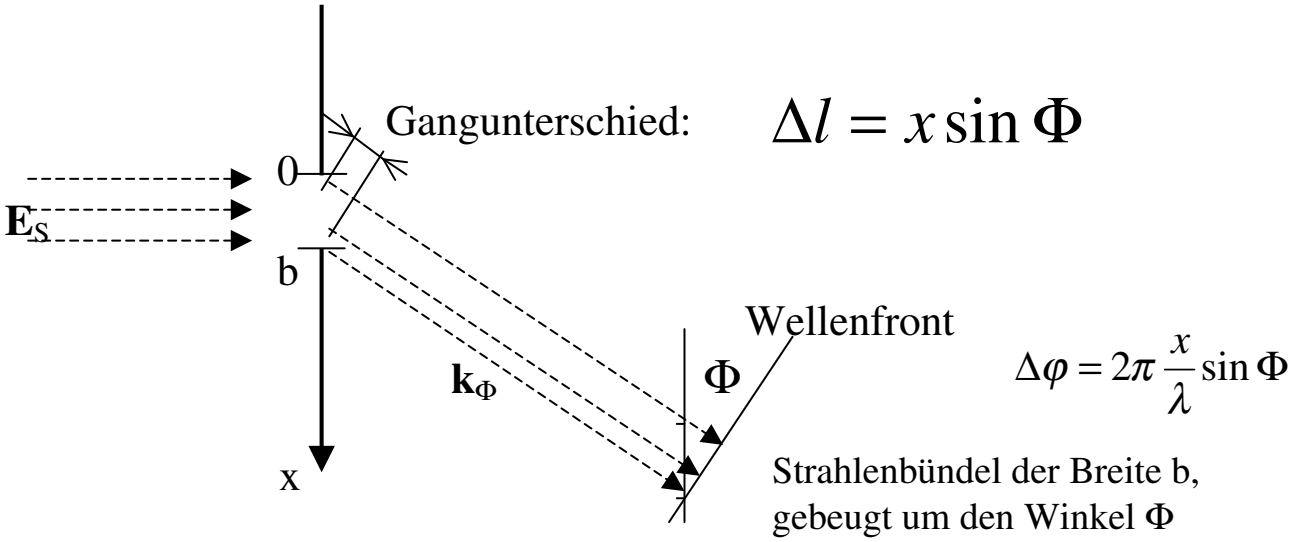
Fraunhofersche Beugung am Spalt



Phasendifferenz: $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \Phi$

Die Superposition aller unter dem Winkel Φ gebeugten Teilstrahlen entspricht einer Summation der Feldstärken an der von x=0 bis x=b (bei festem Φ) in Richtung $\mathbf{k}_\Phi$ ausgehenden Teilwellen und ergibt an der Wellenfront unter Beachtung der Phasenverhältnisse die Feldstärke

$$\vec{E}(\Phi) = \sum_{i=1}^{b/\Delta x_i} \vec{E}_S \frac{\Delta\Phi}{2\pi} \frac{\Delta x_i}{b} = \sum_{i=1}^{b/\Delta x_i} \vec{E}_{S\Phi} \frac{\Delta x_i}{b} \rightarrow$$

$$\int_0^b \vec{E}_{S\Phi} dx = \int_0^b \vec{E}_{0\Phi} \exp j(\omega t + \vec{k}_\Phi \vec{r} + \Delta\varphi) dx$$

Das Winkelelement $\Delta\Phi/2\pi$ entspricht dem Anteil der vom Punkt x ausgehenden Elementarwelle, die in die Richtung Φ gestreut wird. Das Verhältnis $(\Delta x/b)\cdot(\Delta\Phi/2\pi)\cdot\mathbf{E}_{0\Phi}$ entspricht der von x in Richtung Φ gebeugten Wellenamplitude.

$$\vec{E}(\Phi) = \frac{\vec{E}_{0\Phi}}{b} \int_0^b \exp\, j(\omega t + \vec{k}_\Phi \vec{r} + \Delta\varphi) dx$$

$$\vec{E}(\Phi) = \frac{\vec{E}_{0\Phi}}{b} \exp\, j(\omega t + \vec{k}_\Phi \vec{r}) \int_0^b \exp\, j(\frac{2\pi x}{\lambda} \sin\Phi) dx$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \frac{\lambda}{2\pi b \sin\Phi} \left\{ \exp j\left(\frac{2\pi b}{\lambda} \sin\Phi \right) - 1 \right\}$$

Aus der Feldstärke ermittelt man die Intensität durch Quadrieren:

$$I = I_0 \left[\frac{\lambda}{2\pi b \sin\Phi} \right]^2 \left\{ \exp j\left(\frac{2\pi b}{\lambda} \sin\Phi \right) - 1 \right\}^2$$

Der Faktor in den geschweiften Klammern ist komplex. Wir verwenden die Beziehungen

$|Z|^2 = \mathrm{Re}(Z)^2 + \mathrm{Im}(Z)^2$ $\qquad$ $\exp j\delta = \cos\delta + j \sin\delta$

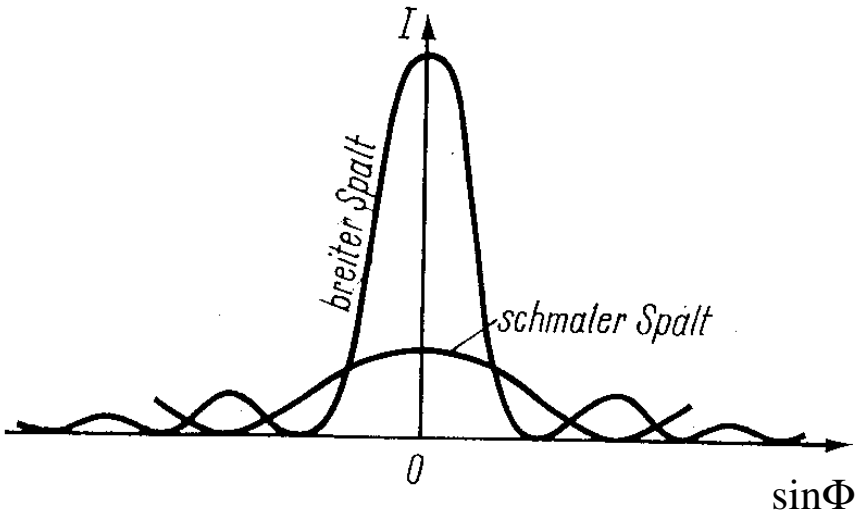
$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ $\qquad$ und erhalten für die

Intensitätsverteilung bei Beugung am Spalt

$$I(\Phi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi \right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi \right)^2}$$

Intensitätsverteilung bei Beugung am Spalt

$$I(\Phi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)^2}$$



Berechnung der Intensitätsminima

Mit

$$I(\Phi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)^2} = 0$$

folgt

$$\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right) = n\pi$$

Daraus ergibt sich die Bedingung für Intensitätsminima zu

$$b \sin\Phi = n\lambda$$

(Hinweis: Für die Beugung am Gitter ist dies die Bedingung für Intensitätsmaxima!)

Berechnung der Intensitätsmaxima

Es ist das Problem

$$\frac{dI(\Phi)}{d\Phi} = 0$$ für das Auftreten relativer Maxima zu lösen.

Die Intensitätsgleichung lässt sich in der vereinfachten Form

$$I(\Phi) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$ aufschreiben. Durch Differenzieren nach α und Nullsetzen folgt

$$0 = \alpha \cos\alpha - \sin\alpha \quad bzw. \quad \alpha = \tan\alpha$$

Damit muß die transzendente Gleichung

$$\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi = \tan\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin\Phi\right)$$

gelöst werden.

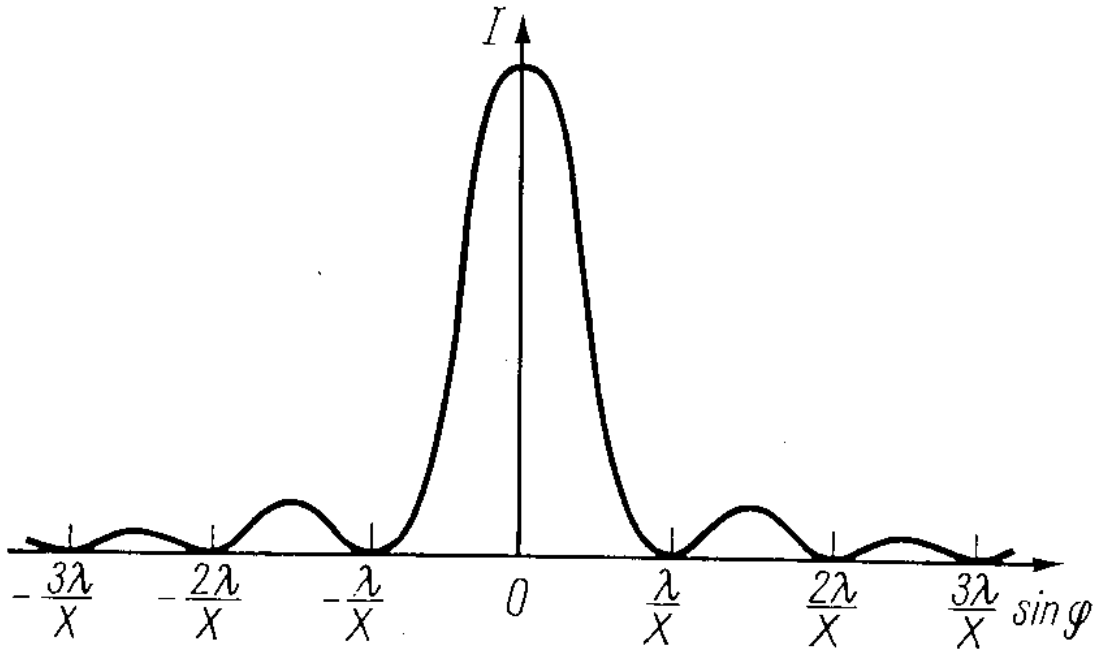
Diese Gleichung hat die Lösungen

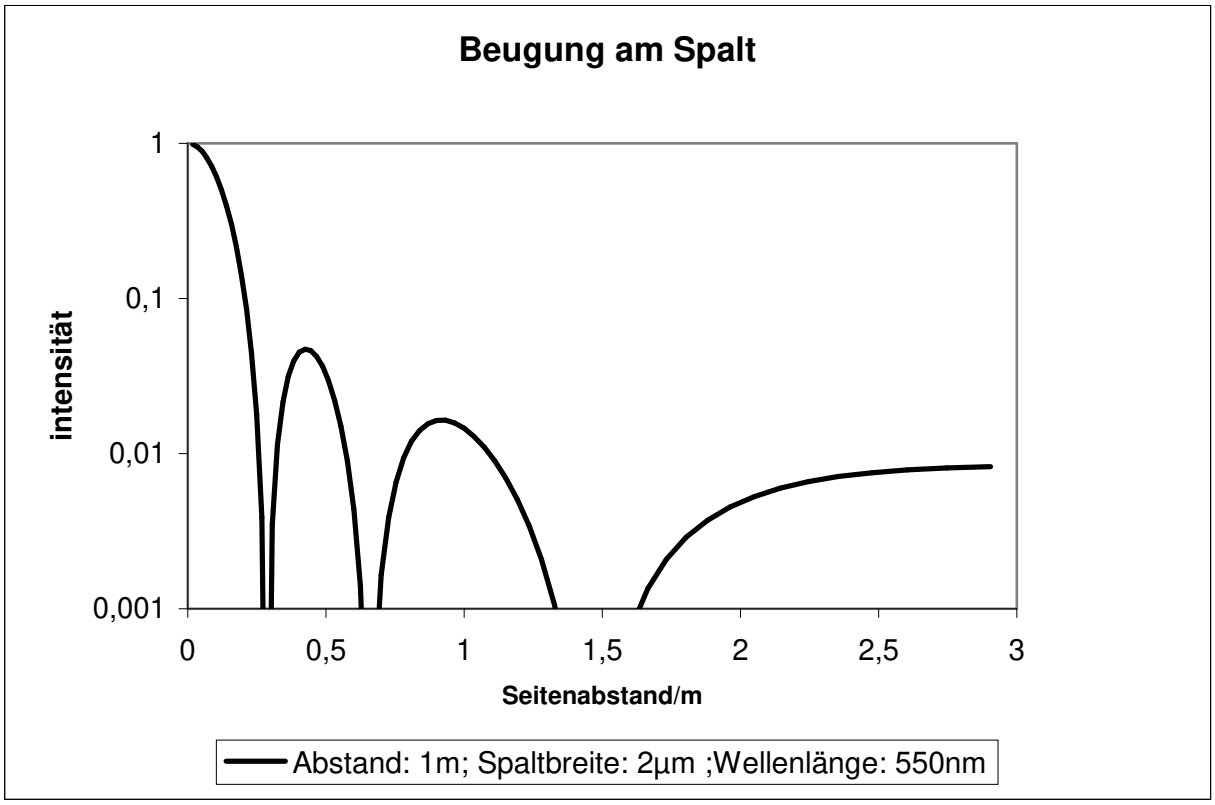
$$\sin\Phi = k_m \frac{\lambda}{b}$$

Wobei die Koeffizienten k_m Lösungen der Gleichung

$\pi k_m = \tan(\pi k_m)$ sind mit

$$k_1 = 1{,}43.. \quad k_2 = 2{,}46.. \quad k_3 = 3{,}47.. \quad usw.$$


I
$-\frac{3\lambda}{X}$
$-\frac{2\lambda}{X}$
$-\frac{\lambda}{X}$
0
$\frac{\lambda}{X}$
$\frac{2\lambda}{X}$
$\frac{3\lambda}{X}$
sin φ


Beugung am Spalt
intensität
1
0,1
0,01
0,001
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
Seitenabstand/m
Abstand: 1m; Spaltbreite: 2µm ;Wellenlänge: 550nm