

2.5. Energieübertragung im elektromagnetischen Feld

Vorbetrachtungen

Die Maxwelltheorie ist eine Feldtheorie. Das bedeutet, daß ihr die Annahme zugrunde liegt, daß der gesamte Raum und nicht nur die Gebiete, in denen sich elektrische Ladungen befinden, Träger der elektromagnetischen Vorgänge ist. Dabei wird angenommen, daß der Raum durch diese Vorgänge in einen besonderen Zustand (FARADAY sprach vom *elektrotonischen* Zustand) versetzt wird.

Die Momentanwerte der Bestimmungsstücke eines elektromagnetischen Feldes sollen diesen Zustand und die Maxwellschen Gleichungen seine raumzeitliche Entwicklung beschreiben.

Im Unterschied zu einer Fernwirkungstheorie gehören zu einer Feldtheorie lokale Entwicklungsgesetze. Die Maxwellschen Gleichungen sind offensichtlich solche lokalen Entwicklungsgesetze. Sie beschreiben durch ein System partieller Differentialgleichungen den Zusammenhang zwischen der räumlichen und der zeitlichen Änderung der elektromagnetischen Felder.

In diesem Abschnitt soll nun der Energieaustausch und damit die Energieübertragung in elektromagnetischen Feldern untersucht werden. Wenn man das einleitend beschriebene feldtheoretische Konzept zur Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge ernst nimmt, muß auch der Energieaustausch lokal, also durch ein geeignetes Feld beschrieben werden.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die folgenden

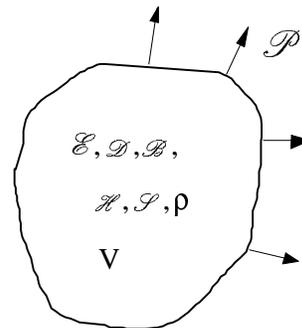
Annahmen

- Elektromagnetische Felder müssen dem Prinzip der Energieerhaltung genügen.
- Der Energietransport in einem elektromagnetischen Feld ist im allgemeinen richtungsabhängig und läßt sich durch ein Vektorfeld \mathcal{P} beschreiben, dessen Funktionswerte für alle $(r, t) \in \text{Db}\mathcal{P}$ die Leistungsdichte des Energietransports beschreiben.

Das Vektorfeld \mathcal{P} wird traditionell als *Poyntingscher Vektor* bezeichnet.

Ansatz:

Sei nun $(\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{B}, \mathcal{J}, \rho)$ ein elektromagnetisches Feld (also eine C^1 -Lösung von (MWG)), das auf einer Menge $G \times \mathbf{R}^3$ definiert ist, wobei G eine offene Teilmenge des \mathbf{R}^3 bezeichnet, und ist V eine von einer nach außen orientierte stückweise glatten geschlossenen Fläche A berandeten, ansonsten aber beliebige Teilmenge von G , so folgt aus dem Energiesatz die Beziehung



$$\underbrace{\oint_A \mathcal{P} \cdot d\mathcal{A}}_{\text{abtransportierte Energie}} + \underbrace{\int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} dV}_{\text{Ohmsche Verlustenergie}} = \underbrace{-\frac{d}{dt}}_{\text{zeitliche Abnahme}} \underbrace{\int_V \frac{1}{2}(\mathcal{E}\mathcal{D} + \mathcal{H}\mathcal{B}) dV}_{\text{der gespeicherten Energie}} . \quad (1)$$

Zentrale Frage: *Wie hängt das Leistungsflußdichtefeld \mathcal{P} von den Bestimmungsstücken des elektromagnetischen Feldes ab?*

Unter den oben gemachten Voraussetzungen kann man auf der rechten Seite von (1) die Differentiation mit der Integration vertauschen. Nimmt man nun zusätzlich an, daß die Materialkonstanten ϵ und μ höchstens von den Ortskoordinaten, nicht aber von der Zeit

abhängen, so erhält man aus $\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}(\mathcal{E}\mathcal{D} + \mathcal{H}\mathcal{B})$ mit der Produktregel die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}(\mathcal{E}\mathcal{D} + \mathcal{H}\mathcal{B}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathcal{E}}\mathcal{D} + \mathcal{E}\dot{\mathcal{D}} + \dot{\mathcal{H}}\mathcal{B} + \mathcal{H}\dot{\mathcal{B}}),$$

woraus wegen der vorausgesetzten Zeitinvarianz von ϵ und μ über

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}, \quad \dot{\mathcal{D}} = \epsilon \dot{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}, \quad \dot{\mathcal{B}} = \mu \dot{\mathcal{H}}$$

und

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathcal{E}}\mathcal{D} + \mathcal{E}\dot{\mathcal{D}}) = \frac{1}{2}\left(\epsilon \frac{1}{\epsilon} \dot{\mathcal{E}}\mathcal{D} + \mathcal{E}\dot{\mathcal{D}}\right) = \frac{1}{2}(\dot{\mathcal{D}}\mathcal{E} + \mathcal{E}\dot{\mathcal{D}}) = \mathcal{E}\dot{\mathcal{D}}$$

sowie

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathcal{H}}\mathcal{B} + \mathcal{H}\dot{\mathcal{B}}) = \frac{1}{2}\left(\mu \frac{1}{\mu} \dot{\mathcal{H}}\mathcal{B} + \mathcal{H}\dot{\mathcal{B}}\right) = \frac{1}{2}(\dot{\mathcal{B}}\mathcal{H} + \mathcal{H}\dot{\mathcal{B}}) = \mathcal{H}\dot{\mathcal{B}}$$

die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\mathcal{E} \mathcal{D} + \mathcal{H} \mathcal{B}) = \mathcal{E} \dot{\mathcal{D}} + \mathcal{H} \dot{\mathcal{B}} .$$

folgt. Wegen

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} + \dot{\mathcal{D}} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}}$$

gilt

$$\mathcal{E} \operatorname{rot} \mathcal{H} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} + \mathcal{E} \dot{\mathcal{D}} \quad \text{und} \quad \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mathcal{H} \dot{\mathcal{B}} ,$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\mathcal{E} \mathcal{D} + \mathcal{H} \mathcal{B}) = \mathcal{E} \operatorname{rot} \mathcal{H} - \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{E} - \mathcal{E} \mathcal{J} . \quad (2)$$

Durch eine Umstellung der Summanden in (1) erhält man

$$\oint_A \mathcal{P} \cdot d\mathcal{A} = - \int_V (\mathcal{E} \mathcal{J} + \mathcal{E} \dot{\mathcal{D}} + \mathcal{H} \dot{\mathcal{B}}) dV ,$$

woraus mit (2) der Ausdruck

$$\oint_A \mathcal{P} \cdot d\mathcal{A} = \int_V (-\mathcal{E} \operatorname{rot} \mathcal{H} + \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{E}) dV$$

folgt.

Mit $\operatorname{div}(\mathcal{E} \times \mathcal{H}) = \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{E} - \mathcal{E} \operatorname{rot} \mathcal{H}$ (vgl. Aufgabe 1.16) erhält man

$$\oint_A \mathcal{P} \cdot d\mathcal{A} = \int_V \operatorname{div}(\mathcal{E} \times \mathcal{H}) dV . \quad (3)$$

Da V voraussetzungsgemäß ein von einer stückweise glatten geschlossenen Fläche berandetes, ansonsten aber beliebiges Gebiet $V \subseteq G$ ist, erhält man aus (3) mit dem Gaußschen Integralsatz schließlich den

Satz (POYNTING, 1884): Für zeitinvariante Materialkenngrößen ϵ und μ gilt

$$\operatorname{div} \mathcal{P} = \operatorname{div} \mathcal{E} \times \mathcal{H} . \quad \square$$

Problem: Gilt $\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$?

Nach den Ausführungen des Abschnittes 1.4. ist klar, daß das gesuchte Vektorfeld \mathcal{P} durch seine Quellen allein noch nicht festgelegt ist.

Überlagert man dem zunächst noch hypothetischen Feld \mathcal{P} , von dem wir annehmen, daß es der Gleichung (1) genügt, ein beliebiges quellenfreies Feld $\tilde{\mathcal{P}}$, so gilt für $\mathcal{P} + \tilde{\mathcal{P}}$ die zu (1) analoge Gleichung

$$\oint_A (\mathcal{P} + \tilde{\mathcal{P}}) \cdot d\mathcal{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathcal{E}\mathcal{D} + \mathcal{H}\mathcal{B}) dV - \int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} dV ,$$

weil wegen $\text{div} \tilde{\mathcal{P}} = 0$ aus dem Gaußschen Satz die Beziehung

$$\oint_A \tilde{\mathcal{P}} \cdot d\mathcal{A} = 0$$

folgt.

Das bedeutet, wenn es uns nur darum ginge, daß die globale Gleichung (1) erfüllt ist, könnten wir für $\tilde{\mathcal{P}}$ ein ganz beliebiges quellenfreies Feld wählen, z.B. auch das Feld $\tilde{\mathcal{P}} = 0$.

Nach den Vorbetrachtungen am Anfang dieses Abschnittes reicht es aber gerade nicht aus, nur die Gleichung (1) und die daraus folgende Beziehung $\text{div} \mathcal{P} = \text{div} \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ zu erfüllen, weil zu einer feldtheoretischen Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen selbstverständlich auch eine lokale Beschreibung des Energieaustauschs im elektromagnetischen Feld gehört, aber nicht irgendeine, sondern eine, die im Rahmen der Genauigkeitsgrenzen des gewählten Modells die in der Realität ablaufenden Vorgänge möglichst gut widerspiegelt. Und hier zeigt die Erfahrung, das bisher die Annahme, für das dem Feld $\mathcal{E} \times \mathcal{H}$ möglicherweise zu überlagernde quellenfreie Feld $\tilde{\mathcal{P}}$ stets, also unabhängig von der jeweiligen experimentellen Anordnung, das *Nullvektorfeld* zu wählen, nicht durch ein Experiment falsifiziert worden ist. Wir ergänzen deshalb das in Abschnitt 2.4. eingeführte Axiomensystem (MWG) durch das folgende

Axiom: Zwischen dem Feld \mathcal{P} des Poyntingvektors und den Feldern der elektrischen und magnetischen Feldstärke \mathcal{E} bzw. \mathcal{H} besteht die Beziehung

$$\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} . \quad \square$$

Anmerkung: In der Literatur wird mitunter auch die durch die Beziehung $\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ ergänzte Gleichung (1) oder die entsprechende lokale Leistungsbilanz

$\text{div}(\mathcal{E} \times \mathcal{H}) = -p_{\text{Ohm}} - \dot{w}_{\text{el}} - \dot{w}_{\text{mag}}$ als Poyntingscher Satz bezeichnet.

Beispiel 1 (Energieübertragung in einer ebenen elektromagnetischen Welle) :

Es sei

$$f \in C^2(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}),$$

$$\mathcal{E}^+ \in \mathbf{R}^3 \mathbf{V} / \text{m} \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}^+ = (0, E_y^+, E_z^+)$$

und (4)

$$\mathcal{H}^+ \in \mathbf{R}^3 \mathbf{A} / \text{m} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}^+ = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e_x \times \mathcal{E}^+ .$$

Wie in Aufgabe 2.02 gezeigt wird, liefern die durch

$$\mathcal{E}(\nu, t) := \mathcal{E}^+ f(x - ct), \quad \mathcal{H}(\nu, t) := \mathcal{H}^+ f(x - ct) \quad (5)$$

definierten Felder

$$\mathcal{E} : \mathbf{R}^3 \text{m} \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^3 \mathbf{V} / \text{m} \quad \text{und} \quad \mathcal{H} : \mathbf{R}^3 \text{m} \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^3 \mathbf{A} / \text{m}$$

eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\kappa = 0$ und $\rho = 0$. Diese Lösung ist eine ebene Welle, die sich in Richtung der x-Achse mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Dann gilt für alle $(\nu, t) \in \mathbf{R}^3 \text{m} \times \mathbf{R}^s$

$$\mathcal{P}(\nu, t) = \mathcal{E}(\nu, t) \times \mathcal{H}(\nu, t),$$

woraus mit (5) die Gleichung

$$\mathcal{P}(\nu, t) = \mathcal{E}^+ \times \mathcal{H}^+ f^2(x - ct)$$

und mit (4) und der Identität $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ wegen

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathcal{E}^+ \times (e_x \times \mathcal{E}^+) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathcal{E}^+|^2 e_x$$

die Beziehung

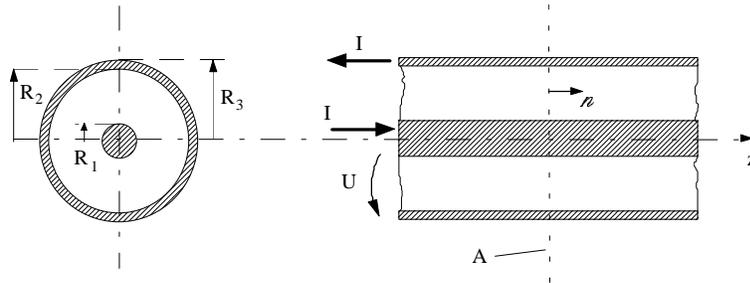
$$\mathcal{P}(\nu, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathcal{E}^+|^2 f^2(x - ct) e_x$$

folgt.

Der Leistungsflußdichtevektor $\mathcal{P}(\nu, t)$ zeigt also an jeder Stelle (ν, t) unabhängig vom Vorzeichen von $f(x - ct)$ immer in Richtung der Wellenausbreitung.

Beispiel 2 (Energieübertragung in einem verlustfreien Koaxkabel):

Gegeben sei ein unendlich langes gerades ideal leitendes Koaxkabel (siehe Skizze). Zwischen den Leitern befinde sich ein idealer Isolator mit der Dielektrizitätskonstante ϵ und der Permeabilität μ .



Zwischen dem Innen- und dem Außenleiter liege eine konstante Spannung U an. Im Innen- bzw. Außenleiter fließe ein konstanter Strom in Richtung bzw. entgegengesetzt zur Richtung der in der Skizze eingetragenen z -Achse. Mit den üblichen Symmetrieanahmen (vgl. Aufg. 3.01, 3.10, 3.17) erhält man in Bezug auf das durch diese z -Achse definierte ρ - α - z -Zylinderkoordinatensystem für \mathcal{E} , \mathcal{H} und \mathcal{P} die Beziehungen

$$\mathcal{E}(\rho, \alpha, z) = \begin{cases} \frac{U}{\ln R_2/R_1} \frac{1}{\rho} e_\rho & \text{für } R_1 \leq \rho \leq R_2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(\rho, \alpha, z) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi\rho} e_\alpha & \text{für } R_1 \leq \rho \leq R_2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathcal{P}(\rho, \alpha, z) = \begin{cases} \frac{UI}{2\pi \ln R_2/R_1} \frac{1}{\rho^2} e_z & \text{für } R_1 \leq \rho \leq R_2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(0 \leq \alpha < 2\pi, \quad z \in \mathbf{Rm}).$$

Ist nun A eine senkrecht zur z-Achse stehende und in Richtung von e_z orientierte Ebene, so genügt es, wenn man sich bei der Berechnung des Integrals $\int_A \mathcal{P} \cdot d\mathcal{A}$ auf die Integration über die zugehörige Kreisringfläche zwischen den beiden Leitern beschränkt, weil der Poyntingsche Vektor auf den übrigen Teilen von A verschwindet. Mit dem Flächenelement $d\mathcal{A} = \rho \, d\rho \, d\alpha e_z$ erhält man dann nach einer einfachen Zwischenrechnung für den Fluß des Poyntingschen Vektors durch die Fläche A den Wert

$$\int_A \mathcal{P} \cdot d\mathcal{A} = UI \quad .$$

Das bedeutet, die gesamte Leistung wird in diesem Koaxkabel im Feld zwischen den beiden Leitern transportiert. Die Leiterquerschnitte und der Außenraum sind feldfrei und liefern demzufolge keinen Beitrag zum Energietransport, und die transportierte Leistung ist gleich dem Produkt aus der Spannung U zwischen den Leitern und dem Strom I, der in den Leitern fließt.

Beispiel 3 (Energietransport in einem verlustbehafteten Koaxkabel):

Gegeben sei die gleiche Leiteranordnung, wie in Beispiel 2. Im Innen- und im Außenleiter fließe in den dort angegebenen Richtungen ein konstanter Strom. Das Dielektrikum zwischen den Leitern sei wieder ideal nichtleitend. Im Unterschied zu Beispiel 2 soll aber nun der Innen- und der Außenleiter des Kabels eine endliche Leitfähigkeit κ haben.

Unter der Annahme einer homogenen Stromdichteverteilung im Innen- und Außenleiter erhält man für die Felder \mathcal{E} , \mathcal{H} und \mathcal{P} im Inneren des Innenleiters, also für $0 \leq \rho \leq R_1$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $z \in \mathbf{Rm}$ die Beziehungen

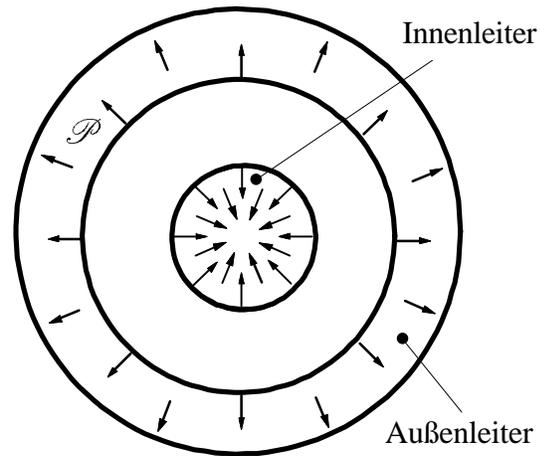
$$\mathcal{E}(\rho, \alpha, z) = \frac{I}{\pi \kappa R_1^2} e_z \quad ,$$

$$\mathcal{H}(\rho, \alpha, z) = \frac{I\rho}{2\pi R_1^2} e_\alpha \quad ,$$

$$\mathcal{P}(\rho, \alpha, z) = - \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 \kappa R_1^4} e_\rho \quad .$$

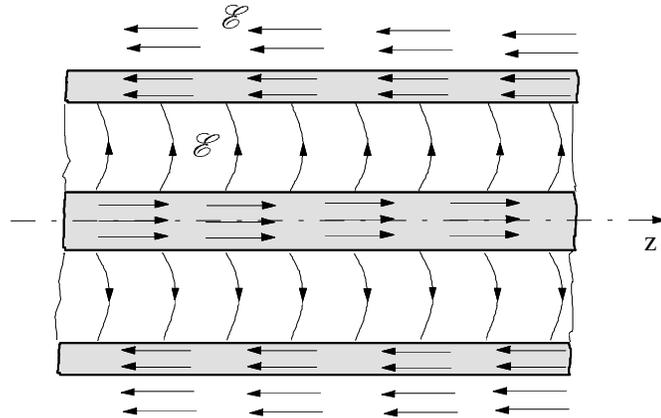
Für das Feld im Außenleiter lassen sich ähnliche Beziehungen angeben, darauf soll aber hier verzichtet werden.

In der nebenstehenden Skizze ist das Feld des Poyntingschen Vektors im Querschnitt des Innen- und des Außenleiters in vereinfachter Form dargestellt. Dieses Bild zeigt deutlich, daß nun wegen der endlichen Leitfähigkeit des Innen- und des Außenleiters ständig Energie vom Feld zwischen den Leitern in den Innen- und den Außenleiter fließt.



Während für das \mathcal{H} -Feld im Raum zwischen Innen- und Außenleiter die gleiche Beziehung wie im Beispiel 2 gilt, lassen sich für die Felder \mathcal{E} und \mathcal{P} in diesem Gebiet die entsprechenden Beziehungen mit elementaren Hilfsmitteln nicht ohne weiteres angeben.

Auf alle Fälle aber müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke an den Grenzflächen zwischen den Leitern und dem Dielektrikum zwischen den Leitern und im Außenraum stetig sein. Weil die elektrische Feldstärke im Inneren des Innen- bzw. des Außenleiters in Richtung von e_z bzw. $-e_z$ zeigt, wird man für das elektrische Feld näherungsweise die nebenstehend skizzierten Feldlinien erhalten.



Weil die Tangentialkomponenten von \mathcal{E} auch auf der Außenfläche des Außenleiters stetig sein müssen, ist das Außengebiet des Kabels nicht mehr feldfrei. Immerhin verschwindet dort das Magnetfeld und damit auch das Feld des Poyntingschen Vektors.

Betrachten wir nun einen Innenleiterabschnitt der Länge ℓ . Dann erhält man für den Fluß des Poyntingschen Vektors durch die Oberfläche dieses Leiterabschnittes den Wert

$$P_V := \frac{I^2 R_1}{2\pi^2 \kappa R_1^4} 2\pi \kappa R_1 \ell = \frac{I^2 \ell}{\pi \kappa R_1^2} .$$

Mit

$$R_i = \frac{\ell}{\kappa\pi R_1^2}$$

gilt

$$P_v = R_i I^2 .$$

P_v ist also die in diesem Innenleiterabschnitt in Wärme umgesetzte ohmsche Verlustleistung.

Für den Außenleiter kann man diese Berechnung sinngemäß wiederholen und käme zu einem analogen Ergebnis.

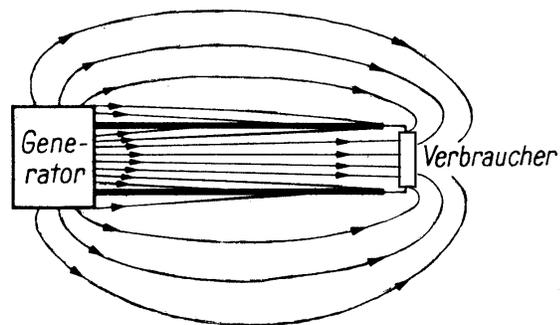
Bemerkungen:

Bei dem in Beispiel 2 betrachteten verlustfreien Kabel wird die Energie (auch bei Gleichspannung und Gleichstrom !) nicht in den beiden Leitern des Kabels, sondern im Dielektrikum zwischen diesen Leitern transportiert. Die Leitung dient gewissermaßen als "Geländer", um die Energie an den gewünschten Ort zu transportieren.

Auch in der im Beispiel 3 untersuchten verlustbehafteten Leitung ist die axiale Komponente des Poyntingschen Vektors im Inneren der beiden Leiter null. Wiederum wird die Energie im Dielektrikum zwischen den Leitern transportiert, und die in diesen Leitern in Wärme umgesetzte Verlustleistung fließt vom Feld zwischen den beiden Leitern über das Feld des Poyntingschen Vektors in diese Leiter.

In den hier betrachteten Beispielen zur Energieübertragung in koaxialen Leitungen liefern die Felder im Inneren der Leiter überhaupt keinen Beitrag zum Energietransport in der Längsrichtung der Leitung. Das muß bei allgemeineren Leiteranordnungen, bei denen es nicht so stark ausgeprägte Symmetrien wie bei einem Koaxkabel gibt, nicht unbedingt der Fall sein. Generell liefern auch bei solchen Leitungen die Felder im Inneren der Leiter zumindest dann, wenn die Übertragungsverluste der Leitung klein gegenüber der übertragenen Leistung sind, nur geringe Beiträge zum Leistungstransport auf solchen Leitungen. Man denke außerdem daran, daß bei höheren Frequenzen wegen des Skin效ekts (s. Abschnitt 5.2.) elektromagnetische Felder von außen nur in eine dünne Randschicht der Leiter eindringen.

Damit ergibt sich allgemein das nebenstehende qualitative Bild für den durch die Feldlinien des Poyntingschen Vektors dargestellten Leistungstransport von einem "Generator", in dem z.B. mechanische oder chemische Energie in elektrische Energie umgewandelt wird, zu einem "Verbraucher", in dem die ankommende elektrische Energie wieder in andere Energieformen umgewandelt wird. Entlang der Übertragungsleitung verläuft eine Energieströmung mehr oder minder parallel zu der Leitung, ein Teil



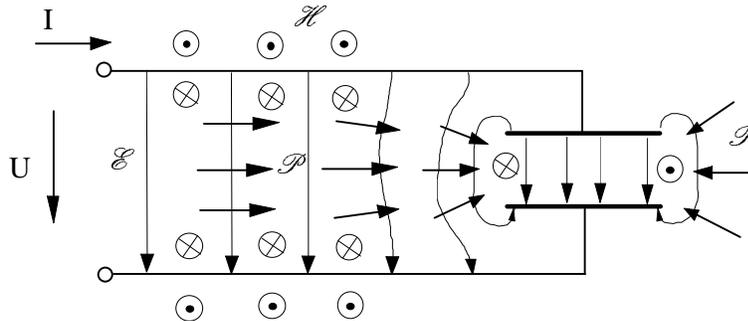
(nach [Sim 90])

der Feldlinien des Poyntingschen Vektors "endet" auf der Leiteroberfläche, d.h., ein Teil der transportierten Energie fließt in die Leiter und deckt die ohmschen Verluste der Leitung.

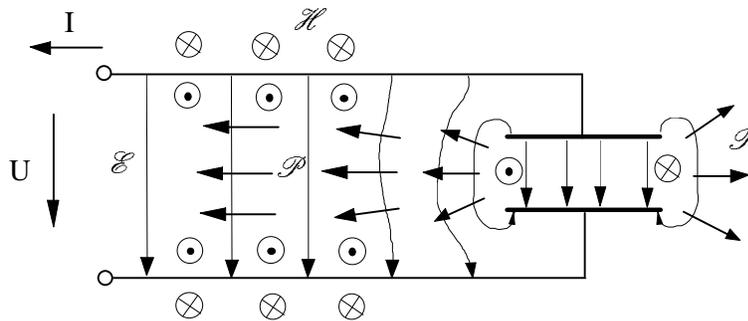
Beispiel 4 (Auf- und Entladung eines Plattenkondensators):

Die beiden folgenden Skizzen zeigen qualitative Feldbilder für den Auf- und Entladevorgang eines an eine Paralleldrahtleitung angeschlossenen Plattenkondensators.

Aufladevorgang:



Entladevorgang:

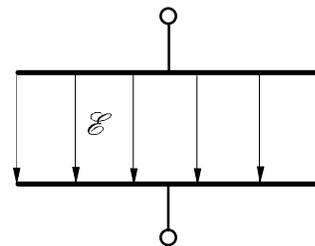


Diese Feldbilder zeigen deutlich, daß beim Aufladevorgang dem Kondensator über das Streufeld Energie zugeführt wird, während beim Entladevorgang die im Kondensator gespeicherte Energie über das Streufeld abtransportiert wird.

Bemerkungen:

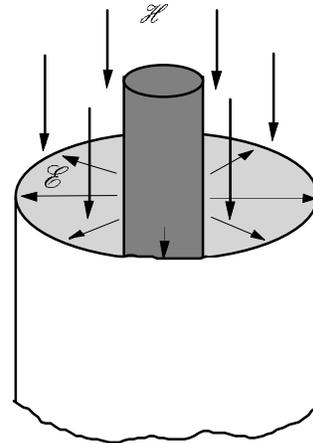
Diese Feldbilder zeigen, daß das durch die Beziehung $\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ definierte Leistungstransportfeld den Auf- und Entladevorgang eines Plattenkondensators zumindest qualitativ gut beschreibt, ohne daß man ein zusätzliches quellenfreies Feld $\tilde{\mathcal{P}}$ überlagern muß. Auch wenn für einen Plattenkondensator mit hinreichend großer Plattenfläche A und hinreichend kleinem Plattenabstand d die Kapazität dieses Kondensators nur geringfügig von der unter Vernachlässigung des Streufeldes berechneten Kapazität $C = \epsilon A/d$ abweicht, machen diese Feldbilder aber auch deutlich, daß ein Kondensator ohne Streufeld (man denke etwa an einen Kugelkondensator aus zwei geschlossenen konzentrischen Kugeln) nicht als Energiespeicher verwendet werden kann. Ein solcher Kondensator ist aber technisch nicht interessant.

Wie man an Hand der nebenstehenden Skizze deutlich sieht, steht die Vernachlässigung des Streufeldes am Rand eines Plattenkondensators auch im Widerspruch zu den Maxwell'schen Gleichungen, weil offensichtlich am Rand des Plattenkondensators die Tangential-komponente der elektrischen Feldstärke nicht stetig in den als feldfrei angenommenen Außenraum übergeht.



Beispiel 5:

Gegeben sei nebenstehend skizzierte koaxiale Anordnung. Zwischen den als unendlich lang angenommenen koaxialen Zylindern gebe es ein konstantes elektrisches Feld \mathcal{E} . Das Dielektrikum zwischen den Zylindern sei ideal nichtleitend. Die gesamte Anordnung werde von einem axial gerichteten homogenen zeitlich konstanten Magnetfeld \mathcal{H} durchsetzt. Offensichtlich bilden die Feldlinien des Poyntingfeldes $\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ konzentrische Kreise um die Leiterachse.



Das bedeutet, daß in dieser Anordnung trotz der statischen Felder \mathcal{E} und \mathcal{H} ständig Energie zirkuliert.

Dieses Phänomen galt lange Zeit als Paradoxon und gab immer wieder Anlaß, darüber nachzudenken, ob nicht doch dem durch $\mathcal{E} \times \mathcal{H}$ definierten Leistungsflußdichtefeld zumindest unter bestimmten Umständen zusätzlich ein quellenfreies Feld $\tilde{\mathcal{F}}$ überlagert werden müsse, um einen Ausweg aus solchen, "dem gesunden Menschenverstand" widersprechenden Situationen offenzuhalten.

Aus der Sicht der speziellen Relativitätstheorie ist die Situation aber keineswegs so paradox, wie es auf den ersten Blick scheint. Nach dem Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalent entspricht der im Zwischenraum der obigen koaxialen Anordnung gespeicherten Energie eine gewisse, wenn auch sehr kleine Masse, und der kreisförmigen Energieströmung damit ein Drehimpuls. Dieser Impuls wird dem Feld beim Aufladen des Kondensators zugefügt und beim Entladen durch die Kraft, die in dem Magnetfeld \mathcal{H} an einem Leiter angreift, der während des Entladevorganges die beiden koaxialen Zylinder miteinander verbindet, wieder in einen mechanischen Impuls überführt. Gerade wegen der in der Zeit zwischen Auf- und Entladevorgang stationär kreisenden Energie genügt der gesamte Vorgang dem Prinzip von der Impulserhaltung.

Eine ausführlichere Diskussion dieses Problems und weitere Beispiele dieser Art findet man in [Fey 91], wegen einer Herleitung der Erhaltungssätze für Impuls und Drehimpuls eines elektromagnetischen Feldes sei insbesondere auf [Jac 83] verwiesen, vgl. auch [Lud 74] und [Gre 91].

Eine weniger stark idealisierte Version von Beispiel 5 wird schon 1890 von HEINRICH HERTZ in seiner Arbeit *Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper* [Her 90] erwähnt. Er schreibt dort auf den Seiten 602 und 603: "Ruht ein Magnet dauernd neben einen electricirten Körper, so muss zufolge dieses Resultats die Energie der Nachbarschaft sich in beständiger Bewegung befinden, allerdings in geschlossenen Bahnen. Ein grösseres Bedenken scheint mir in der Frage zu liegen, wie weit bei unseren gegenwärtigen Kenntnissen von der Energie die Localisation derselben und ihre Verfolgung von Punkt zu Punkt überhaupt Sinn und Bedeutung hat. Derartige Betrachtungen sind noch nicht durchgeführt bei den einfachsten Energieumsätzen der gewöhnlichen Mechanik; es ist daher die Frage noch unerledigt, ob und in welchem Umfange der Begriff der Energie eine solche Behandlungsweise zulässt".

Beispiel 5 und seine verschiedenen Varianten galten lange Zeit als mögliche Falsifikatoren für die weiter oben als Axiom eingeführte Beziehung $\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$. Mit dem Nachweis ihrer Verträglichkeit mit dem Prinzip von der Impulserhaltung und der speziellen Relativitätstheorie hat dieses Axiom einen weiteren wichtigen Test bestanden. Selbstverständlich ist auch damit dieses Axiom nicht "bewiesen".

Konsistenz des Maxwellschen Gleichungssystems

Elektromagnetische Felder sind im Abschnitt 2.4. axiomatisch als mathematische Objekte eingeführt worden, nämlich als Lösungen des Systems der Maxwellschen Gleichungen. In einer Reihe von Übungsaufgaben haben wir inzwischen Lösungen dieses Gleichungssystem diskutiert. Damit ist zugleich gezeigt worden, daß das System der Maxwellschen Gleichungen nicht widersprüchlich ist, weil sonst die Menge seiner Lösungen leer wäre. Folglich erfüllt das Maxwellsche Gleichungssystem zumindest die Minimalforderung für ein brauchbares Axiomensystem.

Im Beweis für den folgenden Satz zeigen wir mit Hilfe einer Leistungsbetrachtung, daß sich die Lösungen des Maxwellschen Gleichungssystems mit Hilfe physikalisch "vernünftiger" Randbedingungen eindeutig festlegen lassen.

Satz: V sei ein beschränktes abgeschlossenes Gebiet in einem Medium mit der Leitfähigkeit $\kappa > 0$, der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon > 0$ und der Permeabilität $\mu > 0$. Das Gebiet V werde von einer stückweise glatten Fläche berandet.

Dann wird durch die für alle $r \in V$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ vorgegebenen Anfangswerte

$$\mathcal{E}(r, t_0), \quad \mathcal{D}(r, t_0), \quad \mathcal{H}(r, t_0), \quad \mathcal{B}(r, t_0), \quad \mathcal{J}(r, t_0), \quad \rho(r, t_0)$$

die Lösung der Maxwellschen Gleichungen eindeutig festgelegt, wenn zusätzlich die Tangentialkomponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} auf der Fläche A für alle Zeiten $t \geq t_0$ vorgegeben sind.

Beweis:

Angenommen, das Maxwellsche Gleichungssystem hätte unter den angegebenen Voraussetzungen zwei Lösungen $(\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{D}^{(1)}, \mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{J}^{(1)}, \rho^{(1)})$ und $(\mathcal{E}^{(2)}, \mathcal{D}^{(2)}, \mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{B}^{(2)}, \mathcal{J}^{(2)}, \rho^{(2)})$. Weil die Maxwellschen Gleichungen in Bezug auf die Variablen $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{B}, \mathcal{J}, \rho$ ein homogenes lineares Gleichungssystem sind, ist dann auch das durch $\mathcal{E}^{(0)} := \mathcal{E}^{(1)} - \mathcal{E}^{(2)}, \dots, \rho^{(0)} := \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$ definierte Feld eine Lösung der Maxwell-Gleichungen, wobei für diese Lösung die Anfangswerte bei $t = t_0$ verschwinden und zusätzlich auf A die Tangentialkomponenten von $\mathcal{E}^{(0)}$ und $\mathcal{H}^{(0)}$ für alle $t \geq t_0$ verschwinden. Als Lösung der Maxwell-

Gleichungen genügt $(\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}, \dots, \rho^{(0)})$ unter Berücksichtigung der Beziehungen $\mathcal{D}^{(0)} = \varepsilon \mathcal{E}^{(0)}$, $\mathcal{B}^{(0)} = \mu \mathcal{H}^{(0)}$ und $\mathcal{S}^{(0)} = \kappa \mathcal{E}^{(0)}$ für alle $t \geq t_0$ der Bedingung

$$\oint_A \mathcal{E}^{(0)}(\nu, t) \times \mathcal{H}^{(0)}(\nu, t) d\mathcal{A} + \kappa \int_V (\mathcal{E}^{(0)}(\nu, t))^2 dV = \quad (1)$$

$$= - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\varepsilon (\mathcal{E}^{(0)}(\nu, t))^2 + \mu (\mathcal{H}^{(0)}(\nu, t))^2) dV.$$

Wegen der Voraussetzungen über die Tangentialkomponenten von $\mathcal{E}^{(0)}$ und $\mathcal{H}^{(0)}$ verschwindet das erste Integral auf der linken Seite von (1) für alle $t \geq t_0$. Damit vereinfacht sich (1) zu

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\varepsilon (\mathcal{E}^{(0)}(\nu, t))^2 + \mu (\mathcal{H}^{(0)}(\nu, t))^2) dV = - \kappa \int_V (\mathcal{E}^{(0)}(\nu, t))^2 dV. \quad (2)$$

Der Integrand auf der rechten Seite von (2) ist eine nichtnegative Zeitfunktion. Unter Berücksichtigung des vor dem Integral stehenden Minuszeichen ist also die rechte Seite von (2) eine stetige nichtpositive Zeitfunktion.

Die Integranden des auf der linken Seite von (2) stehenden Integrals sind nichtnegative Zeitfunktionen. Folglich kann auch das auf der linken Seite von (2) stehende Integral nur eine nichtnegative Zeitfunktion sein. Dieses Integral ist gleich der zum Zeitpunkt $t \geq t_0$ im Feld gespeicherten Energie $W(t)$. Aus der Definition von $\mathcal{E}^{(0)}$ und $\mathcal{H}^{(0)}$ erhält man für den Anfangswert von W zum Zeitpunkt t_0 die Beziehung $W(t_0) = 0$.

Mit den vorangegangenen Überlegungen folgt aus (2), daß die Funktion W im Falle $\kappa > 0$ für alle $t \geq t_0$ den Bedingungen $W(t) \geq 0$ und $\dot{W}(t) < 0$ und im Falle $\kappa = 0$ für alle $t \geq t_0$ den Bedingungen $W(t) \geq 0$ und $\dot{W}(t) = 0$ genügen muß. Außerdem soll W der Anfangsbedingung $W(t_0) = 0$ genügen. Diese Beziehungen können nur erfüllt werden, wenn $W(t)$ für alle $t \geq t_0$ verschwindet.

Dann gilt aber $\mathcal{E}^{(0)} = 0$ und $\mathcal{H}^{(0)} = 0$ und damit $\mathcal{D}^{(0)} = 0$, $\mathcal{B}^{(0)} = 0$, $\mathcal{S}^{(0)} = 0$ und $\rho^{(0)} = 0$, d.h., im Widerspruch zu der obigen Annahme sind die Lösungen $(\mathcal{E}^{(1)}, \dots, \rho^{(1)})$ und $(\mathcal{E}^{(2)}, \dots, \rho^{(2)})$ gleich. \square