

P2.1

a) $|\pm, \pm, \dots, \pm\rangle$ offensichtlich 2^N Zustände.b) Gesamtspin $M = \sum_{i=1}^N S_i$ Mögliche Werte: Ausgehend von $|\dots\rangle$ mit $M = -\hbar n$ ($N=2n$) wird jede Anregung M um $\hbar$ erhöht.

$$\Rightarrow M \in \{-\hbar n, -\hbar(n-1), -\hbar(n-2), \dots, 0, \dots, \hbar(n-1), \hbar n\}$$

$$M(k) = -\hbar n + k\hbar$$

$$k = 0, 1, \dots, 2n.$$

c) Zahl der Mikrozustände zu gegebenem M :Es gibt $\binom{2n}{k}$ Möglichkeiten k Anregungenzu realisieren, $k = m + n$ $M = \hbar \cdot m$

$$Z(m) = \binom{2n}{k} = \binom{2n}{m+n}$$

Probe:
$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$

②

$$c) \quad W_{2n}(m) = \binom{2n}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \binom{2n}{m+n} \frac{1}{2^{2n}}$$

(jede Spinormatrix ist gleichwahrscheinlich)

Mittelwert?

$$\langle m \rangle = \sum_{m=-n}^n m W_{2n}(m) = \sum_{m=1}^n m [W_{2n}(m) - W_{2n}(-m)]$$

da $W_{2n}(m) = W_{2n}(-m)$ ist $\langle m \rangle = 0$

d) Abweichung vom Mittelwert im thermodyn. Limit:

$$m = \langle m \rangle + x \quad x \ll n \gg 1$$

$$\begin{aligned} \ln(W_{2n}(m)) &= -2n \ln 2 + 2n (\ln 2n - 1) \\ &\quad - (m+n) [\ln(m+n) - 1] - (n-m) [\ln(n-m) - 1] \\ &= 2n \ln n - (m+n) \ln(m+n) - (n-m) \ln(n-m) \end{aligned}$$

Entwickelt in m : $\log(n+x) \approx \log n + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}$

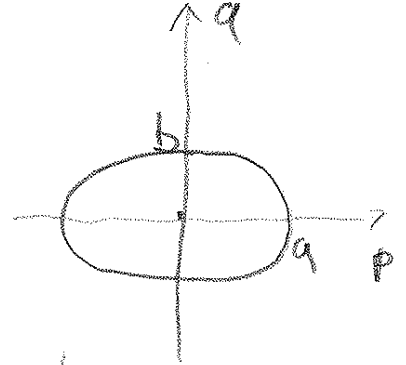
$$\ln(W_{2n}(m)) \approx -\frac{m^2}{n} \quad \Rightarrow \quad W_{2n}(m) \approx e^{-\frac{m^2}{n}}$$

P2.2

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \stackrel{!}{=} E$$

a) Phasenraum ist 2-dimensional

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)} = 1$$



Elliptengly. mit Halbachsen

$$a = \sqrt{2mE}$$

$$b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

b) Phasenraumvolumen

i) $H \leq E \Rightarrow$ Fläche der Ellipse A

$$\bar{\Omega}(E) = \int_{H=0}^{H=E} \frac{dq dp}{h} = \frac{A}{h} = \frac{\pi ab}{h} = \frac{2\pi E}{h\omega} = \underline{\underline{\frac{E}{h\omega}}}$$

ii) $E \leq H \leq E + \Delta$

$$\Delta \Omega_0(E) = \bar{\Omega}(E + \Delta) - \bar{\Omega}(E) = \frac{E + \Delta}{h\omega} - \frac{E}{h\omega} = \underline{\underline{\frac{\Delta}{h\omega}}}$$

H2.1 $w_N(N_1) = \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1}$

Limits: $N_1 \ll N$ $p_1 \ll 1$: $\langle N_1 \rangle = N p_1$

$$\frac{N!}{(N-N_1)!} = N(N-1)(N-2) \dots (N-N_1+1) \approx N^{N_1}$$

$$\ln p_2^{N-N_1} = (N-N_1) \ln(1-p_1) \approx N \ln(1-p_1) \approx -N p_1$$

$$= -\langle N_1 \rangle$$

$$\Rightarrow p_2^{N-N_1} = e^{-\langle N_1 \rangle}$$

$$p_1^{N_1} = \left(\frac{\langle N_1 \rangle}{N} \right)^{N_1}$$

Somit $w_N(N_1) = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1} \approx \frac{\langle N_1 \rangle^{N_1} e^{-\langle N_1 \rangle}}{N_1!}$

Für $w_N(N_1)$ hatten wir in H1 bestimmt

$$\langle N_1 \rangle = N p_1$$

$$(\Delta N_1)^2 = N p_1 p_2 = N p_1 (1-p_1) \underset{p_1 \ll 1}{\approx} N p_1 = \langle N_1 \rangle$$

②

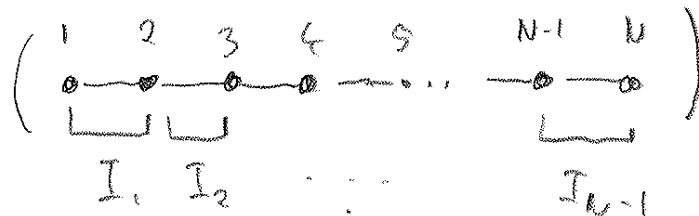
H2.2
$$E = - \frac{\epsilon_0}{\hbar^2} \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}$$

a) Wir definieren $I_i := S_i S_{i+1} \hbar^{-2}$ mit $i=1, \dots, N-1$

I_i nimmt die Werte ± 1 an. Somit kann E die Werte

$$-\epsilon_0(N-1), -\epsilon_0(N-3), \dots, -\epsilon_0, \epsilon_0, \dots, \epsilon_0(N-3), \epsilon_0(N-1)$$

annehmen!



$\Rightarrow$ Neue I -Kette mit Werten ± 1 , allerdings

jeder I_i -Zustand 2-fach entartet da $I = -1$

zu $(+-)$ und $(-+)$ und $I = +1$ zu $(++)$ und

$(--)$ korrespondiert

Grundzustand ist $I_i = +1 \forall i$ mit $E = -\epsilon_0(N-1)$.

Erhöhung der Energie durch Flips $I_i \rightarrow -1$ um $2\epsilon_0$.

Es sind bis zu $(N-1)$ -Flips möglich

$$\Rightarrow E(f) = -\varepsilon_0(N-1) + 2\varepsilon_0 \cdot f \quad f=0, 1, \dots, N-1$$

$$Z(E) = 2 \cdot \binom{N-1}{f} = 2 \cdot \binom{N-1}{\frac{E}{2\varepsilon_0} + \frac{N-1}{2}}$$

b) Test:

$$2^N \stackrel{!}{=} \sum_{f=0}^{N-1} Z(E) = 2 \sum_{f=0}^{N-1} \binom{N-1}{f} = 2 (1+1)^{N-1} = 2^N \quad \checkmark$$

c) Mittelwert $W_{N-1}(E) = 2 \binom{N-1}{f} \frac{1}{2^{N-1}}$

$$\langle E \rangle = 2 \sum_{f=0}^{N-1} E(f) \binom{N-1}{f} \frac{1}{2^{N-1}} = -\varepsilon_0(N-1) \underbrace{2 \sum_{f=0}^{N-1} \binom{N-1}{f}}_{2^N} \frac{1}{2^{N-1}}$$

$$+ 4\varepsilon_0 \underbrace{\sum_{f=0}^{N-1} f \binom{N-1}{f}}_{(N-1) \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= -2\varepsilon_0(N-1) + 2\varepsilon_0(N-1) = 0 //$$

wie zu
antwort

(4)

H2.3

a) Mikrokanonische Verteilungsfunktion $g(H) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E) \cdot \Delta} & E \leq H \leq E + \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
 Aus P2.2 $\Omega(E) = \frac{\hbar \omega}{2\pi \Delta}$ fest

$$\Rightarrow g(E) = \begin{cases} \frac{\hbar \omega}{\Delta} & E \leq H \leq E + \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Mittelwert kinetische Energie:

$$\langle T \rangle = \int \frac{dq dp}{h} g(E) \frac{p^2}{2m} = \frac{\omega}{2\pi \Delta} \int_{E \leq H \leq E + \Delta} dq dp \frac{p^2}{2m}$$

Für $E = \text{fest}$ Ellipsenbahn:

Bestimme Integral für $H \leq E$:

$$\int_{H \leq E} dq dp \, p^2 = ab \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^3 a^2 \cos^2 \varphi = \frac{a^3 b \pi}{4}$$

$$p = r a \cos \varphi$$

$$r \in [0, 1]$$

$$q = r b \sin \varphi$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$dq dp = rab \, dr d\varphi$$

$$a = \sqrt{2mE}, \quad b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi = \pi$$

$$\int_0^1 dr \, r^3 = \frac{1}{4}$$

(5)

$$a^3 b = a^2 \cdot ab = 2mE \cdot \frac{2E}{\omega} = \frac{4mE^2}{\omega}$$

$$\text{Somit} \quad \int_{E \leq H \leq E+\Delta} dq dp p^2 = \frac{\pi m}{\omega} \left[(E+\Delta)^2 - E^2 \right] = \frac{\pi m}{\omega} [\Delta^2 + 2\Delta E]$$

und

$$\langle T \rangle = \frac{\omega}{2\pi\Delta} \frac{1}{2m} \frac{\pi m}{\omega} \Delta(\Delta + 2E) = \frac{E}{2} + \frac{\Delta}{4}$$

Analogy:

$$\langle U \rangle = \left\langle \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right\rangle = \int \frac{dq dh}{h} S(E) \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

$$= \frac{\omega}{2\pi\Delta} \int_{E \leq H \leq E+\Delta} dq dp q^2 \left(\frac{m\omega^2}{2} \right)$$

$$\int_{H \leq E} dq dp q^2 = ab \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi r^3 b^2 \sin^2 \varphi = \frac{ab^3 \pi}{4}$$

$$\frac{ab^3 \pi}{4} = \frac{2E}{\omega} \cdot \frac{2E}{m\omega^2} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi E^2}{m\omega^3}$$

⑥

Somit:

$$\int_{E-H}^{E+H} dq dp q^2 = \frac{\pi}{m\omega^3} [(E+\Delta)^2 - E^2] = \frac{\pi\Delta}{m\omega^3} (2E+\Delta)$$

$$\langle u \rangle = \frac{m\omega^3}{4\pi\Delta} \cdot \frac{\pi\Delta}{m\omega^3} (2E+\Delta) = \underline{\underline{\frac{E}{2} + \frac{\Delta}{4}}}$$