

## O3/O4 PRISMEN- UND GITTERSPEKTROMETER

### PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

**Grundbegriffe: Brechung am Prisma, Dispersion, Fresnel-Huygensches-Prinzip, Beugung am Gitter, Spektrometer, Kohärenz, Auflösungsvermögen.**

Prismen- und Gitterspektrometer dienen der Wellenlängenmessung im sichtbaren Spektralbereich sowie in den angrenzenden Spektralbereichen (UV, IR), wobei die Wellenlängenabhängigkeit der Brechung (Prisma) bzw. der Beugung (Gitter) ausgenutzt wird. Qualitativ kennzeichnend für ein Spektrometer ist sein Auflösungsvermögen  $\lambda/\Delta\lambda$ , wobei  $\Delta\lambda$  die kleinste bei der Wellenlänge  $\lambda$  gerade noch nachweisbare Wellenlängendifferenz ist.

1. Aufbau des Spektrometers: Den Aufbau des Spektrometers zeigt schematisch Abb. 1 mit aufgelegtem Prisma, welches leicht gegen ein Gitter ausgetauscht werden kann. Das Licht aus der Quelle Q fällt auf einen Spalt Sp veränderlicher Breite in der Brennebene der

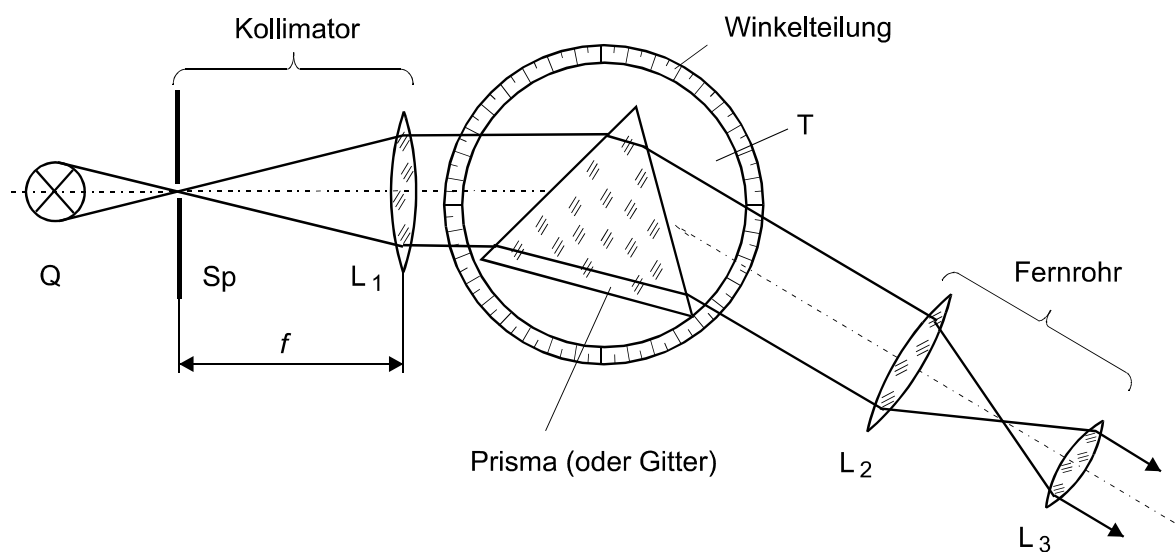


Abb. 1 AUFBAU DES SPEKTROMETERS

Kollimatorlinse  $L_1$ . In der Skizze wurde monochromatisches Licht vorausgesetzt, um den Strahlengang zu verdeutlichen. Die Linse  $L_1$  erzeugt aus dem divergenten Lichtbündel, welches den Spalt verlässt, ein Bündel paralleler Lichtstrahlen, welches auf das Prisma bzw. Gitter fällt. Das aus dem Prisma bzw. Gitter austretende Parallellichtbündel wird mit einem auf unendlich eingestellten Fernrohr betrachtet. Das Fernrohr ist um die Mittelachse des Tisches T schwenkbar und seine Stellung kann an einer Winkelteilung abgelesen werden.

2. Brechung am Prisma: Ein monochromatisches Parallellichtbündel erfährt beim Durchgang durch ein Prisma (Abb. 2) eine Gesamtablenkung um den Winkel

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma. \quad (1)$$

Für den brechenden Winkel  $\gamma$  des Prismas gilt  $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ , denn er ist auch Außenwinkel in dem Dreieck ABD. Bei symmetrischem Durchgang des Lichtbündels durch das Prisma, d.h. für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  und  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , wird die Gesamtablenkung minimal und es gilt

$$\alpha = \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \gamma) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1}{2}\gamma \quad (2)$$

und aus dem Brechungsgesetz folgt

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \gamma)}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \quad (3)$$

zur Berechnung der Brechzahl des Prismas aus dem brechenden Winkel  $\gamma$  und dem Winkel der minimalen Ablenkung  $\delta_{\min}$ . Da die Brechzahl von der Lichtwellenlänge abhängt, ist natürlich

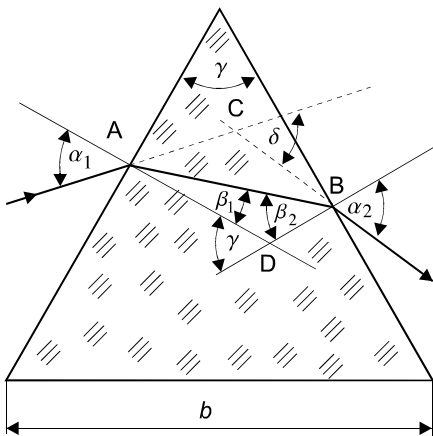


Abb. 2 BRECHUNG AM PRISMA

auch der Winkel der minimalen Ablenkung wellenlängenabhängig.

Emittiert die Lichtquelle Strahlung unterschiedlicher Wellenlängen, dann beobachtet man in der Brennebene des Fernrohrobjektivs  $L_2$  die spektral zerlegte Strahlung - das Spektrum - der Lichtquelle. Leuchtende Gase oder Metaldämpfe emittieren nur Strahlung diskreter Wellenlängen, so dass man im Fernrohr einfarbige Spektrallinien beobachtet. Bestimmt man für verschiedene Spektrallinien mit bekannter Wellenlänge jeweils die Brechzahl  $n$  eines Prismas, kann die so genannte Dispersionskurve  $n = n(\lambda)$  gezeichnet werden. Aus der

Dispersionskurve kann dann umgekehrt für eine unbekannte Strahlung mit Hilfe der gemessenen Brechzahl die Wellenlänge ermittelt werden.

Zur numerischen Näherung des Verlaufs der Dispersion  $n = n(\lambda)$  in optisch transparenten Materialien werden in der Optik die so genannten Sellmeier-Gleichungen verwendet. Die allgemeine Formulierung ist

$$n(\lambda) = \sqrt{A + \sum_{i=1}^n \frac{B_i \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}}, \quad (4)$$

wobei man in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  der Terme in  $\lambda^2$  von einer Sellmeier-Gleichung vom Typ  $n$  spricht. Diese zunächst rein empirisch erscheinende Abhängigkeit hat einen realen physikalischen Hintergrund: Allgemein sind die Dispersion und die Absorption von elektromagnetischer Strahlung, also auch von Licht, in Medien miteinander verknüpft. Die Absorption kann durch Ersatzoszillatoren beschrieben werden, deren Resonanzwellenlängen implizit in Gl. (4) enthalten sind (Polstellen der Terme in  $\lambda^2$ ). Eine ausführlichere Darstellung dieser Zusammenhänge würde den Rahmen dieser Versuchsbeschreibung im Praktikum sprengen.

Auch die Hersteller von technischen Glassorten, die z. B. für Prismen oder Linsen verwendet werden, beschreiben die Dispersion ihrer Produkte mit einer Sellmeier-Gleichung. Meist ist der Typ 2 (also insgesamt 5 Parameter) hinreichend, um den Brechungsindex mit einem (absoluten) Größtfehler von  $\pm 10^{-5}$  innerhalb eines spezifizierten Intervalls annähern zu können.

3. Auflösungsvermögen des Prismas: Es sind zwei Betriebsarten zu unterscheiden.

a) Bei niedrigauflösenden Spektrometern ist die Spaltbreite groß gegen die Wellenlänge. Es kann eine optische Abbildung des Spaltes erfolgen, die umso besser ist, je mehr Beugungsordnungen zur Abbildung beitragen. Das reelle Bild des Spaltes, welches in der Brennebene des Fernrohr-objektivs  $L_2$  entsteht, kann mit dem Okular  $L_3$  betrachtet werden. Der Beobachter sieht ein virtuelles Bild des Spaltes im Unendlichen. Zwei unterschiedliche Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + \Delta\lambda$  ergeben aufgrund der Dispersion des Prismas unterschiedliche Austrittswinkel  $\delta$  und damit in der Brennebene zwei getrennte Spaltbilder. Das Auflösungsvermögen wird in diesem Fall durch die Breite des Spaltes bestimmt, es kann durch Verringerung der Spaltbreite erhöht werden.

b) Bei hochauflösenden Geräten wählt man eine Spaltbreite in der Größenordnung der Lichtwellenlänge. Hier kann nur noch die nullte Ordnung des am Spalt gebeugten Lichtes von der Kollimatorlinse erfasst werden und eine Abbildung des Spaltes ist in diesem Fall nicht mehr möglich (vgl. Versuch O2). In der Brennebene des Fernrohresobjektivs wird nur noch eine

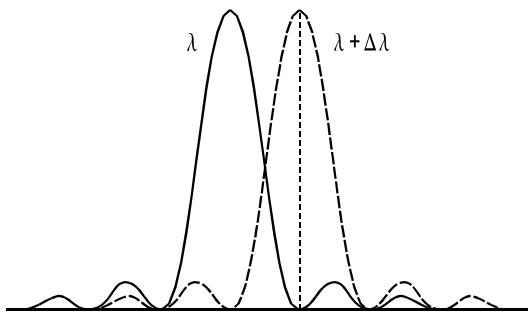


Abb. 3 BEUGUNGSFIGUREN

Beugungsfigur erzeugt, die durch die geometrische Lichtbündelbegrenzung (Prismenkanten) entsteht. Abb. 3 zeigt für zwei Wellenlängen  $\lambda$  bzw.  $\lambda + \Delta\lambda$  die Beugungsfiguren, welche aufgrund der Dispersion des Prismas gegeneinander verschoben sind. Eine Trennung der beiden Wellenlängen ist gerade noch möglich, wenn das Hauptmaximum der einen Beugungsfigur in das 1. Minimum der anderen fällt (sog. Raleigh-Kriterium).

Die Hauptmaxima werden umso schmaler und damit das Auflösungsvermögen umso größer, je breiter die verwendeten Lichtbündel sind, d.h. je größer der Abstand der beugenden Kanten (hier des Prismas!) ist. Eine weitere Verengung des Spaltes ist dann sinnlos, da sie nur die Lichtintensität verringern würde.

Die quantitative Behandlung der aufgeführten Zusammenhänge (siehe z.B. Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band Optik) liefert für das theoretische Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = -b \frac{dn}{d\lambda}. \quad (5)$$

Hierbei ist  $b$  die Basislänge des Prismas (Abb. 2) und  $n$  der Brechungsindex des Prismenmaterials. Der Differentialquotient  $dn/d\lambda$  heißt Dispersion des Prismenmaterials. Im Falle der sog. *normalen* Dispersion ist der Differentialquotient negativ.

Entscheidend für das Auflösungsvermögen ist also neben der Dispersion  $dn/d\lambda$  die Basislänge  $b$  des Prismas.

**4. Beugung am Gitter:** Beim Gitterspektrometer wird anstelle des Prismas ein optisches Gitter auf den Spektromertisch T aufgesetzt (Abb.1).

Trifft ein Parallelbündel kohärenten Lichtes senkrecht auf das Gitter, so können in der Brennebene der Linse  $L_2$  charakteristische Fraunhofersche Beugungserscheinungen beobachtet werden. Diese Beugungserscheinungen entstehen durch die Überlagerung der Beugungserscheinungen an den Einzelspalten.

Zur Erläuterung des Prinzips der Überlagerung der von den Einzelspalten herrührenden Beugungserscheinungen dient das Beispiel für 2 Spalte in Abb. 4.

Betrachtet werden Strahlen unter dem Beugungswinkel  $\alpha$ . Zwischen den Randstrahlen des linken Spaltes der Breite  $s$  beträgt der Gangunterschied  $\Delta_1 = s \cdot \sin \alpha$  und folglich die Phasendifferenz

$$\varphi_1 = \frac{2\pi s \sin \alpha}{\lambda}. \quad (6)$$

Das gleiche gilt auch für den rechten Spalt (bzw. im Falle des Gitters für alle  $N$  Spalte). Die Interferenz dieser Strahlen führt in der Brennebene von  $L_2$  unter dem Winkel  $\alpha$  zu einer Lichterregung mit der Intensität

$$I_{\text{Spalt}}(\alpha) \sim \frac{\sin^2(\varphi_1/2)}{(\varphi_1/2)^2}. \quad (7)$$

Die besondere Wirkung des Gitters beruht nun darauf, dass zusätzlich auch die Strahlen aus allen  $N$  beleuchteten Spalten, welche voneinander den gleichen Abstand  $g$  (Gitterkonstante) haben, miteinander interferieren. Nach Abb. 4 haben sie einen Gangunterschied von  $\Delta_2 = g \sin \alpha$  und eine Phasendifferenz von

$$\varphi_2 = \frac{2\pi g \sin \alpha}{\lambda}. \quad (8)$$

Die Vielstrahlinterferenz aller unter dem Winkel  $\alpha$  gebeugten Strahlenbündel führt zur Beugungsintensität für das gesamte Gitter

$$I(\alpha) \sim I_{\text{Spalt}}(\alpha) \frac{\sin^2(N\varphi_2/2)}{\sin^2(\varphi_2/2)}. \quad (9)$$

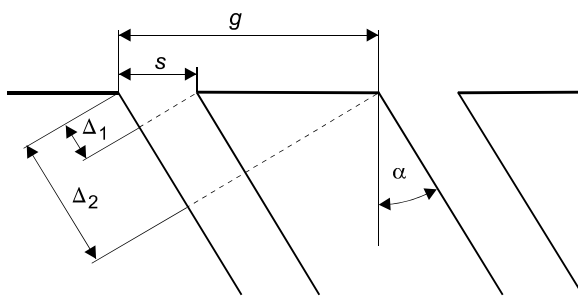


Abb. 4 BEUGUNG AN ZWEI SPALTEN

Abb. 5 zeigt als Beispiel die Beugungsfigur eines Gitters mit 5 Spalten. Die Lage der Hauptmaxima (Abb. 5 zeigt das Hauptmaximum 0. Ordnung und symmetrisch dazu die Hauptmaxima 1. bis 3. Ordnung) folgt daraus, dass der zweite Faktor in Gl. (9) für die Phasendifferenzen  $\varphi_2 = 0, 2\pi, 4\pi \dots$ , also allgemein für  $\varphi_k = 2k\pi$ , seine Maximalwerte  $N^2$  annimmt. Daraus folgt mit Gl. (8) für die Winkel, unter denen die Hauptmaxima auftreten,

$$\sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{g} \quad \text{mit} \quad k=0,1,2,\dots \quad (10)$$

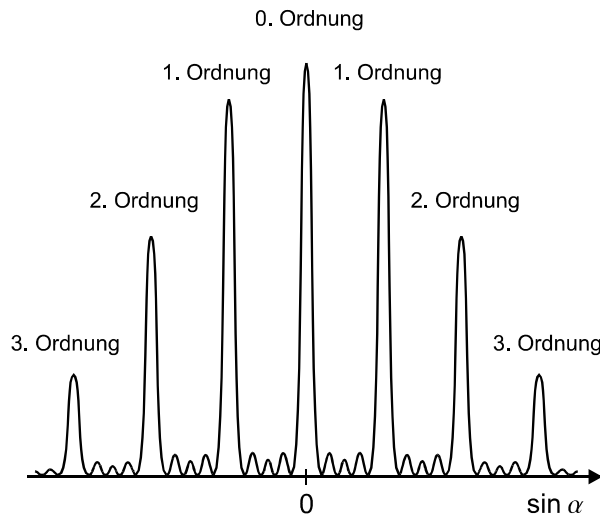


Abb. 5 BEUGUNGSFIGUR AM GITTER

Zwischen den Hauptmaxima befinden sich  $N-2$  Nebenmaxima. Daraus folgt, dass mit steigendem  $N$  die Hauptmaxima immer schmaler und (wegen  $I \sim N^2$ ) immer höher werden müssen. Dass die Intensität der Hauptmaxima mit steigender Ordnung abnimmt, liegt an der modulierenden Wirkung des Einzelspaltanteils in Gl.(9). Aus Gl.(9) folgt eine weitere Schlussfolgerung von sehr praktischem Interesse: Steht die Gitterkonstante  $g$  zur Einzelspaltbreite  $s$  in einem rationalen Verhältnis, so fallen gewisse der durch Gl.(10) gegebenen Hauptmaxima aus. Der Grund hierfür sind die Nullstellen (Minima) des Einzelspaltterms für die Winkel  $\sin \alpha_k = k\lambda/s$  ( $k = 1,2,3\dots$ ).

5. Auflösungsvermögen des Gitters: Zwei Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + \Delta\lambda$  werden in der  $k$ -ten Ordnung getrennt (Abb.6), wenn in dieser Ordnung der Abstand  $l_1$  ihrer Hauptmaxima nicht kleiner wird als der Abstand  $l_2$  zwischen dem Haupt- und dem ersten Nebenminimum von  $\lambda$ . Da, wie oben ausgeführt, zwischen zwei Hauptmaxima von  $\lambda$  immer  $N-2$  Nebenmaxima und folglich  $N-1$  Neben-

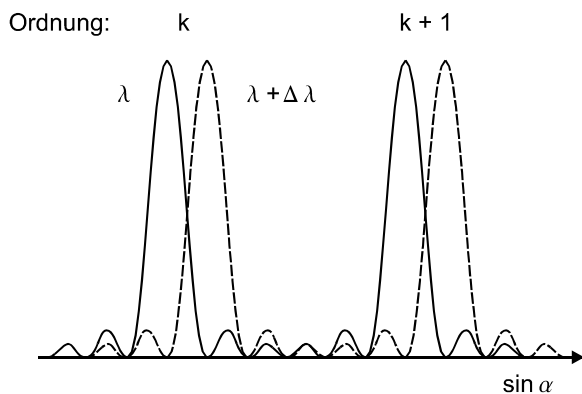


Abb. 6 AUFLÖSUNGSVERMÖGEN

minima liegen, folgt für den Abstand  $l_2$  nach Gl.(10)

$$l_2 = \frac{1}{N}(\sin \alpha_{k+1} - \sin \alpha_k) = \frac{1}{N} \frac{\Delta\lambda}{g}.$$

Für  $l_1$  gilt nach Gl. (9)

$$l_1 = \sin \alpha_{(\lambda+\Delta\lambda)} - \sin \alpha_\lambda = k \frac{\Delta\lambda}{g}.$$

Damit folgt aus der Bedingung  $l_1 \geq l_2$  für die Auflösungsgrenze in der  $k$ -ten Ordnung

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq kN. \quad (11)$$

## AUFGABEN

1. Man bestimme die Brechzahl  $n$  eines Glasprismas (Gl. (3)) für fünf Spektrallinien des Hg-Spektrums und stelle die Dispersionskurve  $n = n(\lambda)$  grafisch dar.
2. Man bestimme die Brechzahl  $n$  des Glasprismas (Gl. (3)) für die Natriumlinie und bestimme aus der Dispersionskurve ihre Wellenlänge.
3. Man schätze das Auflösungsvermögen des Prismas (Gl. (5)) für  $\lambda = 590 \text{ nm}$  aus der Dispersionskurve ab.
4. Für ein Beugungsgitter bestimme man mit Hilfe der grünen Hg-Linie die Gitterkonstante  $g$ , (Gl. (10)).
5. Mit Hilfe des Beugungsgitters ermittle man die Wellenlängen zweier weiterer Hg-Linien und die mittlere Wellenlänge des Na-Dubletts.
6. Man berechne das Auflösungsvermögen des Gitters (Gl. (11)) für verschiedene Ordnungen  $k$  und vergleiche die Werte mit den Beobachtungen bei der Auflösung des Na-Dubletts.

## VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

(1) Justierung des Spektrometers: Zunächst löst man das Fernrohr aus der Halterung und visiert einen fernen Gegenstand außerhalb des Praktikumsraumes an. Durch Drehen des Okulars erreicht man die gleichzeitige Scharfeinstellung des Fadenkreuzes im Okular und des fernen Gegenstandes. Die Justierung des Fernrohrs muss während der gesamten Versuchsdurchführung erhalten bleiben. Anschließend erfolgt die Scharfeinstellung des Spaltes durch Justierung des Kollimators. Auch diese Einstellung darf dann nicht mehr verändert werden.

(2) Einstellung des Ablenkwinkels  $\delta_{\min}$ : Man drehe das Prisma auf dem Prismentisch in einem bestimmten Drehsinn und beobachte die Bewegung des gebrochenen Strahlenbündels zunächst auf einem in den Strahlengang gehaltenen Blatt Papier. Es gibt eine Stellung des Prismas, von der ab unter Beibehaltung des Prismendrehsinns sich die Bewegungsrichtung des Lichtbündels umkehrt. Die Umkehrstelle ist der Winkel minimaler Ablenkung. Zur genauen Messung benutzt man das Fernrohr und bringt das Fadenkreuz mit der Umkehrstelle der jeweiligen Spektrallinien zur Deckung und liest die zugehörigen Fernrohrstellungen am Teilkreis mit dem Nonius ab. Der zweite Schenkel des zu messenden Winkels  $\delta_{\min}$  ist durch die Einfallrichtung des unabgelenkten Lichtbündels gegeben.

Eine höhere Messgenauigkeit erzielt man, wenn man das Prisma auf dem Prismentisch dreht und das gleiche Verfahren zur Auffindung der Umkehrstelle auf der anderen Seite in Bezug auf die Richtung des einfallenden Lichtbündels anwendet. Man erhält also für jede Spektrallinie zwei Fernrohrstellungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Die Hälfte der Differenz der beiden Winkelstellungen ist gleich dem Ablenkwinkel  $\delta_{\min}$ .

Der brechende Winkel  $\gamma$  des Prismas beträgt  $60^\circ$ .

Man beachte, dass die Spektrallampen nur über eine Drossel an die Netzspannung angeschlossen werden dürfen.

Für Aufgabe 1 verwende man die folgenden Hg-Linien:

violett  $\lambda_1 = 404,656$  nm,

blau  $\lambda_2 = 435,833$  nm,

blau/grün  $\lambda_3 = 491,607$  nm,

grün  $\lambda_4 = 546,074$  nm,

rot  $\lambda_5 = 623,440$  nm.

Für Aufgabe 2 verwendet man die gelbe Linie der Na-Lampe. Den Messwert vergleiche man mit dem Tabellenwert des aus zwei dichtbenachbarten Spektrallinien bestehenden Na-Dubletts:

$\lambda_1 = 588,9950$  nm bzw.  $\lambda_2 = 589,5924$  nm.

Für Aufgabe 3 kann zur Ermittlung von  $dn/d\lambda$  ein am Versuchsplatz vorhandenes Spiegellinial benutzt werden. Wesentlich eleganter ist aber die numerische Näherung der Dispersionsbeziehung  $n(\lambda)$  gemäß Gl. (4),  $dn/d\lambda$  kann dann durch Differentiation ermittelt werden.

Für Aufgabe 4 wähle man die grüne Hg-Linie ( $\lambda = 546,074$  nm) und für Aufgabe 5 die blaue und die gelbe Hg-Linie sowie die gelbe Natriumlinie.

Für Aufgabe 6 ermittle man experimentell, ab welcher Ordnung das Na-Dublett als zwei getrennte Linien beobachtet werden kann und vergleiche mit dem theoretischen Wert (Gl. (11)). Dazu bestimme man  $N$  aus der Größe der ausgeleuchteten Gitterfläche und der Gitterkonstanten  $g$  (Aufgabe 4).

## FRAGEN

1. Was versteht man unter normaler bzw. anomaler Dispersion?
2. Unter welchen Bedingungen tritt nach dem Brechungsgesetz Totalreflexion ein?
3. Wie kann das Reflexions- und das Brechungsgesetz mit dem Huygens-Fresnel-Prinzip erklärt werden?
4. Was ist kohärentes Licht?
5. Welche Besonderheiten weist das Gitterspektrum auf, wenn das Verhältnis von Gitterkonstante  $g$  zu Spaltbreite  $s$  gerade 2:1 beträgt?