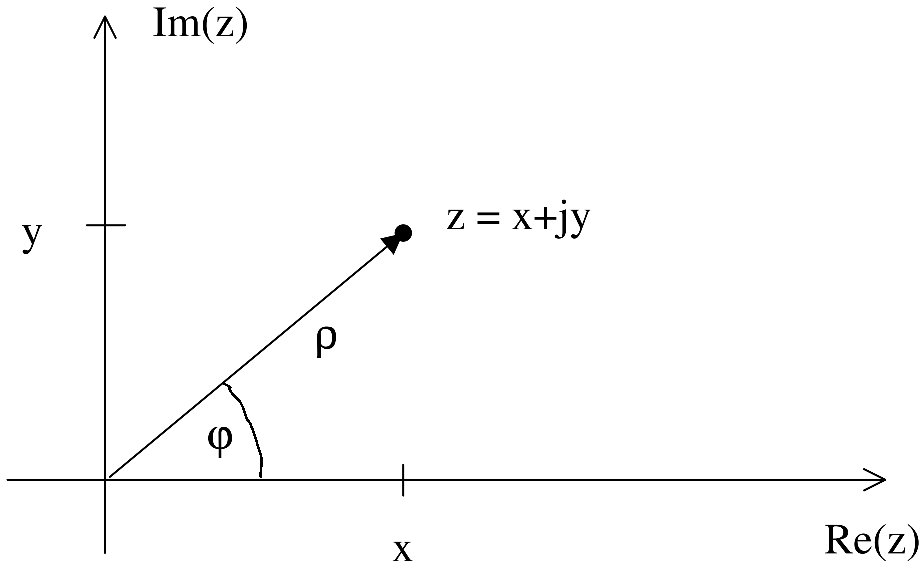
Trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl



$$j = \sqrt{-1} \qquad j^2 = -1 \qquad j^{-1} = -j$$

$$z = x + jy = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$\rho = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exponentialdarstellung:

$$z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \rho\exp(j\varphi)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \rho(-\sin\varphi + j\cos\varphi) = j\rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = jz$$

Harmonische Analyse einer periodischen Spannung

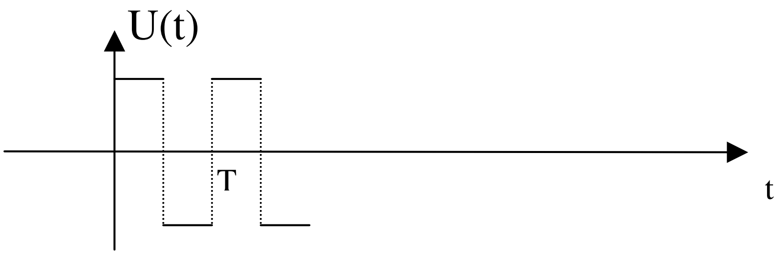
Gegeben sei eine im Intervall 0 <= t <= T periodische Spannung U(t). Sie kann spektral zerlegt werden in eine Reihe

$$U(t, n\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega t)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \exp(-jn\omega t) dt$$

Beispiel: Rechteckförmiger Spannungsverlauf mit der Periode T (Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$) und der Amplitude U_0 .
Es gelte: $U(t) = +U_0$ für $0 < t < T/2$
$U(t) = -U_0$ für $T/2 < t < T$



$$c_n = \frac{1}{T} \{ \int_0^{T/2} U_0 \exp(-jn\omega t) dt + \int_{T/2}^{T} -U_0 \exp(-jn\omega t) dt \}$$

$$\int_0^{T/2} \exp(-jn\omega t)dt = \frac{j}{n\omega}\exp(-j\omega t)\,\Big|_0^{T/2} = \frac{j}{n\omega}[\exp(-jn\pi)-1]$$

$$\int_{T/2}^{T} \exp(-jn\omega t)dt = \frac{j}{n\omega}\exp(-j\omega t)\,\Big|_{T/2}^{T} = \frac{j}{n\omega}[1-\exp(-jn\pi)]$$

$$c_n = -2j\frac{U_0}{n\omega}[1-\exp(-jn\pi)]$$

$$U(t) = -\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} 2j\frac{U_0}{n\omega}[1-\exp(-jn\pi)]\exp(jn\omega t)$$

Wegen exp(-jnπ) = cos(-nπ) + jsin(-nπ) = cos(nπ) = ±1 entfallen alle Faktoren [...] mit geradzahligem n. Gehen über zu m = 2n+1:

$$U(t) = -\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} j\frac{U_0}{m}\exp(jm\omega t)$$

Wegen der Symmetrie der Kosinusfunktion bleiben bei der Aufsummation über ±m nur die Sinusanteile der Exponentialfunktion übrig:

$$U(t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{U_0}{m}\sin(m\omega t)$$