

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Fakultät I**

Institut für Physik

Physikalisches Grundpraktikum I



Versuchsprotokoll

Versuch **O10**: Linsensysteme
Arbeitsplatz Nr. 1

0. Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

2. Messwerte und Fehlerberechnung

2.1. Brennweitenbestimmung nach der Besselmethode

2.2. Brennweitenbestimmung mittels Sphärometer

2.3. Bestimmung der Brennweite und des Hauptebenenabstands nach Abbe

3. Diskussion

4. Quellen

5. Anhang

1. Einleitung

Ziel dieses Versuches soll es sein, das Modell der Hauptebenen für ein bestehendes Linsensystem zu überprüfen.

Hierfür wurden zunächst die Brennweiten einer einzelnen Linse mit der Besselmethode bestimmt. Die Brennweite einer zweiten Linse konnte berechnet werden aus dem Krümmungsradius der Linse, welcher mit einem Sphärometer gemessen wurde.

Nun konnte die Gesamtbrennweite des Systems, sowie der Hauptebenenabstand aus einer grafischen Konstruktion heraus bestimmt werden.

Diese Werte sollten nun nach Abbe ebenfalls experimentell bestimmt werden

Detaillierte Durchführung, Skizzen, Hinweise und Herleitungen sind dem Skript "Physikalisches Grundpraktikum – Elektrodynamik und Optik 2005" zum Versuch O10 auf den Seiten 70 – 73 entnehmbar.

2. Messwerte und Fehlerberechnung

2.1. Brennweitenbestimmung nach der Besselmethode

Bei der Besselmethode nutzt man die Tatsache, dass für einen Schirmabstand l , der mindestens viermal so groß ist wie die Brennweite f der benutzten Linse, bei genau zwei Positionen der Linse eine scharfe Abbildung zustande kommt.

Für die Brennweite gilt dabei:

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l}$$

Beziehungsweise:

$$e = \sqrt{l^2 - 4f \cdot l}$$

Wobei e der Abstand der beiden Linsenpositionen zueinander ist.

Somit lässt sich bei Messung des Abstandes e in Abhängigkeit vom Abstand Gegenstand-Schirm die Brennweite bestimmen.

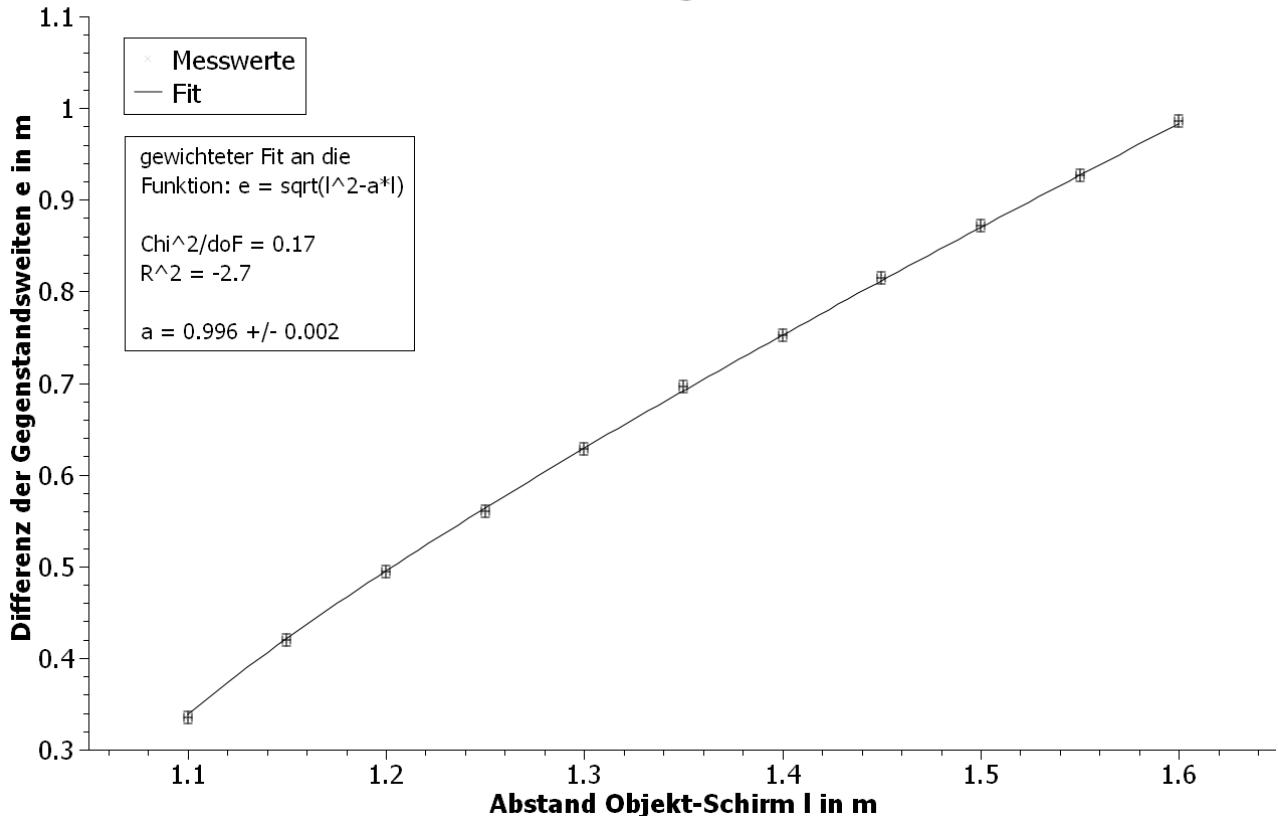
Hierbei wurden l und e mit einer auf der optischen Bank fest montierten Skala gemessen, wobei für l ein Fehler von $u_l = 0.2 \text{ cm}$ angenommen wurde.

Für die einzelnen Gegenstandsweiten e_1 und e_2 wurde ein Fehler angenommen von $u_{e_1} = 0.6 \text{ cm}$ und $u_{e_2} = 0.3 \text{ cm}$, da bei beiden Positionen verschiedene Toleranzen festgestellt wurden, bei denen ein scharfes Bild zustande gekommen ist.

Dies ergibt bei pythagoräischer Addition der Einzelfehler der Positionen einen Fehler für die Differenz e von $u_e = 0.7 \text{ cm}$.

Die Messwerte für Linse 2 ergeben folgende grafische Darstellung:

Brennweitenbestimmung nach Bessel für Linse 2



Somit folgt für die Brennweite der Linse 2:

$$f_2 = \frac{1}{4} a = (24.90 \pm 0.05) \text{ cm}$$

Der Fehler der Brennweite berechnet sich dabei nach der Formel:

$$u_f = \frac{\partial f}{\partial a} \cdot u_a = \frac{1}{4} \cdot 0.002 \text{ m} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

2.2. Brennweitenbestimmung mittels Sphärometer

Für die Brennweitenbestimmung mit der Linsenschleiferformel wurden zunächst mit einem Sphärometer die Krümmungsradien der zwei Linsenflächen bestimmt.

Hierfür wurde die Erhebung h der Linse von der Auflage des Sphärometers gemessen. Mit bekanntem Radius $r = 15 \text{ mm}$ der Auflagefläche, lässt sich nach dem Satz des Pythagoras der Krümmungsradius R nach folgender Formel berechnen:

$$R^2 = r^2 + (R - h)^2$$

Beziehungsweise:

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$$

Für die gemessene Höhe wird dabei ein systematischer Fehler von $u_{s_h} = 5 \mu m$ angenommen und es wurde eine Nullstellung des Sphärometers von $h_0 = (-4 \pm 5) \mu m$ gemessen.

Es wurden folgende Messwerte aufgenommen:

	Höhe der Vorderseite von Linse 3 in mm	Höhe der Rückseite von Linse 3 in mm
1.	0.635	0.634
2.	0.632	0.631
3.	0.631	0.630
4.	0.639	0.632
5.	0.633	0.631
6.	0.632	0.631
Mittelwert h	0.634	0.632
Standardabweichung	0.00294392	0.0013784
Zufälliger Fehler	0.0012	0.00056
Gesamtfehler u_h	0.005	0.005
Korrigierte Höhe h'	0.638	0.636
Fehler $u_{h'}$	0.007	0.007

Somit ist der vordere Krümmungsradien der Linse 3:

$$R_1 = (0.177 \pm 0.002) m$$

Der Fehler berechnet sich nach der Formel:

$$u_{R_1} = \frac{\partial R_1}{\partial h'} \cdot u_{h'} = \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2h'^2} \right) \cdot u_{h'} = -1.9 \cdot 10^{-3} m$$

Analog berechnet sich der hintere Krümmungsradius zu:

$$R_2 = (0.177 \pm 0.002) m$$

Nach der Linsenschleiferformel gilt mit einem Brechungsindex von $n = 1.52$ für die Brennweite der Linse:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (5.88 \pm 0.05) \frac{1}{m}$$

Mit einem Brechungsindex folgt somit für Linse 3:

$$f_3 = (17.0 \pm 0.1) cm$$

Wobei sich der Fehler berechnet nach:

$$u_{1/f} = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial R_1} \cdot u_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial R_2} \cdot u_{R_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{n-1}{R_1^2} \cdot u_{R_1}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{R_2^2} \cdot u_{R_2}\right)^2} = 0.0469 m$$

$$u_f = \frac{u_{1/f}}{\left(\frac{1}{f}\right)^2} = 0.0014 m$$

2.3. Bestimmung der Brennweite und des Hauptebenenabstands nach Abbe

Für die Methode nach Abbe wurden Linse 2 und 3 im Abstand von $d = 12 cm$ voneinander, zwischen Objekt und Schirm positioniert und Linse 2 wurde als Markierung für die folgenden Messungen gewählt.

Nach Abbe gilt für die Position x , welche den Abstand zwischen Gegenstand und selbst gewählter Markierung darstellt, die Gleichung:

$$x = g + c$$

Wobei c der Abstand der Markierung zur gegenstandsseitigen Hauptebene ist und g die Gegenstandsweite, für die durch den Abbildungsmaßstab $\gamma = \frac{b}{g} = \frac{B}{G}$ und die

Abbildungsgleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ gilt:

$$g = f \left(1 + \frac{g}{b}\right) = f \left(1 + \frac{G}{B}\right) = f \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$$

Während Bild- und Gegenstandsweite sich nicht messen lassen, wenn die Hauptebenen unbekannt sind, lässt sich die Vergrößerung sehr leicht bestimmen.

So war in diesem Experiment der Gegenstand eine Zentimeterskala auf der am Schirm eine fest vorgegebene Strecke von $B = (20 \pm 0.5) mm$ vermessen werden konnte. Die abgelesene Entfernung entspricht dann gerade der Gegenstandsgröße G .

Bei einer Messung der Abhängigkeit der Position x von der Vergrößerung γ nach der Formel

$$x = f \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + c$$

müsste sich durch lineare Regression somit die Brennweite bestimmen lassen.

Dreht man anschließend das Linsensystem um 180° und führt die gleiche Messung noch einmal mit der selben Markierung durch, so erhält man nun die Brennweite f' und den Abstand c' zwischen der Markierung und der vormals bildseitigen Hauptebene.

$$x' = f' \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + c'$$

Nun gilt für den Abstand a der beiden Hauptebenen gerade:

$$a = c + c'$$

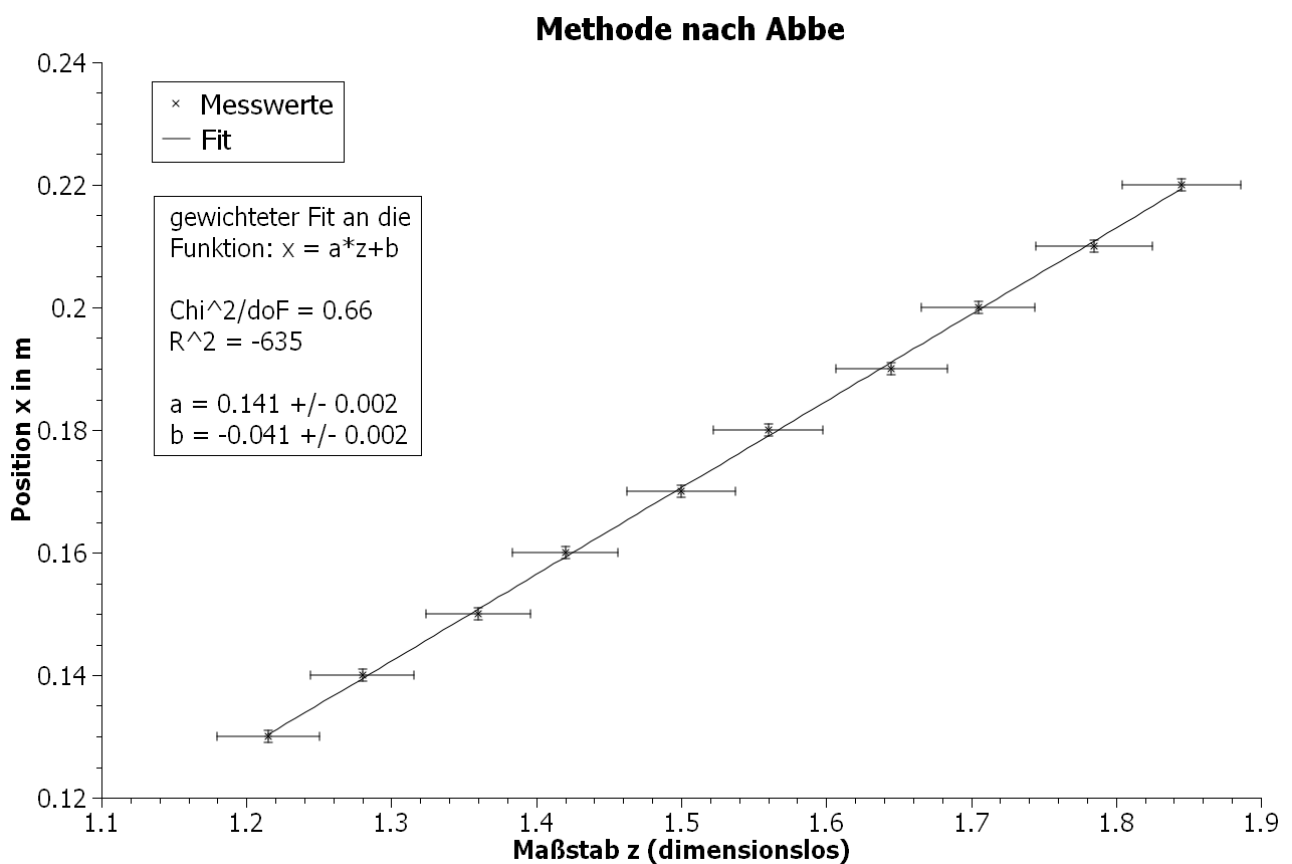
Hierbei wurde die Position x mit einem Fehler von $u_x = 1 \text{ mm}$ und die Positionen h_1 und h_2 mit einem Fehler von $u_{h_1} = u_{h_2} = 0.5 \text{ mm}$ gemessen.

Dies ergibt einen Fehler für die Differenz der Positionen und somit für die Gegenstandsgröße von $u_h = u_G = 0.7 \text{ mm}$.

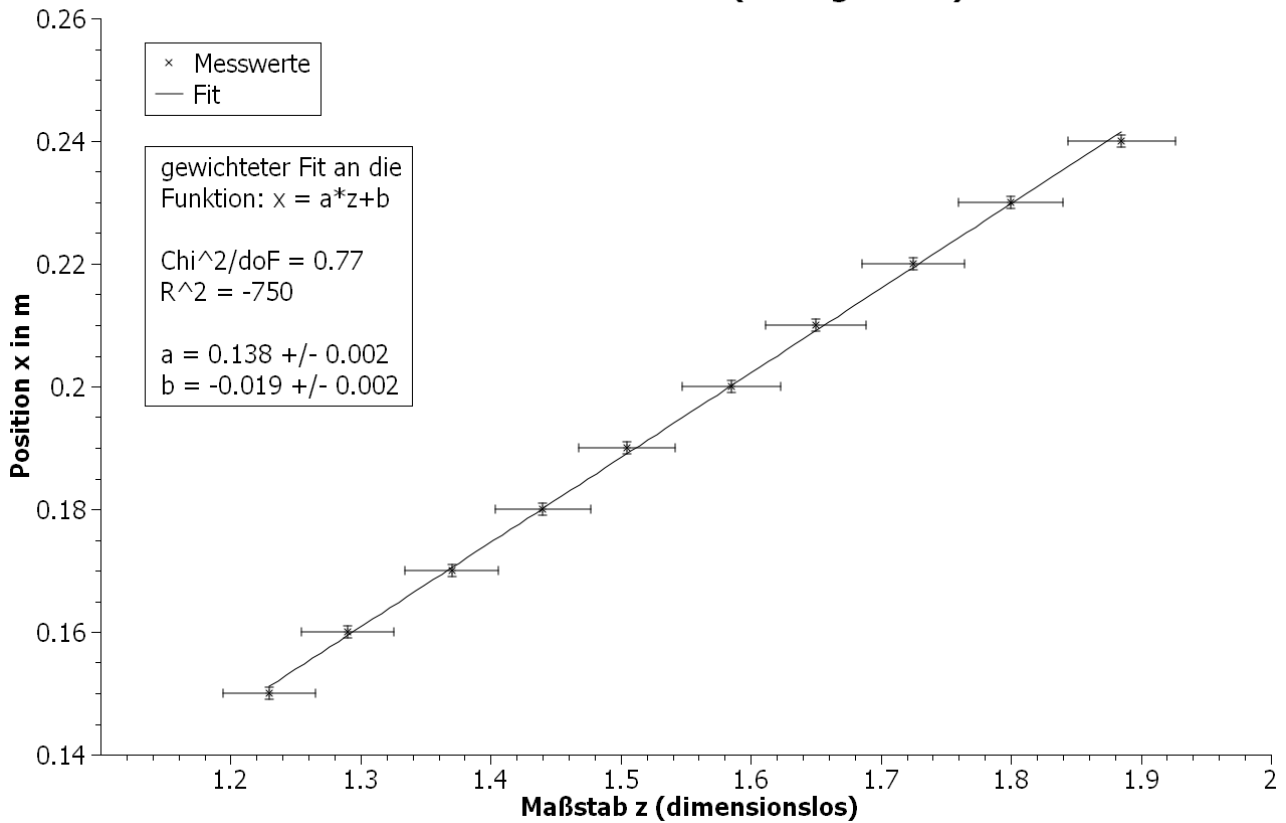
Mit

$$z = 1 + \frac{1}{y} = 1 + \frac{G}{B}$$

lassen sich die Messwerte folgendermaßen darstellen:



Methode nach Abbe (180° gedreht)



Somit ergeben sich für die Brennweiten und den Hauptebenenabstand:

$$a = (-6 \pm 0.3) \text{ cm}$$

$$f_1 = (14.1 \pm 0.2) \text{ cm}$$

$$f_2 = (13.8 \pm 0.2) \text{ cm}$$

Da sich die beiden Brennweiten in ihren Fehlertoleranzen überschneiden, ist es möglich, ein gewichtetes Mittel anzugeben:

$$f = (14.0 \pm 0.2) \text{ cm}$$

Da der Hauptebenenabstand negativ ist, sind die Hauptebenen vertauscht und die objektseitige Hauptebene liegt näher am Bild, als die bildseitige Hauptebene

3. Diskussion

Die Werte die wir im Zuge dieses Experimentes einmal durch die Methode nach Abbe und durch die grafische Konstruktion erhalten haben stimmen in ihren Toleranzen überein, was dafür spricht, dass auf beiden wegen relativ exakte und vergleichbare Werte erzielt wurden.

Dabei ist die Methode nach Abbe schneller und genauer, obwohl dabei eine subjektive Entscheidung über die Schärfe des Bildes getroffen werden muss, was an sich schon zu einer zufälligen Ungenauigkeit führt. Jedoch kann dies kompensiert werden, indem mehr Wertepaare in die lineare Regression einbezogen werden.

Gleichzeitig ist die Konstruktion ungenauer, da hier stets der Nachteil vorherrscht, dass per Hand gezeichnet werden muss und anschließend abgelesen werden muss. Schon beim Zeichnen längerer gerader Linien kann es zu Abweichungen um einige Grad kommen, oder allein die endliche Ausdehnung der Linie verfälscht das Endresultat.

Außerdem wird eine grafische Konstruktion für Linsensysteme mit mehr als 2 Linsen äußerst komplex und unübersichtlich, weshalb sie dafür eher ungeeignet ist. Stattdessen ist ein solches Linsensystem völlig unproblematisch für die Methode nach Abbe.

Dasselbe gilt für die Brennweitenbestimmung einer einzelnen Linse mittels der Besselmethode und der Messung mit einem Sphärometer.

So ist die Messung der Krümmungsradien und die Berechnung der Brennweite daraus zwar schneller, jedoch funktioniert dies nur bei einer Linse, während man mit der Besselmethode auch die Brennweite von Linsensysteme erhalten kann.

Beide Verfahren lieferten in unserem Fall jedoch ziemlich kleine relative Fehler von nur 0.2% (Bessel) und 0.6% (Sphärometer). Was dafür spricht, dass beide gleichwertig genau sind.

Zur Verbesserung des Versuchsaufbaus lässt sich sagen, dass sich die Messung der Position des Stativs auf der optischen Bank mit einer eindeutigen Markierung sehr vereinfachen und genauer gestalten lassen würde.

Des weiteren fiel besonders bei der Methode nach Abbe auf, dass nie ein komplett scharfes Bild erzeugt werden konnte, da jeweils entweder der obere Teil scharf war, oder der untere. Dies ließe sich mit einer präziseren Justierung der Linsen entlang der optischen Achse womöglich vermeiden. Außerdem würde man so den Spielraum verringern, in dem eine Abbildung als scharf wahrgenommen wird.

4. Quellen

[1] Skript: „Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik“, 2005

[2] Skript: „Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik“, 2007

[3] <http://www.uni-leipzig.de/~prakphys/aprak/PDF/O-04-Konstruktion.pdf>

5. Anhang

- grafische Konstruktion
- Messdatenprotokoll