Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik – Physikalisches Grundpraktikum

Versuchsprotokoll

Linsensysteme (O10)
Arbeitsplatz 3

durchgeführt am **27.10.2009**
mit Versuchspartner **Andreas Koher**

Protokoll von **Sebastian Milster**

I. Einleitung

In diesem Versuch soll von einem Linsensystem, das aus zwei Einzellinsen besteht, mit der Methode nach Abbe die Lage der Hauptebenen und die Brennweite bestimmt werden. Um diese Methode vergleichen zu können, soll zusätzlich mit Hilfe der einzelnen Brennweiten und dem Abstand zwischen den Linsen die Brennweite und die Lage der Hauptebenen konstruiert werden

Deshalb werden zunächst mithilfe der Besselmethode (Linse 2) und mithilfe eines Sphärometers (Linse 3) die Einzelbrennweiten bestimmt.

Die physikalischen Grundlagen, Versuchsaufbau und die Durchführung befinden sich im Skript "Elektrodynamik und Optik" ab Seite 70.

II. Brennweitenbestimmung

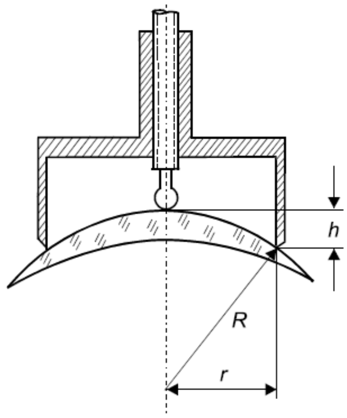
1. Bestimmung der Brennweite mithilfe eines Sphärometers

Um die Brennweite zu bestimmen, benötigt man die beiden Krümmungsradien R_1 und R_2, sowie den Brechungsindex n des Linsenmaterials. Es gilt:

$$\frac{1}{f_3}=\left(\frac{n-n_{Luft}}{n_{Luft}}\right)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f_3}=(n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

Wobei n_{Luft} mit 1 genähert wird und für die Linse $n=1{,}53$ angegeben ist. n wird als fehlerfrei betrachtet.

Die Krümmungsradien können mithilfe der gemessenen Höhe h und dem Radius r des Sphärometerauflage berechnet werden.



Das Sphärometer hat einen systematischen Fehler von $u_h=0{,}005\,mm+h\cdot 10^{(-5)}$, wobei der zweite Summand vernachlässigbar klein ist für Höhen in der Größenordnung $h\approx 0{,}5\,mm$.

Der Radius der Auflagepunkte ist mit $r=1{,}50\,cm$ angegeben und sein Fehler wird auf $u_r=0{,}02\,cm$ abgeschätzt.

Mithilfe des Satzes des Pythagoras lässt sich der Radius wie folgt berechnen:

$$R^2=r^2+(R-h)^2 \quad \Rightarrow \quad R=\frac{r^2+h^2}{2h}$$

Der systematische Fehler für R:

$$u_R=\sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial r}\cdot u_r\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial h}\cdot u_h\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad u_R=\sqrt{\left(\frac{r}{h}\cdot u_r\right)^2+\left(\frac{h^2-r^2}{2h^2}\cdot u_h\right)^2}$$

Messergebnisse für h_1 und h_2 und daraus berechnete Werte:

h_1	R_1	u_{R_1}	h_2	R_2	u_{R_2}
in mm					
0,554	203,3	5,72	0,551	204,4	5,75
0,554	203,3	5,72	0,552	204,1	5,74
0,550	204,8	5,76	0,550	204,8	5,76
0,553	203,7	5,73	0,550	204,8	5,76
0,547	205,9	5,80	0,550	204,8	5,76
0,550	204,8	5,76	0,550	204,8	5,76

Mittelwerte:

$\overline{R}_1=204{,}3\,mm$ $\qquad$ $\overline{R}_2=204{,}6\,mm$

Standardabweichung:

$s_1=1{,}04\,mm$ $\qquad$ $s_2=0{,}31\,mm$

Zufälliger Fehler:

$\varepsilon_{z,1}=0{,}424\,mm$ $\qquad$ $\varepsilon_{z,2}=0{,}126\,mm$

Der Gesamtfehler $\nu_i = u_R + \varepsilon_{z,i}$ ergibt sich aus Addition des systematischen mit dem zufälligen Fehler. Der systematische Fehler wird für beide Radien mit $u_R = 5{,}8\,mm$ (aus Tabelle) abgeschätzt.

$$\nu_1 = 6{,}2\,mm \qquad \nu_2 = 5{,}9\,mm$$
$$R_1 = (20{,}4 \pm 0{,}6)\,cm \qquad R_2 = (20{,}5 \pm 0{,}6)\,cm$$

$$\nu_R = \nu_1 = \nu_2 = 0{,}6$$

Stellen wir (1) nach f_3 um, so erhalten wir:

$$f_3 = \frac{1}{(n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \overline{f}_3 = 19{,}29\,cm$$

Für den Fehler bedeutet das:

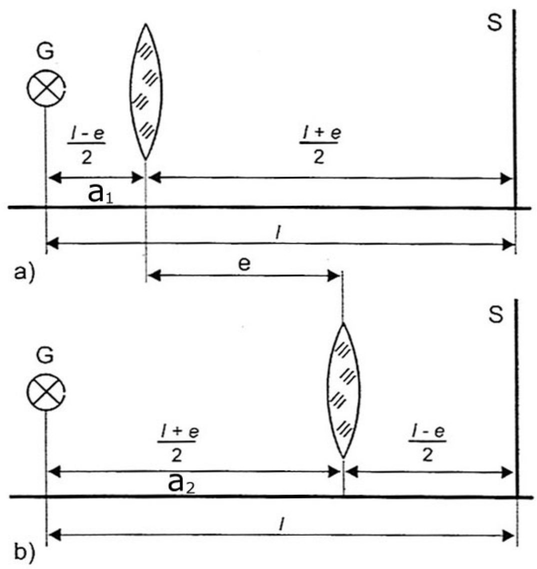
$$u_{f_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_3}{\partial R_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial R_2}\right)^2} \cdot \nu_R \quad \Rightarrow \quad u_{f_3} = \sqrt{\frac{R_1^4 + R_2^4}{(n-1)^2 \cdot (R_1 + R_2)^4}} \cdot \nu_R \quad \Rightarrow \quad u_{f_3} = 0{,}400\,cm$$

<u>Brennweite der Linse 3:</u>

$$\underline{f_3 = (19{,}3 \pm 0{,}4)\,cm}$$

2. Bestimmung der Brennweite nach der Methode von Bessel

Bei dieser Methode wird der Schirm bei verschiedenen Entfernungen l zum Gegenstand fest positioniert und die Linse oder die Linsenkombination verschoben. Wenn $l > 4 \cdot f$, dann erhält man zwei scharfe Bilder für zwei verschiedene Abstände a_1, a_2 der Linse zur Quelle. Für einzelne Linsen ist $a = g$. Anschließend wird die Differenz $e = a_2 - a_1$ gebildet. Mit e und l lässt sich nun die Brennweite berechnen:



$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l}$$

Fehlerrechnung:

Für die Messgrößen l, a_1, a_2 wurden folgende Abschätzungen für die Messungenauigkeiten festgelegt:

l:

Die Ungenauigkeit für einen Büromessstab ($\pm 0{,}2\,mm$) wurde an die Ableseungenauigkeit ($\pm 0{,}5\,mm$) und die Ungewissheit über die tatsächlichen Orte von Gegenstand und Schirm ($\pm 0{,}5\,mm$) angepasst.

$$u_l = \sqrt{0{,}2^2+3\cdot 0{,}5^2}+10^{-3}\cdot l = 0{,}89\,mm+10^{-3}\cdot l \approx 0{,}1\,cm+10^{-3}\cdot l$$

a_1, a_2:

Für diese Messgrößen spielen Schirm und Gegenstand keine Rolle. Jedoch gibt es Einflüsse, die es notwendig machen den Fehler anzupassen.
Die Kante, die zum Ablesen gewählt wurde, war leicht abgerundet. Das Stativ, auf dem die Linse entlang des Messstabes verschoben werden konnte, kippelte etwas. So wurde Position der Linse leicht verändert. Zusätzlich war die Position für ein scharfes Bild von der subjektiven Einschätzung abhängig und kann die Lage beeinflusst haben. Abschätzung: $u_a = 0{,}1\,cm+10^{-3}\cdot l$

Die Fehler für e und f_2 erhält man durch gewöhnliche Fehlerfortpflanzung:

e:

$$e = a_2 - a_1; \quad a_1 \text{ und } a_2 \text{ sind linear} \quad \Rightarrow \quad u_e = \sqrt{u_{a_1}^2 + u_{a_2}^2}$$

f_2:

$$f_2 = \frac{l^2-e^2}{4l} = \frac{l}{4} - \frac{e^2}{4l} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{s,f} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial l}\cdot u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial e}\cdot u_e\right)^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{e^2}{4l^2}\right)\cdot u_l\right)^2 + \left(\frac{e}{2l}\cdot u_e\right)^2}$$

Messergebnisse und daraus berechnete Werte:

l	u_l	a_1	u_{a_1}	a_2	u_{a_2}	e	u_e	f_2	$\varepsilon_{s,f}$
in cm									
160,0	0,187	11,7	0,112	147,9	0,248	136,2	0,272	11,01	0,141
150,0	0,177	11,8	0,112	137,6	0,238	125,8	0,263	11,12	0,133
140,0	0,168	11,9	0,112	127,5	0,228	115,6	0,254	11,14	0,126
130,0	0,158	12,2	0,112	117,4	0,217	105,2	0,245	11,22	0,119
120,0	0,149	12,3	0,112	107,3	0,207	95,0	0,236	11,20	0,111
110,0	0,139	12,4	0,112	97,3	0,197	84,9	0,227	11,12	0,104
100,0	0,130	12,5	0,113	86,9	0,187	74,4	0,218	11,16	0,096
90,0	0,121	12,8	0,113	76,6	0,177	63,8	0,210	11,19	0,087
80,0	0,112	13,1	0,113	66,1	0,166	53,0	0,201	11,22	0,078

Mittelwert:
$\bar{f}_2 = 11{,}15\,cm$

Standardabweichung:
$s = 0{,}065\,cm$

Zufälliger Fehler:
$\varepsilon_z = 0{,}022\,cm$

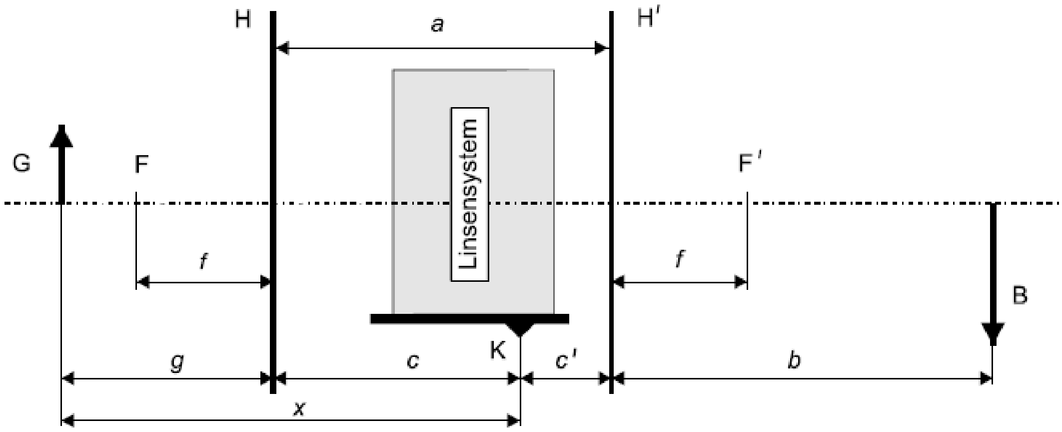
Für ε_s wählen wir den größten Wert aus der Tabelle. $\varepsilon_s = 0{,}141\,cm$

$$u_{f_2} = \varepsilon_s + \varepsilon_z = 0{,}163\,cm$$

Brennweite der Linse 2:

$$\underline{f_2 = (11{,}2 \pm 0{,}2)\,cm}$$

III. Bestimmung der Brennweite und des Hauptebenenabstand für das Linsensystem nach Abbe



Bei dieser Durchführung wurden Linse 2 und Linse 3 im Abstand von $d=6cm$ am Stativ befestigt. Zunächst wurde eine beliebiger Abstand x vom Gegenstand bis zur selbstdefinierten Ablesemarke K auswählt. Das Bild wurde durch verschieben des Schirmes scharf gestellt und die Vergrößerung $\gamma=B/G=b/g$ ermittelt. Da die Lage der Hauptebenen jedoch noch unbekannt war, können wir nur mit B/G die Vergrößerung bestimmen. Auf dem Schirm sind zwei parallele Linien im vertikalen Abstand von $B=2cm$ eingezeichnet worden. Die Gegenstandsgröße konnte nun mittels der Skala, die auf den Schirm projiziert wurde, einfach abgelesen werden. Diese Skala war der Gegenstand selbst.

Nach dieser Prozedur drehten wir das Linsensystem um 180° und ließen die Position des Schirms unverändert. Nun wurde durch Verschieben des Stativs das scharfe Bild gesucht. Der Abstand x' vom Gegenstand bis zur selben Marke K sowie die neue Gegenstandsgröße G' wurden ermittelt.

Als nächstes wählten wir ein beliebiges x' und wiederholten den gesamten Vorgang, bis wir für zehn verschiedene Abstände l zwischen Gegenstand und Schirm, die dazugehörigen Werte x, G, x', G' erhielten.

In der Tabelle (siehe unten) ist jede Zeile genau einem Wert von l zugeordnet. Gut zu erkennen ist, das dabei die Vergrößerung γ unabhängig von der Reihenfolge der Linsen ist. Dies ist eine wichtige Voraussetzung um einem Linsensystem genau <u>eine</u> Brennweite zuordnen zu können und Hauptebenen zu definieren, sodass die Gleichung $\frac{1}{f}=\frac{1}{g}+\frac{a}{b}$ ihre Anwendbarkeit nicht verliert.

Aus $\frac{1}{f}=\frac{1}{g}+\frac{a}{b}$ und $\gamma=\frac{B}{G}=\frac{b}{g}$ erhält man folgende Beziehung für g:

$$g=f\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)$$

In der Skizze erkennt man, dass $x=g+c$ und nach Umdrehen der Anordnung $x'=g+c'$ gilt.

Wir legen die Funktion $x=x(1+1/\gamma)=f\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)+c$ fest.
Über das Verfahren der linearen Regression können wir für diese Funktion den Anstieg f (gesuchte Brennweite des Linsensystems!) und den Achsenschnittpunkt c berechnen lassen.

Des weiteren gilt für Hauptebenenabstand a: $|a|=|c+c'|$

Fehlerrechnung:

B:
Der Fehler für den Abstand der parallelen Linien wird auf $u_B=0{,}05\,cm$

G:
Da der Gegenstand eine Millimeterskala hat, wollen wir die Ungenauigkeit für einen Büromessstab verwenden: $u_G=0{,}02\,cm$

x, x':
Wie in Aufgabe II.2 für $a_{1,} a_2$ erläutert, gilt auch für x und x':

$$u_x=0{,}1\,cm+10^{-3}\cdot l$$

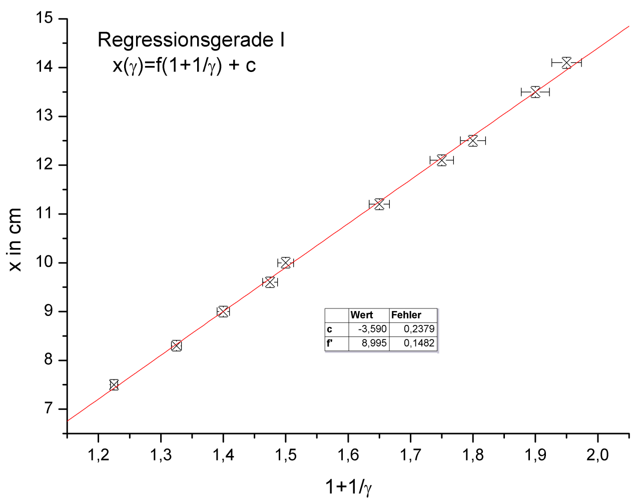
$(1+1/\gamma)$:
Die Fehlerfortpflanzung liefert:

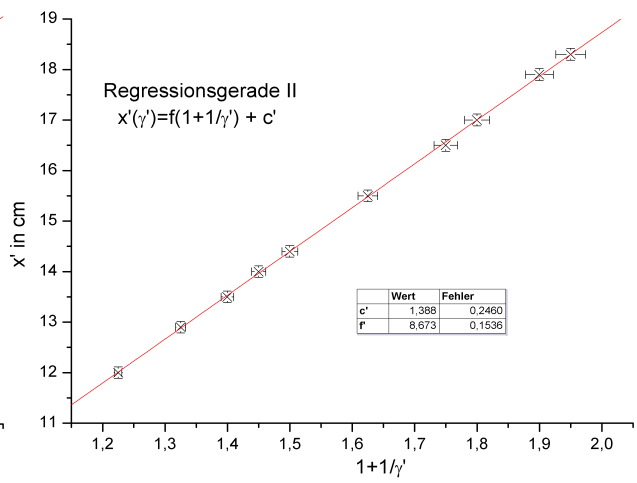
$$\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)=\left(1+\frac{G}{B}\right) \qquad \Rightarrow \qquad u_{1+1/\gamma}=\frac{\sqrt{G^2 u_B^2+B^2 u_G^2}}{B^2}$$

Messergebnisse und daraus berechnete Werte:

x	u_x	G	γ	$1+1/\gamma$	$u_{1+1/\gamma}$	x'	$u_{x'}$	G'	γ'	$1+1/\gamma'$	$u_{1+1/\gamma'}$
in cm						in cm					
7,5	0,108	0,45	4,44	1,225	0,011	12,0	0,112	0,45	4,44	1,225	0,011
8,3	0,108	0,65	3,08	1,325	0,013	12,9	0,113	0,65	3,08	1,325	0,013
9,0	0,109	0,80	2,50	1,400	0,014	13,5	0,114	0,80	2,50	1,400	0,014
9,6	0,110	0,95	2,11	1,475	0,016	14,0	0,114	0,90	2,22	1,450	0,015
10,0	0,110	1,00	2,00	1,500	0,016	14,4	0,114	1,00	2,00	1,500	0,016
11,2	0,111	1,30	1,54	1,650	0,019	15,5	0,116	1,25	1,60	1,625	0,019
12,1	0,112	1,50	1,33	1,750	0,021	16,5	0,117	1,50	1,33	1,750	0,021
12,5	0,113	1,60	1,25	1,800	0,022	17,0	0,117	1,60	1,25	1,800	0,022
13,5	0,114	1,80	1,11	1,900	0,025	17,9	0,118	1,80	1,11	1,900	0,025
14,1	0,114	1,90	1,05	1,950	0,026	18,3	0,118	1,90	1,05	1,950	0,026

Regressionsgerade:





Ergebnis der Regression:

Brennweite

$f=(9{,}00\pm0{,}15)\,cm$ $\qquad$ $f'=(8{,}67\pm0{,}15)\,cm$

Mittelwert: $\overline{f_s}=8{,}84\,cm$

Systematischer Fehler: $u_{f'}=u_f=0{,}15\,cm$

$$f_s=\frac{1}{2}(f+f');\qquad \varepsilon_s=\sqrt{\left(\frac{\partial f_s}{\partial f}\cdot u_f\right)^2+\left(\frac{\partial f_s}{\partial f'}\cdot u_{f'}\right)^2}=\sqrt{\frac{2u_f^2}{4}}=\frac{u_f}{\sqrt{2}};\qquad \varepsilon_s\approx0{,}106\,cm$$

Zufälliger Fehler:

Standardabweichung: $s=0{,}233\,cm$

Stichprobenumfang $n=2$

Student-Faktor: $t_s=t_s(n);\qquad t_s(n=2)=1{,}84$

(t_s für statistische Sicherheit von $68{,}3\,\%$)

$$\varepsilon_z=t_s\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\varepsilon_z=0{,}303\,cm$$

$$v=\varepsilon_s+\varepsilon_s=0{,}409\,cm$$

Endergebnis:

$$\underline{f_s=(8{,}8\pm0{,}4)\,cm}$$

Hauptebenenabstand

$c = (-3{,}59 \pm 0{,}24)\,cm$ $\quad\quad c' = (1{,}39 \pm 0{,}25)\,cm$

$|a| = |c + c'|;\quad u_a = \sqrt{u_c^2 + u_{c'}^2};\quad |a| = 2{,}2\,cm;\quad u_a = 0{,}35\,cm$

Endergebnis:

$$\underline{|a| = (2{,}2 \pm 0{,}4)\,cm}$$

a ist tatsächlich negativ. Das bedeutet, dass die Hauptebenen in ihrer Reihenfolge vertauscht sind.

IV. Hauptebenenkonstruktion

Die Konstruktion befindet sich im Anhang:

<u>Ergebnisse der Konstruktion:</u>

$$a = 1{,}4\,cm;\quad f = 8{,}2\,cm;\quad f' = 8{,}3\,cm$$

Mittelwert für die Brennweite: $\overline{f_s} = 8{,}25\,cm$
Standardabweichung: $s_f = 0{,}071\,cm$
Zufälliger Fehler: $\varepsilon_z = 0{,}09\,cm \approx 0{,}1\,cm$

Das Abschätzen des systematischen Fehlers für die Ergebnisse der Konstruktion erweist sich als sehr schwierig.
Zum einen fließt offensichtlich am Ende der Konstruktion die Ableseungenauigkeit von $0{,}05\,cm$ für jeden Punkt ein der abgemessenen Strecken. Das allein ergibt einen Fehler von ca. $0{,}07\,cm$ für jede gemessene Strecke auf der Zeichnung, das ist ein Fehler von $0{,}14\,cm$ für die tatsächliche Entfernung.

Während der Konstruktion orientiert man sich stets an den selbstgesetzten Punkten. Verbindungslinien können nicht exakt gezeichnet werden, da der Strich des Bleistifts selbst ca. $0{,}5\,mm$ beträgt. Es gibt also eine gewisses Toleranzintervall für jede Linie, bei der sie anscheinend durch den Punkt verläuft. Für besonders lange Linien kann es zu erheblichen Abweichungen führen.

Aus diesen Gründen ist es möglich, dass der systematische Fehler weit über dem des zufälligen liegt.

Die quantitative Fehlerbetrachtung soll aus den genannten Gründen ausgelassen werden. Die Ergebnisse der Konstruktion können als wage Vergleichsgrößen dienen.

V. Zusammenfassung

In diesem Versuch ist es uns gelungen, für ein Linsensystem mit zwei Linsen die Brennweite und den Hauptebenenabstand zu bestimmen. Bei der Bestimmung der Einzelbrennweiten erwiesen sich beide Methoden für unsere Linsen als gleichwertig genau: $u_{Bessel} \approx 2\%$; $u_{Sphärometer} \approx 2\%$
Das Aufnehmen der Messwerte mit dem Sphärometer erfolgt schneller als bei der Methode nach Bessel. Der Vorteil an Bessels Methode ist, dass man kein Präzisionsmessgerät benötigt und der Brechungsindex nicht in die Rechnung eingeht. Außerdem kann man die Besselmethode auch für nicht-sphärische Linsen verwenden.

$$\underline{f_{2,\text{Bessel}} = (11{,}2 \pm 0{,}2)\,cm} \qquad \underline{f_{3,Sphärometer} = (19{,}3 \pm 0{,}4)\,cm}$$

Die Mittelwerte wurden in der Konstruktion (IV.) verwendet. Dabei sind folgende Werte ermittelt worden:

$$\overline{f_s} = 8{,}25\,cm; \qquad a = 1{,}4\,cm$$

Die Brennweite f_s und der Hauptebenenabstand a des Linsensystems wurden zusätzlich mit der Methode nach Abbe bestimmt:

$$\underline{f_s = (8{,}8 \pm 0{,}4)\,cm} \qquad \underline{|a| = (2{,}2 \pm 0{,}4)\,cm}$$

Auch wenn die Ungenauigkeiten der Konstruktion schwer abzuschätzen sind, sind die Ergebnisse aus III. und IV. miteinander vergleichbar. Sie unterscheiden sich nicht grundsätzlich.

Die Systembrennweite kann zusätzlich zu III. und IV. mit den Werten aus II. und der folgenden Formel bestimmt werden:

$$\frac{1}{f_s} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{d}{f_2 \cdot f_3}; \qquad f_s = (8{,}8 \pm 0{,}1)\,cm$$

Dies ist der Wert, der bei der Konstruktion als Ergebnis hätte auftreten sollen. Gründe für die Abweichungen wurden bereits in IV. beschrieben. Sehr erfreulich ist es jedoch, dass die Methode von Abbe den selben Wert bestimmte. Dadurch wirkt sie sehr geeignet um ziemlich genau und relativ schnell die Brennweite und den Hauptebenenabstand eines Linsensystems zu berechnen, ohne dass man irgendwas über das zu untersuchende System wissen muss. Wenn man an den Brennweiten der einzelnen Linsen nicht interessiert ist, sollte man auf jeden Fall die Methode nach Abbe zur Bestimmung der Systembrennweite verwenden.

Sebastian Milster 529 125

31.10.2009

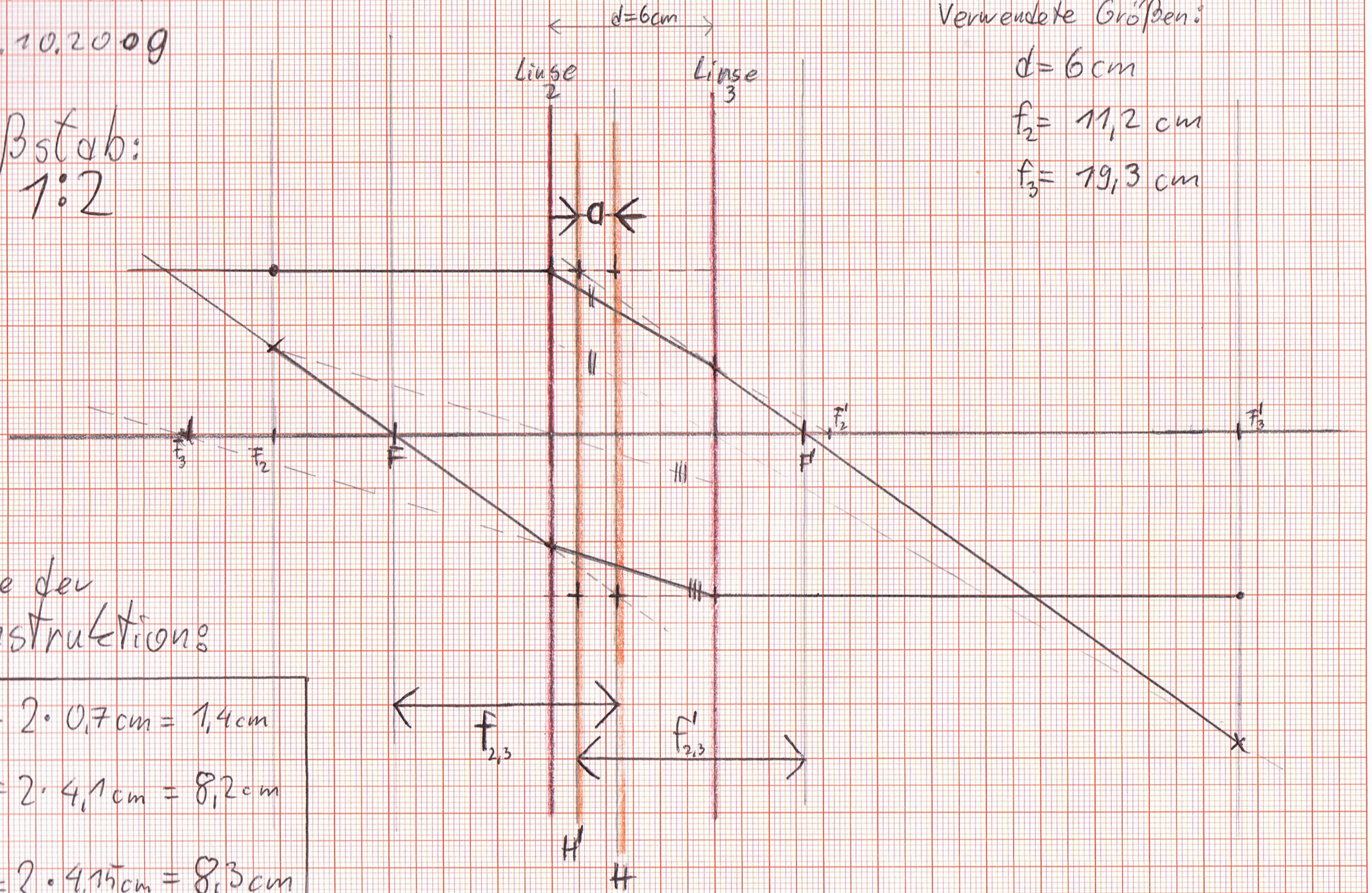
Maßstab:
1:2

Verwendete Größen:

$d = 6\,cm$

$f_2 = 11{,}2\,cm$

$f_3 = 19{,}3\,cm$



Ergebnisse der Konstruktion:

$a = 2 \cdot 0{,}7\,cm = 1{,}4\,cm$

$f_{2,3} = 2 \cdot 4{,}1\,cm = 8{,}2\,cm$

$f_{2,3}' = 2 \cdot 4{,}15\,cm = 8{,}3\,cm$