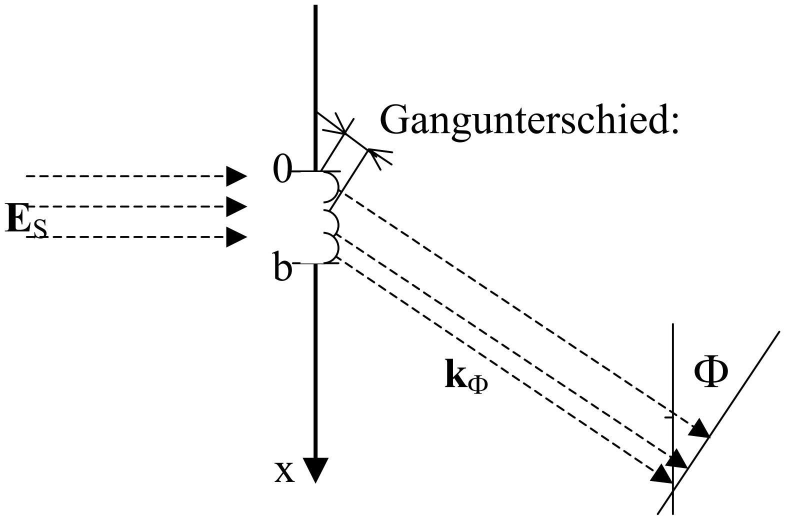
Fraunhofersche Beugung am Spalt



Gangunterschied: $\Delta l = x \sin\Phi$

Wellenfront || E

$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin\Phi$

Strahlenbündel der Breite b
gebeugt um den Winkel Φ

Phasendifferenz: $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin\Phi$

Jeder Punkt x der Öffnung ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Huygenssches Prinzip). Die Superposition aller unter dem Winkel Φ gebeugten Teilstrahlen entspricht einer Summation der Feldstärken der von $x = 0$ bis $x = b$ (bei festem Φ) in Richtung $\mathbf{k}_\Phi$ ausgehenden Teilwellen und ergibt an der Wellenfront unter Beachtung der Phasenverhältnisse die Feldstärke

$$\vec{E}(\Phi) = \sum_{i=1}^{b/\Delta x_i} \vec{E}_S \frac{\Delta\Phi}{2\pi} \frac{\Delta x_i}{b} = \sum_{i=1}^{b/\Delta x_i} \vec{E}_{S\Phi} \frac{\Delta x_i}{b} \rightarrow$$

$$\int_0^b \frac{\vec{E}_{S\Phi}}{b} dx = \int_0^b \frac{\vec{E}_{0\Phi}}{b} \exp j(\omega t + \vec{k}_\Phi \vec{r} + \Delta\varphi) dx$$

Das Winkelelement $\Delta\Phi/2\pi$ entspricht dem Anteil der vom Spalt b ausgehenden **Elementarwellen**, der in die Richtung Φ gestreut wird. Das Verhältnis $(\Delta x/b)$ entspricht einem Anteil des den Spalt b passierenden Strahlenbündels der Breite Δx.

$$\vec{E}(\Phi) = \frac{\vec{E}_{0\Phi}}{b} \int_0^b \exp j(\omega t + \vec{k}_\Phi \vec{r} + \Delta\varphi)dx$$

Unter Verwendung des Ausdruckes für die ortsabhängige Phasendiffe-renz $\Delta\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin\Phi$ erhalten wir die Feldstärke

$$\vec{E}(\Phi) = \frac{\vec{E}_{0\Phi}}{b} \exp j(\omega t + \vec{k}_\Phi \vec{r}) \int_0^b \exp j(\frac{2\pi x}{\lambda} \sin\Phi)dx$$

Damit erhält man die Amplitude der Feldstärke in Abhängigkeit vom Winkel Φ:

$$\vec{E}_0(\Phi) = \vec{E}_{0\Phi} \frac{\lambda}{2\pi b \sin\Phi} \left\{ \exp j\left(\frac{2\pi b}{\lambda} \sin\Phi \right) - 1 \right\}$$

Die Intensität ist dem Quadrat des Betrages der Feldstärke proportio-nal:

$$I(\Phi) \propto |E(\Phi)|^2 = E_{0\Phi}^2 \left[\frac{\exp j2\delta - 1}{2\delta} \right]^2$$

Mittels der Beziehungen

$$|E|^2 = \mathrm{Re}(E)^2 + \mathrm{Im}(E)^2 \qquad \exp j2\delta = \cos 2\delta + j\sin 2\delta$$

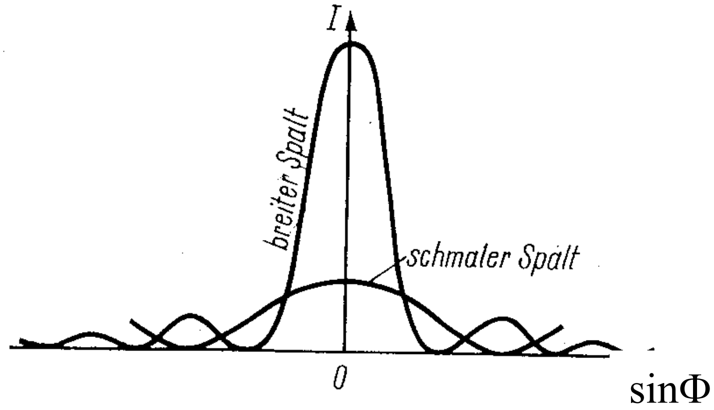
$$\sin^2\delta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\delta) \qquad \delta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin\Phi$$

erhalten wir

$$I(\Phi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi \right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi \right)^2}$$

Intensitätsverteilung bei Beugung am Spalt

$$I(\Phi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)^2}$$



Berechnung der Intensitätsminima

Mit

$$I(\Phi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)^2} = 0$$

folgt

$$\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right) = z\pi$$

Daraus ergibt sich die Bedingung für Intensitätsminima zu

$$b \sin\Phi = z\lambda$$

(Hinweis: Für die Beugung am Gitter ist dies die Bedingung für Intensitätsmaxima!)

<u>Berechnung der Intensitätsmaxima</u>

Es ist das Problem

$$\frac{dI(\Phi)}{d\Phi} = 0$$

für das Auftreten relativer Maxima zu lösen.
Die Intensitätsgleichung lässt sich in der vereinfachten Form

$$I(\Phi) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

aufschreiben. Durch Differenzieren nach α und Nullsetzen folgt

$$0 = \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \tan \alpha$$

Damit muss die transzendente Gleichung

$$\frac{\pi}{\lambda} b \sin \Phi = \tan\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \Phi\right)$$

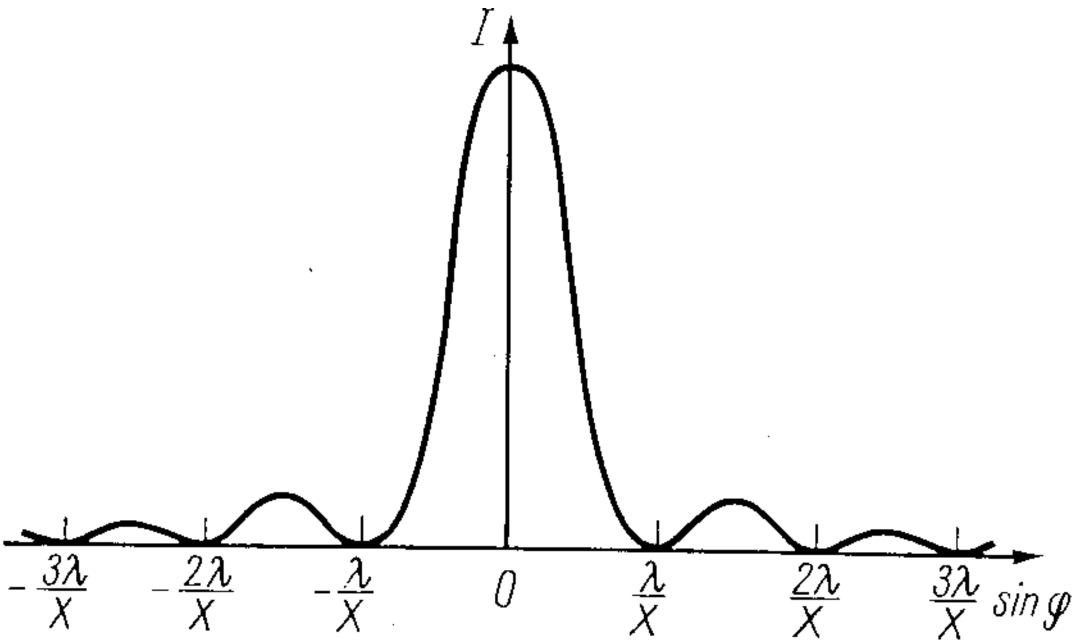
gelöst werden.

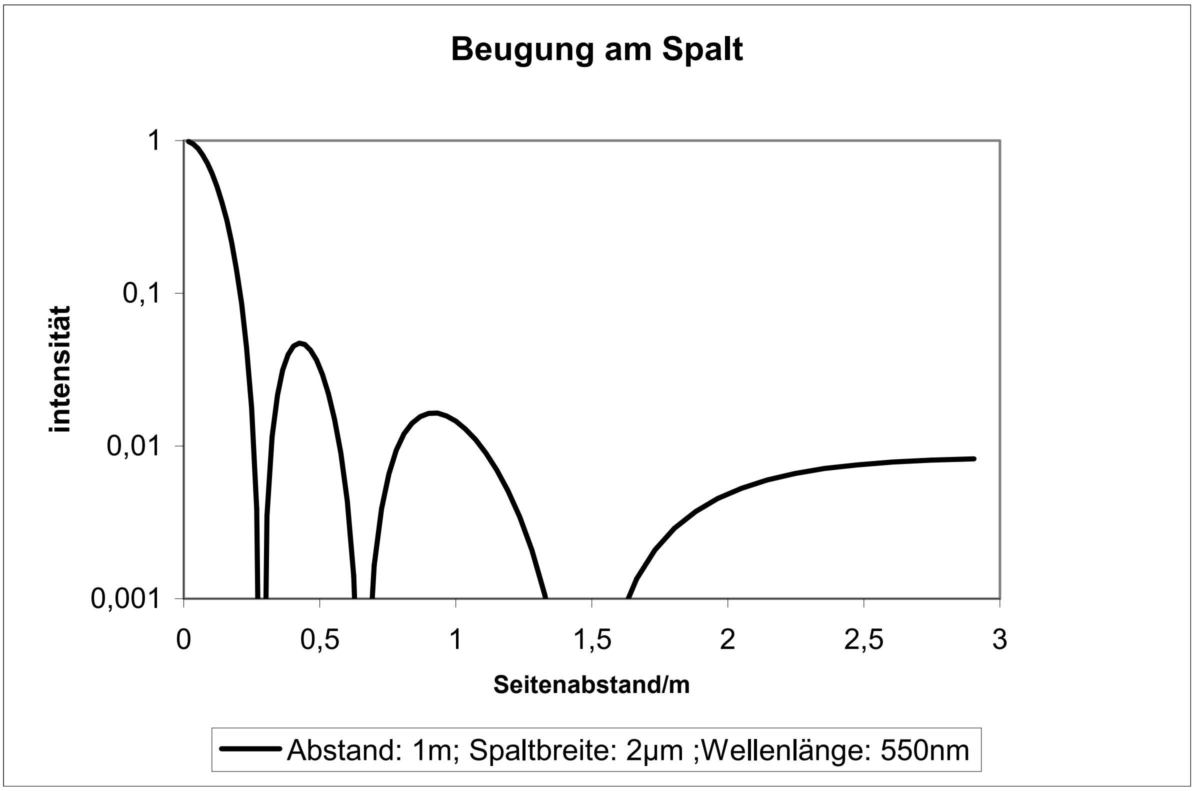
Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\sin \Phi = k_m \frac{\lambda}{b}$$

Wobei die Koeffizienten k_m Lösungen der Gleichung
$\pi k_m = \tan(\pi k_m)$ sind mit

$$\boxed{k_1 = 1{,}43.. \quad k_2 = 2{,}46.. \quad k_3 = 3{,}47.. \quad \text{usw.}}$$


I
$-\frac{3\lambda}{X}$
$-\frac{2\lambda}{X}$
$-\frac{\lambda}{X}$
0
$\frac{\lambda}{X}$
$\frac{2\lambda}{X}$
$\frac{3\lambda}{X}$
$\sin\varphi$


Beugung am Spalt
1
0,1
0,01
0,001
intensität
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
Seitenabstand/m
Abstand: 1m; Spaltbreite: 2µm ;Wellenlänge: 550nm