

Aufgabe 2 3.1

$$a) V_N(L) = L^N \cdot V_N(1)$$

$$\frac{V_N(L) - V_N(L - x \frac{L}{N})}{V_N(L)}$$

$$= \frac{L^N V_N(1) - (L - x \frac{L}{N})^N V_N(1)}{L^N V_N(1)}$$

$$= 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{x}{N}\right)^N}_{=: f(x)}$$

$$(1) f(0) = 1$$

$$f' = - \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{N-1}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{f'} = - \left(1 - \frac{x}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -1$$

Man darf durch f' teilen, falls $N > x$ ist, d.h. die Beziehung

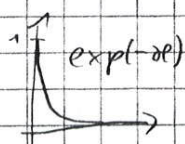
(2) $f = -f'$ lässt sich für jedes x zeigen. Daraus folgt bekanntermaßen: $f \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp(-x)$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V_N(L) - V_N(L - x \frac{L}{N})}{V_N(L)} = 1 - e^{-x}$$

✓ (4/4)

Da der Grenzwert das Verhalten des Verhältnisses des Volumens einer Schale des Körpers der Dicke

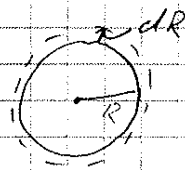
$x \frac{L}{N}$ für große N beschreibt, folgt, dass fast das gesamte Volumen eines hochdimensionalen Körpers unter seiner Oberfläche liegt.



b) Bei einer Vergrößerung des Kugel-radius um dR vergrößert sich das Volumen um Oberfläche mal dR :

$$dV_N(R) = dR \cdot O_N(R)$$

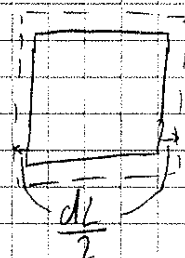
$$\Rightarrow \frac{dV_N(R)}{dR} = O_N(R)$$



Beim Würfel teilt sich eine Verlängerung der Kanten um dL jedoch auf zwei gegenüberliegende Flächen auf:

$$dV_N(L) = \frac{dL}{2} O_N(L)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dL} V_N(L) = \frac{1}{2} O_N(L) \quad \checkmark$$



N-dim. Einheitswürfel:

$$V_N(L) = L^N \Rightarrow O_N(L) = 2 \frac{d}{dL} V_N(L) = 2 N L^{N-1} \underset{L=1}{=} 2N$$

Kugel: $V_N \propto R^N$

$$\Rightarrow O_N(R) = \frac{d}{dR} V_N(R) \propto N R^{N-1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_N}{O_N} = \frac{R}{N} \Rightarrow V_N = \frac{R}{N} O_N$$

Daraus folgt, dass mit zunehmendem N das Volumen - Oberfläche - Verhältnis abnimmt. (4/14)

Das heißt die Kugel besteht für große N fast ausschließlich aus Oberfläche. Verringert man den Radius um ε , so verringert sich das Volumen ungefähr um $V_N^\varepsilon = \varepsilon \cdot R \cdot O_N$ für große N also um einen Großteil des Gesamtvolumens. ✓

We can also directly calculate each term in the expansion using Wick's theorem (1.9).

Steepest-descent. In the case of contour integrals in the complex domain, one sometimes uses a method, steepest-descent, which reduces their evaluation to gaussian integrals. Let us consider the integral:

$$I = \int \prod_{i=1}^n dx_i \exp \left[-\frac{1}{\lambda} S(x_1, \dots, x_n) \right]. \quad (1.13)$$

In the limit $\lambda \rightarrow 0$, the integral is dominated by saddle points $\{x_i^c\}$:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}(x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c) = 0. \quad (1.14)$$

Choosing the dominant contributing saddle point x^c , we can expand x around the saddle point:

$$x = x^c + y\sqrt{\lambda}, \quad (1.15)$$

This change of variables is such that in the expansion of $S(x)/\lambda$ the dominant y dependent contribution, which is quadratic, has a coefficient of degree zero in λ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} S(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{\lambda} S(x^c) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(x^c) y_i y_j \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^{k/2-1}}{k!} \frac{\partial^k S}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x^c) y_{i_1} \dots y_{i_k}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

The integral becomes:

$$I = e^{-S(x^c)/\lambda} \int \prod_{i=1}^n dx_i \exp \left[-\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(x^c) y_i y_j - R(y) \right] \quad (1.17)$$

$$R(y) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^{k/2-1}}{k!} \frac{\partial^k S}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x^c) y_{i_1} \dots y_{i_k}. \quad (1.18)$$

If we expand the integrand in powers of $\sqrt{\lambda}$ we have to calculate at each order the average of a polynomial with a gaussian weight.

Bsp:

$$I(N) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-N(-x^2 + \lambda x^4)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-N S(x)}$$

Sattelpunkts gfg: $-2x + 4\lambda x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$\Rightarrow -1 + 2\lambda x^2 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

$$S(x_1) = 0 \quad S(x_2) = S(x_3) = -\frac{1}{2\lambda} + \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^4 = -\frac{1}{4\lambda}$$

D.h. x_2, x_3 sind dominant, da $S(x_2) = S(x_3) < S(x_1)$

$$S''(x) = -2 + 12\lambda x^2 \Rightarrow S''(x_{2,3}) = -2 + 12\lambda \frac{1}{2\lambda} = 4$$

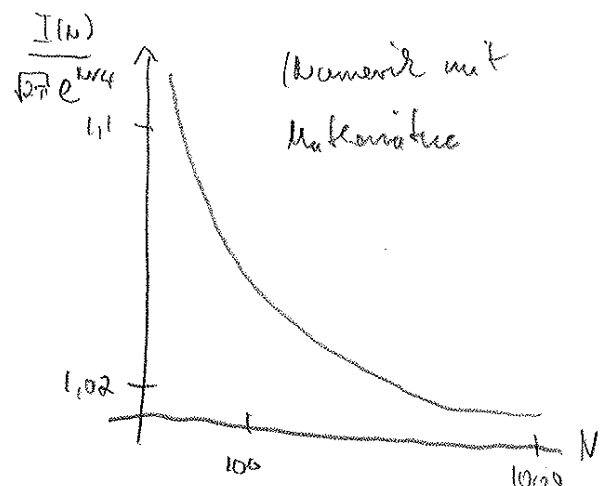
Somit

$$I(N) = 2 \cdot e^{+\frac{N}{4\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot y^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{N/4\lambda}$$

Da 2 dominante
Sattelpunkte

$$\int dy e^{-2y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I(N \gg 1) \sim \sqrt{2\pi} e^{N/4\lambda}$$



$$S[\rho] = -k_B \text{Sp}(\rho \ln \rho)$$

a) $\dot{S}[\rho] = 0$ unter Liouville-Gleich: $\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]$

$$\dot{S}[\rho] = -k_B \text{Sp}(\dot{\rho} \ln \rho) - k_B \text{Sp}\left(\rho \frac{d}{dt} \ln \rho\right) = -k_B \text{Sp}(\dot{\rho}(\ln \rho - 1))$$

(Argument analog zu SS in Vorlesung $\dot{S}/S$ Kap. II.11.)

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{i}{\hbar} k_B \text{Sp}\{[H, \rho](\ln \rho - 1)\} = \frac{i\hbar}{2} \text{Sp}\{H \rho (\ln \rho - 1)\} - \frac{i\hbar}{2} \text{Sp}\{\rho H (\ln \rho - 1)\}$$

Nun ist $\text{Sp}\{\rho H (\ln \rho - 1)\} = \text{Sp}(H (\ln \rho - 1) \rho)$

$$= \text{Sp}(H \rho (\ln \rho - 1))$$

(Zyklicität der Spur & $[\rho, \ln \rho] = 0$)

$$\Rightarrow \underline{\dot{S} = 0}$$

b) $\rho_{MK} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$ mit $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E) \Delta} & \text{falls } E_n \in [E, E + \Delta] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein beliebig anderer stat. Operator ρ mit scharfer

Energie E hat dann die Form

$$\hat{S} = \sum_n \tilde{P}_n |n\rangle \langle n| \quad \text{mit} \quad \tilde{P}_n = \begin{cases} \tilde{P}_n & E_n \in [E, E+\Delta] \\ 0 & E_n \notin [E, E+\Delta] \end{cases}$$

Wichtige Abschätzung $Sp(g \ln g_1) - Sp(g \ln g) \leq 0$

(aus Vorlesung) Wähle $g_1 = g_{M\kappa}$

Dann ist

$$S[g] = -\kappa Sp(g \ln g) \leq -\kappa Sp(g \ln g_{M\kappa})$$

$$Sp(g \ln g_{M\kappa}) = \sum_{\{n | E_n \in [E, E+\Delta]\}} (-\kappa) \langle n | g \ln g_{M\kappa} | n \rangle$$

$$= \sum_{\{n\}} \langle n | g | n \rangle \kappa \ln R(E) \Delta = \kappa \ln R(E) \Delta = S[g_{M\kappa}]$$

□