzelbetrachtung der Linsen verwendet man daher das Modell der **Hauptebenen**:

Dabei wird die mehrfache Brechung an den Einzelinsen auf eine Einfachbrechung an den Hauptebenen reduziert. Dieses Modell geht davon aus,

dass man jedes beliebige Linsensystem auf zwei Hauptebenen reduzieren kann. An diesen Ebenen geschieht dann die Brechung nach den Gesetzen der geometrischen Optik. Der gegenstandsseitige Parallelstrahl trifft zunächst auf die gegenstandsseitige Hauptebene (H). Dort findet nach der Definition der Hauptebenen eine Parallelverschiebung entlang der optischen Achse auf die bildseitige Hauptebene statt. Dort findet die Brechung statt. Aus dem gegenstandsseitigen Parallelstrahl wird der bildseitige Brennpunktstrahl. Aus dem gegenstandsseitigen Brennpunktstrahl wird nach Auftreffen auf die gegenstandsseitige Hauptebene mit anschließender Parallelverschiebung entlang der optischen Achse hin zur bildseitigen Hauptebene (H') zum bildseitigen Parallelstrahl. Der Mittelpunktstrahl wird nach den Gesetzen der geometrischen Optik nicht gebrochen. Aus den Gesetzen der geometrischen Optik folgt nun die **Abbildungs-gleichung**:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

Dabei sind f Brennweite, b Bildweite und g Gegenstandsweite eines Objektes von einer Linse. Um die Hauptebenen zu konstruieren (Aufgabe 3), benötigt man die Brennweiten der beiden verwendeten Linsen. Dies soll auf zwei Wege geschehen: a) durch die sog. Bessel-Methode und b) durch die Bestimmung der Krümmungsradien und anschließende Bestimmung von f .

Die Methode nach Bessel geht davon aus, dass bei der Brechung an einer Sammellinse auf einer Länge $l = 4f$ zwei reelle Bilder entstehen. Bestimmt man nun die Bildweiten, so erhält man bei einem gewählten Abstand l vom Schirm für die Brennweite der Linse folgende Beziehung.

$$f = \frac{l^2 - (b_1 - b_2)^2}{4l}. \quad (2)$$

Hierbei sind b_1 und b_2 jeweils die Bildweiten,

bei denen ein reelles Bild entsteht und l ist der Abstand vom Schirm zum Gegenstand.

Die Brennweitenbestimmung mithilfe des Sphärometers gelingt anhand der Krümmungsradien der Linse (Vorder- und Rückseite). Für dünne Linsen gilt näherungsweise:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (3)$$

n ist dabei der Brechungsindex des Mediums und R_1 sowie R_2 sind die beiden Krümmungsradien der Linse. Aus einfachen geometrischen Überlegungen kann man den Krümmungsradius nun mit einem Sphärometer bestimmen, bei dem man die Höhendifferenz von einem gewissen Niveau aus misst. Für den Krümmungsradius R_i (i bezeichnet hierbei Vorder- bzw. Rückseite, bzw. 1 und 2) gilt dann:

$$R_i = \frac{r^2}{2h_i} + \frac{h_i}{2} \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Die Bestimmung der Hauptebenen ist nun durch die Konstruktion des Strahlenganges möglich.

Die Hauptebenenbestimmung ist nach Abbe aber auch experimentell auf einem anderen Weg möglich: Aus der obigen Abbildungsgleichung ergibt sich mit $\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ die Beziehung:

$$g = \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (5)$$

Die Lage der Hauptebene ist nicht bekannt. Aus

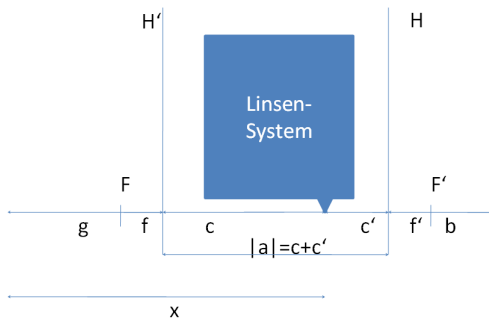


Abbildung 1: Schematische Darstellung für die Methode nach Abbe zur Bestimmung der Lage der Hauptebenen.

Abbildung 1 wird aber ersichtlich, dass $x = g + c$ ist. Aus diesem Zusammenhang ergibt sich mit obiger Gleichung:

$$x = f \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) + c. \quad (6)$$

Aus der grafischen Zusammenhang $x - \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) f$ kann man c bestimmen. Dreht man die Anordnung um

180° , so ergibt sich:

$$x' = f \left(1 + \frac{1}{\gamma'} \right) + c'. \quad (7)$$

Aus der grafischen Darstellung erhält man schließlich c' . Der Hauptebenenabstand ist dann gegeben durch:

$$|a| = c + c'. \quad (8)$$

Auswertung

Alle Einzelmessungen sowie deren Messunsicherheiten sind ausführlich in Anhang A dargestellt. Um die Übersichtlichkeit zu fördern, verzichte ich auf eine explizite Wiederholung der Daten, die im Anhang nachlesbar sind und beschränke mich auf die Endergebnisse. Nach der Bessel-Methode ergibt sich für **Linse 2** als Brennweite:

$$f_2 = \underline{\underline{(11.29 \pm 0.04)cm}}. \quad (9)$$

Für die Krümmungsradien ergeben sich nahezu identische Werte von

$$R_1 = (205.9 \pm 1.9)mm \quad (\text{Vorderseite}) \quad (10)$$

$$R_2 = (205.6 \pm 1.9)mm \quad (\text{Rückseite}) \quad (11)$$

Damit ergibt sich für Linse 3 mit $n = 1.53$ eine Brennweite von:

$$f_3 = \underline{\underline{(194.11 \pm 0.01)mm}}. \quad (12)$$

Der Abstand der beiden Linsen wurde mit 6 cm als fehlerfrei angegeben. Zur Konstruktion der Hauptebenen gelangt man nun wie folgt:

Zuerst wird die Position der beiden Linsen auf der optischen Achse konstruiert, sowie die beiden Brennpunkte der Linsen. Der gegenstandsseitige Parallelstrahl wird an Linse 2 gebrochen und wird zum bildseitigen Brennpunktstrahl von Linse 2. Bevor dieser jedoch auf den Brennpunkt trifft, kommt es zu einer weiteren Brechung an Linse 3. Den an Linse 3 gebrochenen Strahl erhält man nun durch Parallelverschiebung des Mittelpunktstrahls durch Linse 3 parallel zur optischen Achse. Dort, wo sich die bildseitige Brennpunktebene und der Mittelpunktstrahl von Linse 3 treffen ist der Auftreffpunkt des bilseitigen Brennpunktstrahls von Linse 3. Verlängert man diesen Strahl so existiert ein Schnittpunkt zwischen diesem und dem gegenstandsseitigen Parallelstrahl. Dieser Schnittpunkt markiert die Position der bildseitigen Hauptebene. Dort, wo der verlängerte Quasi-Brennpunktstrahl von Linse 3 die optische Achse schneidet, befindet

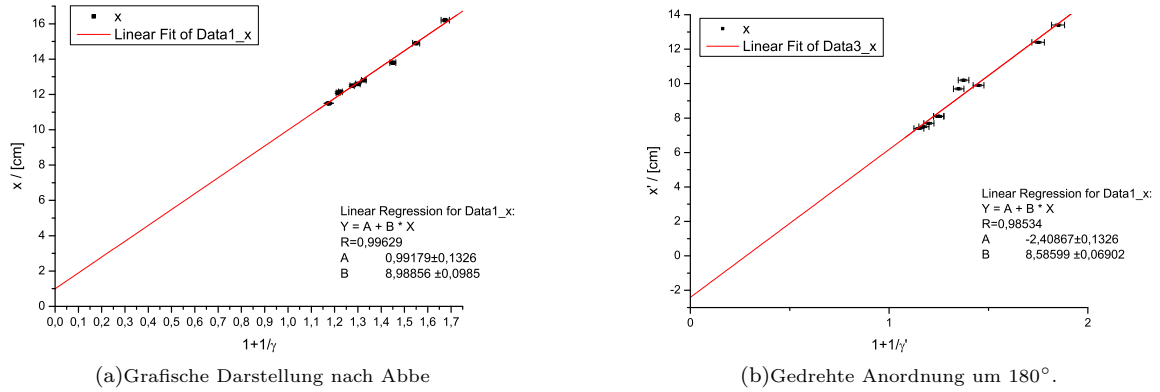


Abbildung 2: Darstellung des Abstandes in Abhängigkeit vom Reziprok des Abbildungsmaßstabs plus eins.

sich der bildseitige Hauptebenenbrennpunkt. Analog geht man zur Bestimmung der gegenstandsseitigen Hauptebene vor: Der bildseitige Parallelstrahl wird an Linse 3 gebrochen und trifft auf Linse 2. Die Parallelverschiebung des Mittelpunktstrahls durch Linse 2 parallel zur optischen Achse geschnitten mit der gegenstandsseitigen Brennpunktebene von Linse 2 stellt den Schnittpunkt dar, durch den der gegenstandsseitige Brennpunktstrahl von Linse 2 hindurchläuft. Verlängerung liefert den Schnittpunkt mit dem bildseitigen Parallelstrahl und somit die Position der gegenstandsseitigen Hauptebene. Der Schnittpunkt des verlängerten Strahls mit der optischen Achse ist der gegenstandsseitige Hauptebenenbrennpunkt. Die Konstruktion anhand dieser Beschreibung findet sich in Abbildung 1 im Anhang B. Aus der Konstruktion werden folgende Daten der Hauptebenen entnommen:

$$|a| = (1.4 \pm 0.1) \text{ cm} \quad (13)$$

$$f = (8.7 \pm 0.1) \text{ cm} \quad (14)$$

$$f' = (8.7 \pm 0.1) \text{ cm}. \quad (15)$$

Der Vergleich mit Abbe geschieht durch grafische Darstellung (Abbildung [2]) und anschließenden Geradenausgleich zur Bestimmung von c bzw. c' und f bzw. f' . Der Geradenausgleich liefert:

$$c = (-2.4087 \pm 0.1326) \text{ cm} \quad (16)$$

$$c' = (0.9918 \pm 0.1326) \text{ cm} \quad (17)$$

$$\Rightarrow |a| = (1.4169 \pm 0.1326) \text{ cm} \quad (18)$$

$$f = (8.9886 \pm 0.0985) \text{ cm} \quad (19)$$

$$f' = (8.5859 \pm 0.06902) \text{ cm}. \quad (20)$$

Vergleicht man diese Werte mit denen aus der Konstruktion, so stellt man eine überraschend hohe Übereinstimmung der Messergebnisse beider Methoden fest.

Fehlerbetrachtung und kritische Ergebniseinschätzung

Die hohe Übereinstimmung beider Messergebnisse verwundert, da man von der Methode nach Abbe eine höhere Unsicherheit erwartet hätte. Diese ist nämlich aufgrund der Tatsache, dass es eine Ermessensfrage ist, wann ein Bild scharf ist, eine sehr ungenaue Methode. Die Konstruktion hingegen ist wesentlich genauer. Die Fehler der Konstruktion könnten noch kleiner gewählt werden, sofern man die Konstruktion nicht von Hand zeichnet oder wenn man den Maßstab noch stärker erhöhen würde. Letztere Methode lässt sich theoretisch beliebig gestalten, wobei man relativ schnell an den Grenzen der Darstellbarkeit ankommen würde. Der Bestimmung der Brennweiten liegen jedoch noch unberücksichtigte Fehler zugrunde. Der Abstand r der "Beine" des Sphärometers ist als fehlerfrei angenommen ebenso wie der Brechungsindex und die Ausgangsposition der Lichtquelle sowie der Abstand der beiden Linsen im Linsensystem. Würde man diese, in der Realität vorhandenen Fehler berücksichtigen, so würde der Fehler der Brennweiten größer werden. Es sei aber dahingestellt, ob man die Abweichung, die sich in diesem Fall für die Brennweiten ergäben, real sichtbar machen kann. Dies ist vermutlich auch nur mit einem (wesentlich) höheren Maßstab möglich.

[1] Grundpraktikum II, Optik und Elektrodynamik, Humboldt-Universität 2005

Anhang A: O10-Linsensysteme-Datenanalyse

VP: 3	S.Zimmer 507363
Datum: 22.06.2006	F.Noeske 507508

1.) Brennweiten von Linse 2 mittels Bessel-Methode

$\pm u_L$	0,05 cm
-----------	---------

Abstand beider Linsen im LS:	6cm
------------------------------	-----

l(cm)	ul	b1(cm)	ub1	b2(cm)	ub2	f (cm)	f_for
140	0,05	12,3	0,05	127,5	0,05	11,30171	0,0292324
135	0,05	12,3	0,05	122,5	0,05	11,26104	0,029011026
130	0,05	12,4	0,05	117,5	0,05	11,25767	0,028746749
125	0,05	12,5	0,05	112,7	0,05	11,16992	0,028514363
120	0,05	12,6	0,05	107,3	0,05	11,31648	0,028099657
115	0,05	12,7	0,05	102	0,05	11,41415	0,02767904
110	0,05	12,7	0,05	96,8	0,05	11,42543	0,027282291
105	0,05	12,8	0,05	92	0,05	11,31514	0,026939512
100	0,05	13	0,05	87,1	0,05	11,27298	0,026497566
95	0,05	13,1	0,05	82,2	0,05	11,18471	0,026046213

f	11,2919	±	0,02643 cm
f	11,2919	±	0,03836 cm
f_rund	11,29	±	0,04 cm
f (1:2)	5,645	±	0,02 cm

2.) Brennweiten von Linse 3 mittels Sphärometer

n=	1,53	r=	15 mm	$\pm u_H$ =	0,005 mm
----	------	----	-------	-------------	----------

Vorderseite	
h(mm)	$\pm u_h$ (mm)
0,545	0,00507
0,55	0,00507
0,55	0,00507
0,545	0,00507
0,545	0,00507
0,545	0,00507
0,545	0,00507
0,55	0,00507
0,545	0,00507
0,55	0,00507
0,545	0,00507

Rückseite	
h(mm)	$\pm u_h$ (mm)
0,55	0,005066228
0,55	0,005066228
0,545	0,005066228
0,545	0,005066228
0,545	0,005066228
0,545	0,005066228
0,55	0,005066228
0,55	0,005066228
0,545	0,005066228
0,55	0,005066228
0,55	0,005066228

h1	0,547	0,00507	mm
R1	205,941	1,90232	mm

h2	0,548	0,005066228	mm
R2	205,566	1,895379187	mm

f=	194,107	±	0,01231 mm
f_rund	194,11	±	0,01 mm
f_rund	19,411	±	0,001 cm
f (1:2)	9,7055	±	0,0005 cm

3.) Methode nach Abbe

B=	20	±	0,5 mm
----	----	---	--------

x(cm)	±ux	l(cm)	±ul	G(mm)	±uG	γ	1+1/γ	±u_1+1/γ
14,9	0,05	36,7	0,05	11	0,5	1,818182	1,55	0,028531781
12,5	0,05	50,4	0,05	5,5	0,5	3,636364	1,275	0,025928086
11,5	0,05	68,8	0,05	3,5	0,5	5,714286	1,175	0,025379926
16,2	0,05	34,4	0,05	13,5	0,5	1,481481	1,675	0,030162321
12,8	0,05	45,5	0,05	6,5	0,5	3,076923	1,325	0,026287176
12,15	0,05	54,3	0,05	4,5	0,5	4,444444	1,225	0,025625
12,6	0,05	46,8	0,05	6	0,5	3,333333	1,3	0,026100766
12,1	0,05	57,3	0,05	4,3	0,5	4,651163	1,215	0,025571285
13,8	0,05	39,8	0,05	9	0,5	2,222222	1,45	0,02741464
11,5	0,05	68,6	0,05	3,5	0,5	5,714286	1,175	0,025379926

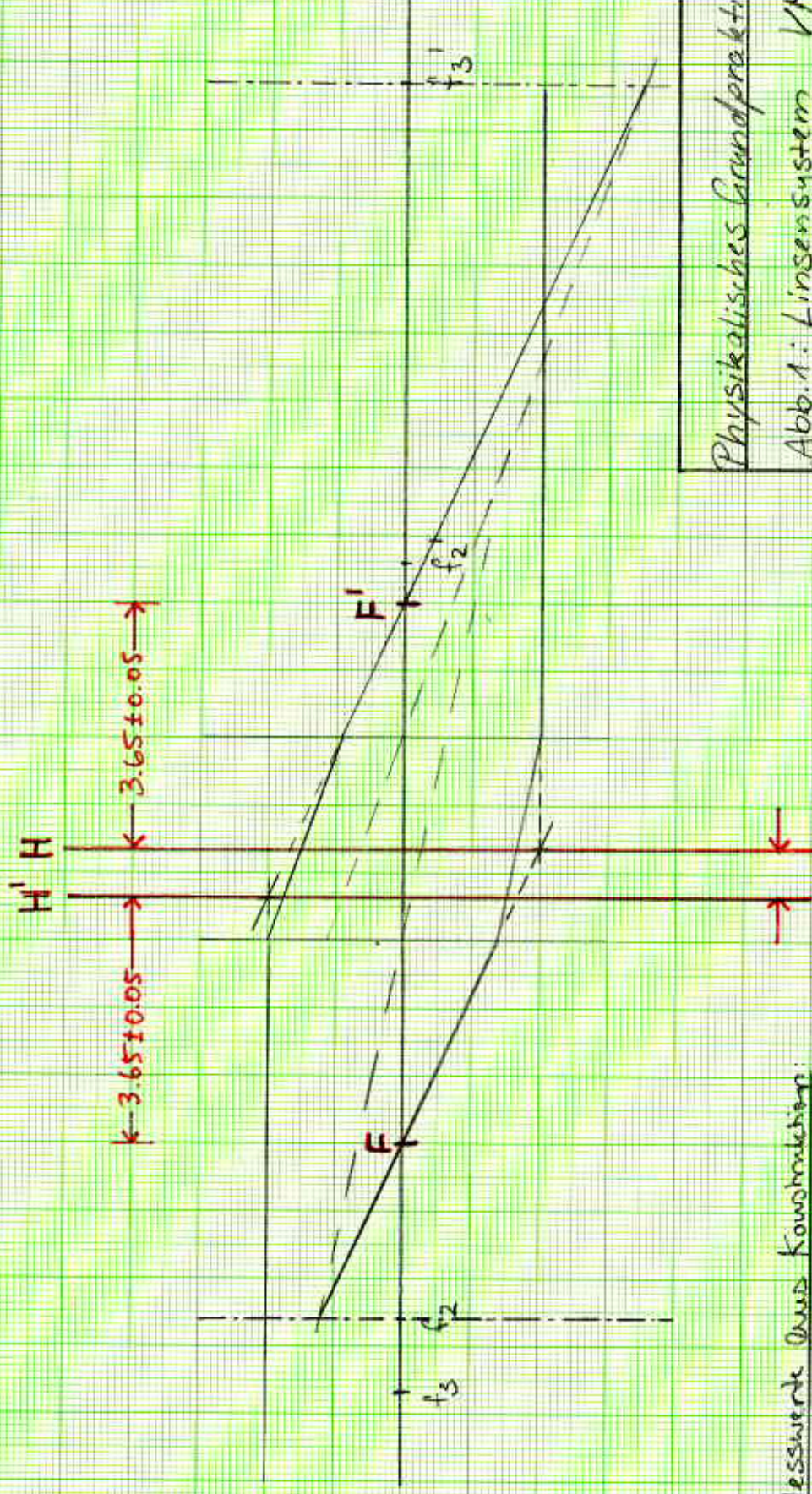
x'(cm)	±ux	l(cm)	±ul	G(mm)	±uG	γ'	1+1/γ'	±u_1+1/γ'
7,5	0,05	68,6	0,05	3,5	0,5	5,714286	1,175	0,025379926
8,1	0,05	52,5	0,05	5	0,5	4	1,25	0,02576941
10,2	0,05	43,2	0,05	7,5	0,5	2,666667	1,375	0,026700012
8,1	0,05	52,5	0,05	5	0,5	4	1,25	0,02576941
9,7	0,05	40,1	0,05	7	0,5	2,857143	1,35	0,026487025
7,7	0,05	59,7	0,05	4	0,5	5	1,2	0,025495098
12,4	0,05	54,2	0,05	15	0,5	1,333333	1,75	0,03125
9,9	0,05	39,2	0,05	9	0,5	2,222222	1,45	0,02741464
13,4	0,05	33,5	0,05	17	0,5	1,176471	1,85	0,032811012
7,4	0,05	74,4	0,05	3	0,5	6,666667	1,15	0,025279686

c	-2,4087	±	0,1326 cm
c'	0,99179	±	0,1326 cm

a =	1,41688	±	0,1326 cm
a (1:2)	0,70844	±	0,0663 cm

f	8,98856	±	0,0985 cm
f'	8,58599	±	0,06902 cm

Anhang B: 010 - Linsensystem



Messwerte aus Konstruieren:

$$|a| = 0.7 \pm 0.05 \text{ cm} \hat{=} 1.4 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$f = (3.65 + 0.7) \pm 0.05 \text{ cm} \hat{=} 8.7 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$f' = (3.65 + 0.7) \pm 0.05 \text{ cm} \hat{=} 8.7 \pm 0.1 \text{ cm}$$

Physikalisches Grundpraktikum II

Abb. 1: Linsensystem VP 3

Datum: 24.06.2006

Maßstab: Stephan Timmer

1:2 507363

Felix Noerke 507508 VP 3
 Stephan Fimmel 507363

1.) Brennweite von Linse 2 mittels Bessel-Methode

l (cm)	b_1 (cm)	b_2 (cm)	$u_2 = 0.05$ cm
140.0	12.3	127.5	
135.0	12.3	122.5	
130.0	12.4	117.5	
125.0	12.5	112.7	
120.0	12.6	107.3	
115.0	12.7	102.0	
110.0	12.7	96.8	
105.0	12.8	92.0	
100.0	13.0	87.1	
95.0	13.1	82.2	

2.) Brennweite von Linse 3 mittels Sphärometer

$n = 1.53$ $r = 15$ mm $u_h = 0.005$ mm
 → binovex!
VS (Vorderseih):

h (mm)	0.545	0.550	0.550	0.545	0.545
h (mm)	0.545	0.550	0.545	0.550	0.545

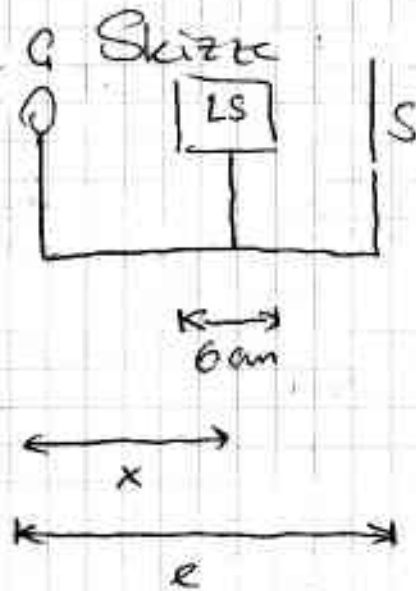
RS (Rückseih):

h (mm)	0.550	0.550	0.545	0.545	0.545
h (mm)	0.550	0.550	0.545	0.550	0.550

3.) Methode nach Abbe

Abstand l_2-l_3 : 6 cm

x (cm)	l (cm)	q (mm)	B (mm)
10.7	106.8	2	20
10.5	165.5	1	20
10.9	102.3	2	20
10.5	33.8	24	20
10.6	155.1	1.1	20
14.9	36.7	11	20



$$B = 20 \text{ mm}$$

Nennweite siehe S. 3

Geräte und Hilfsmittel:

Sphärenmeter ($u_H = \pm 0.005 \text{ mm}$)

Bandmaß und Schiebere ($u_L = \pm 0.05 \text{ cm}$)

2 Linien, Schirm, Lampe, Reiter System

belichtete Skala ($1 \text{ ST} \hat{=} 1 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$)

Schirm mit 2 Linien ($s = 2 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$)

für Kennlinie gezeichnet

X (cm)	l (cm)	G (mm)
14.9	36.7	11
12.5	50.4	5.5
11.5	68.8	3.5
16.2	34.4	13.5
12.8	45.5	6.5
12.15	54.3	4.5
12.6	46.8	6
12.1	57.3	4.3
13.8	39.8	9
11.5	68.6	3.5

X' (cm)	l' (cm)	G' (mm)
7.5	68.6	5.5
8.1	52.5	5
10.2	43.2	7.5
8.1	52.5	5
9.7	40.1	7
7.7	59.7	4
12.4	54.2	15
9.9	39.2	9
13.4	33.5	17
7.4	74.4	3



22.06.06
P.