Elektromagnetische Wellen im Vakuum und in dielektrischen Medien

Im Vakuum und in dielektrischen Medien ist die Leitfähigkeit $\sigma = 0$.

Mit $\sigma = 0$ ist $\rho(x,y,z) = \infty$ und $\vec{j}_L = 0$.

Damit vereinfachen sich die Maxwell'schen Gleichungen zu

$$\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

und

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Anwendung des $\vec{\nabla}\times$-Operators auf die linke Gleichung und Substitution von **B** durch **E** mittels der rechten Gleichung liefert:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B} = -\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Wegen

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\Delta\vec{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}$$

erhält man mit $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ und $\frac{1}{c^2} = \mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r$ die Gleichung

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

Analog findet man

$$\boxed{\Delta\vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}}$$

Diskussion der Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Phasengeschwindigkeit: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$

Spezielle Lösung einer ebenen Welle: $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t + \vec{k}\vec{r})$

Wählen o.B.d.A. Wellenvektor **k** in Richtung der z-Achse, d.h.

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}_0 \exp i(\omega t + 2\pi\frac{z}{\lambda})$$

Durch Einsetzen in die Wellengleichung erhält man mit

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E} = -k^2\vec{E} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\omega^2\vec{E}$$

die bekannte Beziehung für den Zusammenhang zwischen der Phasengeschwindigkeit der Welle, ihrer Frequenz und Wellenlänge:

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad \text{oder} \qquad c = f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$

Die ebene Welle ist eine Lösung der Wellengleichung, wenn die Bedingung $c = f\lambda$ erfüllt ist. Ist c_0 die Phasengeschwindigkeit im Vakuum und n der Brechungsindex des Mediums, so folgt

$$c = \frac{\omega}{k} = f\lambda = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c_0}{n}$$