Die Divergenz

Die Divergenz ist ein Skalar und beschreibt die Quelldichte eines Vektorfeldes **j**.

Beispiel:
Es sei **j** die Stromdichte einer Strömung ρ**v** [kg/(m^{2}s)]:

$\vec{j} = \rho\vec{v}$ und der Fluss $\Phi = \int \vec{j}\, d\vec{A} = \int \rho\vec{v}\, d\vec{A}$

Der differentielle Fluss dϕ [kg/s] durch eine Fläche d**A** der Breite dz bzw. dx oder dy ergibt sich zu

$$d\Phi_{Ez} = \rho\vec{v}_z \overrightarrow{dxdy} \quad bzw. \quad d\Phi_{Ex} = \rho\vec{v}_x \overrightarrow{dydz} \quad bzw. \quad d\Phi_{Ey} = \rho\vec{v}_y \overrightarrow{dxdz}$$

Strömt mehr heraus, als hinein oder umgekehrt, so berechnet sich die Differenz zu

$$d\Phi_{Az} = \rho\vec{v}_z (z+dz)\overrightarrow{dxdy} = \rho(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz)dxdy \quad usw.$$

Die Differenz zwischen ein- und ausströmender Masse ist dann

$$d\Phi_{Ez} + d\Phi_{Az} = d\Phi = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} dz\, dxdy = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} dV$$

Betrachtet man einen infinitesimalen Würfel dV, dann ist die Gesamtdifferenz zwischen ein- und ausströmender Masse je Zeiteinheit

$$d\Phi = \rho(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z})dV = \rho\, div\vec{v}\, dV = div\, \vec{j}\, dV$$

Befindet sich in dV eine Quelle (oder Senke), so ist die je Zeiteinheit aus(ein)strömende Masse >(<), als die ein(aus)strömende Masse . In quellfreien Gebieten ist die Divergenz Null.

Im Falle des elektrischen Stromes entspricht ρ der Ladungsdichte und der Fluß Φ dem elektrischen Strom I. Es gilt dann

$$div\,\vec{j} = \frac{dI}{dV} = \frac{d}{dV}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \mp\frac{d\rho}{dt}$$

Der Quelldichte des Vektorfeldes j entspricht die zeitliche Änderung der Ladungsdichte ρ. Die Gleichung

$$\boxed{div\,\vec{j} = -\dot{\rho}}$$

heißt <u>Kontinuitätsgleichung</u>.

Die Anwendung des Gauß'schen Satzes

$$\oint \vec{j}\,d\vec{A} = \int_{V_A} div\,\vec{j}\,dV = -\dot{q}$$

führt z. B. zum Knotensatz: Im stationären Fall ($\dot{q} = 0$) ist die Summe aus hinein- und hinausfließenden Strömen gleich Null:

$$\int \vec{j}\,d\vec{A} = \sum_i \vec{j}_i \vec{A}_i = 0 = \sum_j I_{Ej} + \sum_k I_{Ak}$$

Allgemein gilt:

$$div\,rot\,\vec{A} = 0$$

Ist die Divergenz eines Vektorfeldes **j** Null, so lässt es sich aus der Rotation eines Vektorfeldes **A** ableiten. Da die Rotation von Wirbelfeldern nicht verschwindet, folgt hieraus:

Wirbelfelder sind quellfrei. (Helmholtz'scher Wirbelsatz)