

PHYSIKALISCHES GRUNDPRAKTIKUM B  
VERSUCHSPROTOKOLL O3/O4  
PRISMEN- UND GITTERSPEKTROMETER

JOHANN FÖRSTER 519519

VERSUCHSPARTNER MEIKEL SOBANSKI

VERSUCHSORT: NEW14'211 PLATZ 1

VERSUCHSDATUM: 28.10.2008

VERSUCHSBETREUER: DR. UWE MÜLLER

HUMBOLDT UNIVERSITÄT ZU BERLIN  
INSTITUT FÜR PHYSIK

# INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung .....	3
2.1) Bestimmung der wellenlängenabhängigen Brechzahl $n$ des Prismas sowie Darstellung der Dispersionskurve $n=n(\lambda)$ .....	3-4
2.2) Bestimmung der Wellenlänge $\lambda$ der gelben Natriumlinie .....	4
2.3) Abschätzung des Auflösungsvermögens des Prismas für $\lambda = 590nm$ .....	4-5
2.4) Bestimmung der Gitterkonstante $g$ des Beugungsgitters mit Hilfe der grünen Hg-Linie .....	5
2.6) Bestimmung der Wellenlängen der Spektrallinien Hg-blau, Na-rot, Na-gelb .....	5-7
2.7) Berechnung des Auflösungsvermögens des Gitters und Vergleich mit den Beobachtungen bei der Auflösung des Na-Dubletts .....	7
3) Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung .....	7-8
4) Quellenangabe .....	8
Anhang: Messprotokoll .....	9-10

## 1) Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Ziel des Versuches war die Untersuchung von einem Prismen- und einem Gitterspektrometer, wobei das jeweilige Auflösungsvermögen, die Prismenbrechzahl  $n$  in Abhängigkeit der Wellenlänge und die Gitterkonstante  $g$  des Gitters sowie die Wellenlängen des Lichtes verschiedener Spektrallinien gemäß Quelle [1], Seite 51-57 bestimmt werden sollte.

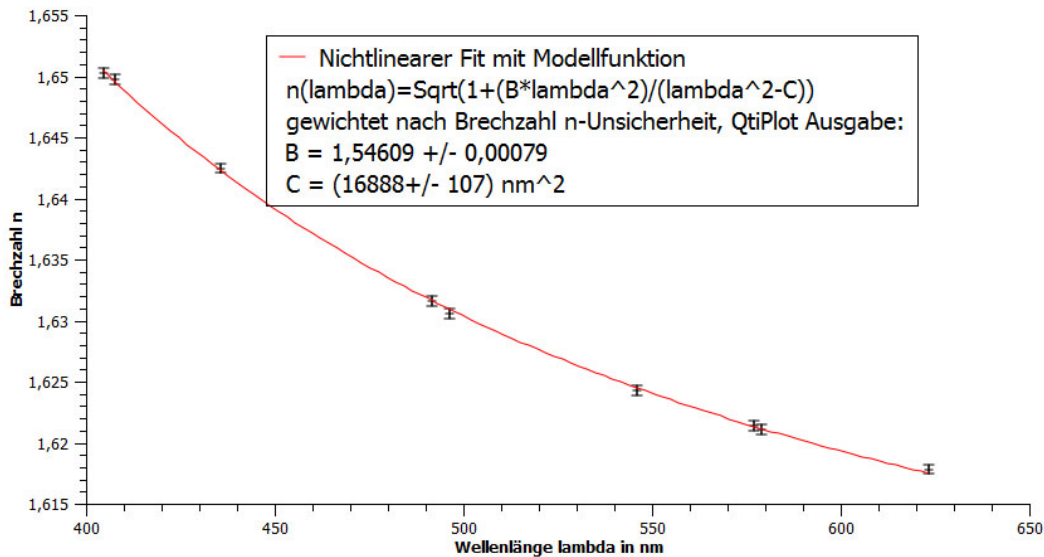
### 2.1) Bestimmung der wellenlängenabhängigen Brechzahl $n$ des Prismas sowie Darstellung der Dispersionskurve $n=n(\lambda)$

Nach der Feinjustierung ([1], Seite 56) wurde zunächst der brechende Winkel  $\gamma$  des Prismas bestimmt. Die Unsicherheit der Winkelmessung mittels Winkelteilung und Nonius wird zu jeweils einem halben Skalenteil ( $u(\varphi) = 1' = \frac{1}{60}^\circ$ ) abgeschätzt. Aus den beiden Winkeln  $\varphi_1 = 143^\circ + 11' \pm 1'$  und  $\varphi_2 = 23^\circ + 15' \pm 1'$ , unter denen der Spalt ([1], Seite 51) abgebildet wurde, wenn die Spitze des Prismas, die Lampe und der Spalt in einer Ebene liegen, ergibt sich der brechende Winkel des Prismas zu  $\gamma = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \pm \frac{u(\varphi)}{\sqrt{2}} = (59,97 \pm 0,01)^\circ$ . Desweiteren wurde die für alle weiteren Messungen relevante Nulllage  $\varphi_0$  des Spaltes zu  $\varphi_0 = 74^\circ + 12' \pm 1'$  gemessen. Zusammen mit dem für die jeweilige Spektralfarbe bestimmten minimalen Ablenkungswinkel  $\delta_{min} = \varphi_0 - \varphi_l \pm \sqrt{2}u(\varphi)$  konnte dann die Brechzahl  $n$  der jeweiligen Spektralfarbe nach Gleichung 3, Quelle [1], Seite 52 bestimmt werden zu  $n = \frac{\sin(\frac{1}{2}(\delta_{min} + \gamma))}{\sin(\frac{1}{2}\gamma)}$ , deren Unsicherheit nach der Fehlerfortpflanzung

$$u(n) = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \delta_{min}} u(\delta_{min})\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \gamma} u(\gamma)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\cos(\frac{1}{2}(\delta_{min} + \gamma))u(\varphi)}{\sqrt{2}\sin(\frac{\gamma}{2})}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\delta_{min})u(\varphi)}{2\sqrt{2}\sin^2(\frac{\gamma}{2})}\right)^2}$$
 beträgt. Damit ergibt sich für die Brechzahlen  $n$  in Abhängigkeit der Wellenlänge:

Hg-Spektrallinie	Wellenlänge in nm	$\delta_{min}$ in $^\circ$	Brechzahl $n$
violett	404,656	$51,15 \pm 0,03$	$1,6502 \pm 0,0004$
violett	407,784	$51,10 \pm 0,03$	$1,6497 \pm 0,0004$
blau	435,833	$50,37 \pm 0,03$	$1,6425 \pm 0,0004$
blau/grün	491,607	$49,28 \pm 0,03$	$1,6316 \pm 0,0004$
blau/grün	496,187	$49,18 \pm 0,03$	$1,6306 \pm 0,0004$
grün	546,074	$48,57 \pm 0,03$	$1,6243 \pm 0,0004$
gelb	576,961	$48,28 \pm 0,03$	$1,6214 \pm 0,0004$
gelb	579,067	$48,25 \pm 0,03$	$1,6211 \pm 0,0004$
rot	623,440	$47,93 \pm 0,03$	$1,6178 \pm 0,0004$

Auf der folgenden Seite befindet sich die mittels QtiPlot erstellte grafische Darstellung der Dispersionskurve  $n = n(\lambda)$ . Für den Graphen wurde eine nichtlineare Regression mit der Sellmeier-Gleichung vom Typ 1  $n(\lambda) = \sqrt{A + \frac{B \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C}}$  ([1], Seite 52) durchgeführt, wobei zusätzlich  $A=1$  gewählt wurde.



Grafische Darstellung der Dispersionskurve  $n = n(\lambda)$

## 2.2) Bestimmung der Wellenlänge $\lambda$ der gelben Natriumlinie

Die Brechzahl  $n$  des Prismas für die gelbe Natriumlinie ergibt sich analog zu den Berechnungen aus 2.1) mit gemessenen  $\varphi_l = 26^\circ \pm 1'$  zu  $n = 1,6206 \pm 0,0004$ .

Mit Hilfe der Näherung  $n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{B \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C}}$  lässt sich  $\lambda$  bestimmen zu

$$\lambda = \sqrt{\frac{C(1-n^2)}{1+B-n^2}} \text{ mit } u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial n} u(n)\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial B} u(B)\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial C} u(C)\right)^2}.$$

$$\Rightarrow \text{Ergebnis: } \lambda = (585 \pm 6) \text{ nm}$$

Dieser Wert stimmt innerhalb seiner Messunsicherheit gut mit dem Literaturwert  $\lambda \approx 589 \text{ nm}$  ([1], Seite 57) überein.

## 2.3) Abschätzung des Auflösungsvermögens des Prismas für $\lambda = 590 \text{ nm}$

Zusammen mit der Basislänge  $b = (29,6 \pm 0,1) \text{ mm}$  des Prismas lässt sich das Auflösungsvermögen des Prismas nach Quelle [1], Seite 53, Gleichung 5 zu

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = -b \frac{dn}{d\lambda} = \frac{b \lambda B C}{(\lambda^2 - C)^2 \sqrt{1 + \frac{B \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - C}}} = 1568 \text{ abschätzen. Theoretisch müsste also eine}$$

Wellenlänge um  $\Delta \lambda = \frac{590 \text{ nm}}{1568} = 0,4 \text{ nm}$  von  $590 \text{ nm}$  verschieden sein, um sie als getrennte Wellenlänge wahrzunehmen. Das Natrium-Dublett mit dem Wellenlängenunterschied  $\Delta \lambda = 0,5974 \text{ nm}$  bei  $\lambda \approx 590 \text{ nm}$  ([1], Seite 57) müsste also theoretisch als getrennte Linien wahrnehmbar gewesen sein.

## 2.4) Bestimmung der Gitterkonstante g des Beugungsgitters mit Hilfe der grünen Hg-Linie

Zur Bestimmung der Gitterkonstante g mit Hilfe der Formel  $\sin \varphi_m = \frac{k\lambda}{g}$  ([1], Seite 54, Gleichung 10) wurde jeweils der Winkel  $\varphi_m = \varphi_0 - \varphi_l$ , unter denen das jeweilige Beugungsmaxima k-ter Ordnung auftrat, ermittelt und mit der Wellenlänge  $\lambda = 564,074nm$  die Gitterkonstante  $g = \frac{k\lambda}{\sin \varphi_m}$  bestimmt.

Ordnung k	Ablenkungswinkel $\varphi_m$ in °	Gitterkonstante $g_k$ in $(10^{-6})m$
1	$3,07 \pm 0,03$	10,21
2	$6,20 \pm 0,03$	10,11
3	$9,38 \pm 0,03$	10,05
4	$12,55 \pm 0,03$	10,05
5	$15,82 \pm 0,03$	10,02
6	$18,62 \pm 0,03$	10,26
7	$22,45 \pm 0,03$	10,01
8	$25,93 \pm 0,03$	9,99
9	$29,52 \pm 0,03$	9,98
10	$33,20 \pm 0,03$	9,97

Der Mittelwert für g beträgt  $\bar{g} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} g_k = 10,0649 * 10^{-6}m$ . Da mehr als sechs Messwerte zur Verfügung stehen, kann eine statistische Fehlerrechnung durchgeführt werden.

Die systematische Unsicherheit beträgt  $u_s(g) = \left| \frac{\partial g}{\partial \varphi} u(\varphi) \right| = 0,04 * 10^{-6}m$

Standardabweichung:  $s = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{k=1}^{10} (\bar{g} - g_k)^2} = 0,100 * 10^{-6}m$

Vertrauensbereich:  $\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{10}} s = 0,032 * 10^{-6}m$

Gesamtunsicherheit:  $u(g) = \sqrt{\bar{s}^2 + u_s(g)^2} = 0,05 * 10^{-6}m$

⇒ Ergebnis:  $g = (10,06 \pm 0,05) * 10^{-6}m$

## 2.6) Bestimmung der Wellenlängen der Spektrallinien Hg-blau, Na-rot, Na-gelb

Die Wellenlängen der Spektrallinien wurden mit der Formel  $\lambda = \frac{g}{k} \sin \varphi_m$  ([1], Seite 54, Gleichung 10) bestimmt. Da für die Linien Hg-blau und Na-gelb wieder mehr als 6 Messwerte zur Verfügung standen, konnte wieder eine statistische Fehlerrechnung durchgeführt werden. Die systematischen Fehler der Messungen ergeben sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zu

$u_s(\lambda) = \sqrt{\left( \frac{\partial \lambda}{\partial g} u(g) \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial k} u(k) \right)^2}$  und die Gesamtunsicherheit wird mit dem

Vertrauensbereich  $\bar{s}$  damit zu  $u(\lambda) = \sqrt{u_s^2 + \bar{s}^2}$ .

Für die blaue Hg-Linie und die gelbe Natriumlinie wurde folgendes ermittelt:

Ordnung k	Hg-blau	Na-gelb		
	Ablenkungswinkel $\varphi_m$ in $^\circ$	Wellenlänge $\lambda_{blau}$ in nm	Ablenkungswinkel $\varphi_m$ in $^\circ$	Wellenlänge $\lambda_{gelb}$ in nm
1	$2,43 \pm 0,03$	427,3	$2,35 \pm 0,03$	412,7
2	$4,92 \pm 0,03$	431,3	$6,70 \pm 0,03$	587,1
3	$6,45 \pm 0,03$	376,9	$10,15 \pm 0,03$	591,2
4	$9,98 \pm 0,03$	436,2	$13,55 \pm 0,03$	589,5
5	$12,55 \pm 0,03$	437,4	$17,08 \pm 0,03$	591,3
6	$15,12 \pm 0,03$	437,5	$20,70 \pm 0,03$	592,9
7	$17,70 \pm 0,03$	437,2	$24,38 \pm 0,03$	593,6
8	$20,42 \pm 0,03$	438,9	$28,13 \pm 0,03$	593,2
9	$23,10 \pm 0,03$	438,8	$32,08 \pm 0,03$	594,0
10	$25,93 \pm 0,03$	440,2	$36,17 \pm 0,03$	594,0

Der Messwert der dritten Ordnung für die blaue Hg-Linie fällt stark aus dem Rahmen, da es sich höchstwahrscheinlich um einen Messfehler handelt wird er im Weiteren nicht beachtet und es ergibt sich damit:

$$\text{Mittelwert: } \overline{\lambda_{blau}} = \frac{1}{9} \sum_{k=1, k \neq 3}^{10} \lambda_{blau, k} = 436,1 \text{ nm}$$

$$\text{Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{k=1, k \neq 3}^{10} (\overline{\lambda_{blau}} - \lambda_{blau, k})^2} = 4,1 \text{ nm}$$

$$\text{Vertrauensbereich: } \overline{s} = \sqrt{\frac{1}{9}} s = 1,4 \text{ nm}$$

$$\text{systematische Messunsicherheit: } u_s(\lambda) = 2,9 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow \text{Ergebnis: } \lambda_{blau} = (436 \pm 3) \text{ nm}$$

Das Ergebnis stimmt innerhalb seiner Messunsicherheit mit dem Literaturwert  $\lambda_{blau} = 435,8343 \text{ nm}$  (Quelle [2]) überein.

Bei der gelben Na-Linie fällt der erste Messwert stark aus dem Rahmen, weshalb auch dieser im Weiteren nicht beachtet wird. Damit ergibt sich für die mittlere Wellenlänge des Na-Dubletts:

$$\text{Mittelwert: } \overline{\lambda_{gelb}} = \frac{1}{9} \sum_{k=2}^{10} \lambda_{gelb, k} = 591,9 \text{ nm}$$

$$\text{Standardabweichung: } s = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{k=2}^{10} (\overline{\lambda_{gelb}} - \lambda_{gelb, k})^2} = 2,3 \text{ nm}$$

$$\text{Vertrauensbereich: } \overline{s} = \sqrt{\frac{1}{9}} s = 0,8 \text{ nm}$$

$$\text{systematische Messunsicherheit: } u_s(\lambda) = 3 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow \text{Ergebnis: } \lambda_{gelb} = (592 \pm 3) \text{ nm}$$

Auch dieser Wert überschneidet sich innerhalb seiner Messunsicherheit mit dem Literaturwert  $\lambda_{gelb} = 589,3 \text{ nm}$  (Quelle [1], Seite 57).

Bei der Messung der roten Natriumlinie wurden zwar theoretisch vier Werte gemessen, allerdings liefert nur der Wert der zweiten Ordnung eine Wellenlänge im Bereich des roten Lichtes ( $\varphi_m = (7,52 \pm 0,03)^\circ$ ,  $\lambda_{rot} = 658\text{nm}$ ,

$u(\lambda_{rot}) = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi_m}\sqrt{2}u(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial g}\sqrt{2}u(g)\right)^2} = 4\text{nm}$ ). Die Abweichungen der 3. und 4. Ordnung könnte damit begründet werden, dass ausversehen eine orange Spektrallinie gemessen wurde, die rote Linie war stets nur sehr schwach zu erkennen.

## 2.7) Berechnung des Auflösungsvermögens des Gitters und Vergleich mit den Beobachtungen bei der Auflösung des Na-Dubletts

Das Auflösungsvermögen des Gitters wird nach [1], Seite 55, Gleichung (11) zu  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq kN$  bestimmt, wobei N die Anzahl der ausgeleuchteten Gitterspalte ist. Diese bestimmt sich aus der Länge des Gitters  $l=15\text{mm}$  (als fehlerfrei angenommen) und der Gitterkonstanten  $g = (10,06 \pm 0,04) * 10^{-6}\text{m}$  zu  $N = \frac{l}{g} \pm \left|\frac{\partial N}{\partial g}u(g)\right| = 1490 \pm 5$ . Damit folgt für das theoretische Auflösungsvermögen:

Ordnung k	Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq$	$\Delta\lambda \geq (\lambda = 590\text{nm})$
1	$1490 \pm 5$	0,40nm
2	$2981 \pm 9$	0,20nm
3	$4471 \pm 14$	0,13nm
4	$5961 \pm 19$	0,10nm

Nach Quelle [1], Seite 57 beträgt der Wellenlängenunterschied des Na-Dubletts  $\Delta\lambda = 0,5974\text{nm}$ , theoretisch hätte man das Dublett also schon in der ersten Ordnung als getrennte Linien wahrnehmen können. In der Praxis wurden die Linien jedoch erst ab der dritten Ordnung als getrennte Linien wahrgenommen, das reale Auflösungsvermögen scheint also etwas schlechter zu sein als der minimale theoretische Wert. Allerdings ist die Wahrnehmung ab wann die Linien wirklich getrennt sind subjektiv, ab der zweiten Ordnung hätte man die Linien ggf. auch schon als getrennt ansehen können.

## 3) Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Die erzielten Resultate entsprechen weitgehend den Erwartungen. Sowohl die in der Teilaufgabe 2.2) mittels der Sellmeier-Näherung ermittelte Wellenlänge des Natrium-Dubletts als auch die in Teilaufgabe 2.6) ermittelten Wellenlängen (Hg-blau, Na-gelb) stimmen innerhalb ihrer Unsicherheit mit den Literaturwerten überein, wobei allerdings die Messung der roten Natriumlinie aufgrund von Messfehlern leider kein eindeutiges Ergebnis brachte. Die ermittelten theoretischen Auflösungsvermögen von Prisma und Gitter scheinen etwas größer

als der reale Wert, allerdings ist die Wahrnehmung per Auge sehr subjektiv und ein elektronischer Detektor könnte ggf. diese theoretische Auflösung besser bestätigen. Außerdem haben weitere nicht beachtete Messunsicherheiten das Ergebnis beeinflusst, zum Beispiel Ungenauigkeiten bei der Justierung des Fernrohrs und Scharfeinstellung des Spaltes. Weiterhin führt die Ungenauigkeit bei dem Anvisieren der Spektrallinien mit dem Fernrohr sowie das Einstellen des minimalen Ablenkungswinkels beim Prisma (suchen des Umkehrpunktes beim Drehen des Prismas) zu weiteren nicht beachteten Ungenauigkeiten des gemessenen Winkels. Leider auch aufgetretene grobe Messfehler wie z.B. das Anvisieren einer „falschen“ Spektrallinie waren jedoch in den Resultaten erkennbar, die jeweiligen Messwerte wurden für die weitere Betrachtung ignoriert.

#### 4) Quellenangabe

- [1] Skript “Phys. Grundpraktikum: Elektrodynamik und Optik“, 2005, online verfügbar unter [http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik und Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik und Optik.pdf](http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf) (Stand: 01.11.2008)
- [2] [http://www.winlens.de/fileadmin/user\\_upload/Dateien/Lens\\_Design\\_Elements/wave1.pdf](http://www.winlens.de/fileadmin/user_upload/Dateien/Lens_Design_Elements/wave1.pdf) (Stand: 01.11.2008)