P8.4 – 2D IDEALES ELEKTRONENGAS $\quad \underline{g=2}$

a) $$N = g \sum_{p \le p_F} = g \frac{\overset{=L^2}{A}}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2p \; \Theta(p_F - p)$$

$$= \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2} \pi p_F^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_F = \hbar \sqrt{\frac{4\pi}{g}} \sqrt{n}} \qquad n = \frac{N}{A}$$

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \hbar^2 \frac{2\pi n}{2m} = \boxed{\hbar^2 \pi \frac{n}{m}}$$

b) Chemisches Potential aus der Beziehung

$$N = \sum_p n(\varepsilon_p) = \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2p \; n(\varepsilon_p)$$

$$= \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2} 2\pi \int_0^\infty dp \cdot p \cdot n(\varepsilon_p) \qquad \varepsilon = \frac{p^2}{2m} \quad d\varepsilon = p\,dp/m$$

$$= \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2} 2\pi m \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{n}{m} \pi \hbar^2}_{\varepsilon_F} = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} z^{-1} + 1} \qquad \begin{array}{l} x = e^{\beta\mu} \\ dx = \beta x \, d\varepsilon \end{array}$$

$$\beta \varepsilon_F = \int_1^\infty dx \frac{1}{x} \cdot \frac{z}{x + z} = \int_1^\infty dx \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+z} \right]$$

$$\beta\varepsilon_F = \ln x - \ln(x+z)\Big|_1^\infty = \ln(1+z)$$

$$\Rightarrow \quad e^{\beta\varepsilon_F} = 1 + e^{\beta\mu} \quad \Rightarrow \quad \mu = \beta^{-1}\ln\left(e^{\beta\varepsilon_F} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu = \varepsilon_F + k T \ln\left(1 - e^{-\varepsilon_F/kT}\right)}$$

c) Großkanonisches Potential.

$$\Phi = -\frac{1}{\beta}\sum_p \log\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu)}\right)$$

$$= -\frac{gA}{\beta(2\pi\hbar)^2}(2\pi)\int_0^\infty dp\, p\, \log\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu)}\right) \qquad \varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

$$m\, d\varepsilon = p\, dp$$

$$= -\frac{gAm}{\beta\, 2\pi\hbar^2}\int_0^\infty d\varepsilon\, \log\left(1 + e^{-\beta\varepsilon} z\right)$$

Integral:

$$I = \int_0^\infty d\varepsilon\left(\frac{d}{d\varepsilon}\varepsilon\right)\log\left(1 + e^{-\beta\varepsilon} z\right) = \underbrace{\left[\varepsilon \log\left(1 + e^{-\beta\varepsilon} z\right)\right]_0^\infty}_{-0\cdot\log(1+z) + \lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon\cdot\log(1+e^{-\beta\varepsilon}) \to 0}$$

$$+ \int_0^\infty d\varepsilon\, \beta z \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon} z + 1}$$

$$\Rightarrow \quad I = \beta \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} z^{-1} + 1} = \beta\int_0^\infty d\varepsilon\; \varepsilon \cdot n(\varepsilon)$$

Sommerfeld-Entwicklung:

$$I = \beta \left[\int_0^\mu d\varepsilon\, \varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \underbrace{f'(\mu)}_{=1} + \frac{7\pi^4}{360} (kT)^4 \underbrace{f'''(\mu)}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0} \right]$$

Somit:

□ $$\Phi = -\frac{mAg}{2\pi\hbar^2} \left[\frac{\mu^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \right] \qquad A \frac{m}{\pi\hbar^2} = \frac{N}{\varepsilon_F}$$

$$\boxed{\Phi = -\frac{g}{4} \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F} N \left[\frac{\pi^2}{3} + \ln^2\left(e^{\varepsilon_F/kT} - 1\right) \right]}$$

□ Zustandsgleichung aus Gibbs-Duhem $\Phi = -pA$:

$$\Rightarrow \boxed{pA = \frac{g}{4} N \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F} \left[\frac{\pi^2}{3} + \ln^2\left(e^{\varepsilon_F/kT} - 1\right) \right]}$$

d) Innere Energie:

$$E = \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2p\, \varepsilon_{\vec{p}}\, n(\varepsilon_{\vec{p}}) = \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2} (2\pi) \int_0^\infty dp\, p\, \varepsilon_p\, n(\varepsilon_p)$$

$$p\,dp = m\,d\varepsilon$$

$$= 2\pi m \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon \cdot n(\varepsilon) = -\Phi$$

H.8.1 Ultrarelativistisches Fermi-Gas in 3D

Dispersionsrelation: $\varepsilon_p = c\,|\vec{p}|$

a) $$N = 2\sum_{p\le p_F} = 2\,\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\;\theta(p_F - |\vec{p}|)$$

$$= \frac{V}{3\pi^2\hbar^3}\,p_F^{\;3}$$

Fermi-Impuls: $$\boxed{p_F = (3\pi^2)^{1/3}\,\hbar\, n^{1/3}}$$ (ident. zum nichtrelativist. Fall)

Fermi-Energie: $$\boxed{\varepsilon_F = c\,p_F = (3\pi^2)^{1/3}\hbar c\; n^{1/3}}$$

b) Verteilungsfunktion: $$n(\varepsilon_p) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_p-\mu)\beta}+1} \qquad \varepsilon = c\,p$$

$$N = \sum_p n(\varepsilon_p) = 2\,\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\;\frac{1}{e^{(\varepsilon_p-\mu)\beta}+1}$$

$$= \frac{8\pi V}{8\pi^3\hbar^3}\int_0^\infty dp\;\frac{p^2}{e^{(\varepsilon_p-\mu)\beta}+1} \qquad p = \frac{\varepsilon}{c}$$

$$= \frac{V}{\pi^2\hbar^3 c^3}\int_0^\infty d\varepsilon\;\frac{\varepsilon^2}{e^{\varepsilon\beta}z^{-1}+1}$$

(2)

$$\Rightarrow \quad n = \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{\varepsilon^2}{e^{\varepsilon} z^{-1} + 1}$$

Auf der anderen Seite ist $\quad n = \left(\frac{\varepsilon_F}{\hbar c}\right)^3 \frac{1}{3\pi^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_F^3}{3} = \underbrace{\int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{\varepsilon^2}{e^{\varepsilon} z^{-1} + 1}}_{=: I_2(z)}$$

Sommerfeldentwicklung von $I_2(z)$

$$I_2(z) = \int_0^\mu d\varepsilon \, \varepsilon^2 + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \, (2\mu) \qquad \text{(bricht ab!)}$$

$$= \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 \cdot \mu$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_F^3 = \mu^3 + \pi^2 (kT)^2 \cdot \mu$$

Ansatz: $\quad \mu = \varepsilon_F + \mu_1 \cdot \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2$

Einsetzen und auflösen

$$\varepsilon_F^3 = \left(\varepsilon_F + \mu_1 \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right)^3 + \pi^2 (kT)^2 \cdot \varepsilon_F$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 1 + 3\frac{\mu_1}{\varepsilon_F} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2 + \pi^2 (kT)^2 / \varepsilon_F^2$$

$$\Rightarrow \quad \mu_1 = -\frac{\pi^2}{3}\varepsilon_F$$

Somit folgt
$$\boxed{\mu = \varepsilon_F\left(1 - \frac{\pi^2}{3}(k_BT)^2/\varepsilon_F^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)\right)}$$

c) Großkanon. Potential

$$\Phi = -\frac{2V}{(2\pi\hbar)^3\beta}\int d^3p\, \log\left(1 + e^{-\beta\varepsilon_p}z\right)$$

$$= -\frac{8\pi V}{(2\pi\hbar)^3\beta c^3}\int d\varepsilon\, \varepsilon^2 \log\left(1 + e^{-\beta\varepsilon}z\right)$$

$$= -\frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3\beta}\int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1}{3}\varepsilon^3\right)\log\left(1 + e^{-\beta\varepsilon}z\right)$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \frac{V}{3\pi^2(\hbar c)^3\beta}\int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{\varepsilon^3}{1 + e^{-\beta\varepsilon}z}\left(-\beta z e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$$= -\frac{V}{3\pi^2(\hbar c)^3}\underbrace{\int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon}z^{-1} + 1}}_{I_3}$$

Sommerfeld-Entwicklung

$$I_3 = \int_0^\mu d\varepsilon\, \varepsilon^3 + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2(3\mu^2) + \frac{7\pi^4}{360}(k_BT)^4 \cdot 6$$

④

$$\Rightarrow \quad I_3 = \frac{1}{4}\mu^4 + \frac{\pi^2}{2}(kT)^2\mu^2 + \mathcal{O}(T^4)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = -\frac{V\mu^4}{12\pi^2(\hbar c)^3}\left[1 + 2\pi^2\frac{(kT)^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(T^4)\right]$$

Einsetzen von μ:

$$\Rightarrow \quad \Phi = -\frac{V\varepsilon_F^4}{12\pi^2(\hbar c)^3}\left[1 - 4\cdot\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + 2\pi^2\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \mathcal{O}(T^4)\right]$$

$$= -\frac{V\varepsilon_F^4}{12\pi^2(\hbar c)^3}\left[1 + \frac{2}{3}\pi^2\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \mathcal{O}(T^4)\right]$$

Nun ist $\left(\frac{\varepsilon_F}{\hbar c}\right)^3 = 3\pi^2 n = 3\pi^2\frac{N}{V}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi = -N\frac{\varepsilon_F}{4}\left[1 + \frac{2}{3}\pi^2\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \mathcal{O}(T^4)\right]}$$

d) Zustandsgleichung aus Gibbs-Duhem: $\phi = -PV$

$$\Rightarrow \quad \boxed{PV = \frac{\varepsilon_F}{4}N\left[1 + \frac{2}{3}\pi^2\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \mathcal{O}(T^4)\right]}$$

INNERE ENERGIE

$$E = \sum_p \varepsilon_p n(\varepsilon_p) = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \, \frac{c|\vec{p}|}{e^{\beta \varepsilon_p} z^{-1} + 1}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} z^{-1} + 1} = -3\,\Phi$$

Somit

$$\boxed{E = N \frac{3}{4} \varepsilon_F \left[1 + \frac{2}{3} \pi^2 \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}(T^4) \right]}$$

H β.2

~~H20~~ - Entropie und spezifische Wärme des idealen Bose-Gases

Wiederholung Bose-Einstein-Kondensation

- ideales Bose-Gas: $\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} - 1} \overset{!}{\geq} 0 \ \forall p$

$$\Rightarrow \mu < \min(\varepsilon_p) \quad \forall p$$

↳ für ideales Bose-Gas : $-\infty < \mu < 0$

und mit $z = e^{\beta\mu}$: $0 < z < 1$

- mittlere Teilchenzahl : $\langle N \rangle = \sum_p n(\varepsilon_p)$

$$\text{"="} \ \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \, n(\varepsilon_p)$$ (! später $\vec{p} = \vec{0}$ abspalten)

$$\Rightarrow n\lambda^3 = g \, g_{3/2}(z)$$

[ab jetzt: $g = 1$]

$$\Rightarrow n\lambda^3 = g_{3/2}(z)$$

mit $0 < z < 1$: $0 < n\lambda^3 < g_{3/2}(1)$

okay, weil n & λ positiv

kann verletzt werden! für große n und kleine T ($\lambda \propto T^{-1/2}$)

- Problem: habe $\sum_p \ldots$ durch $4\pi \int_0^\infty dp \, p^2 \ldots$ ersetzt

für $T \to 0$ ist Grundzustand $|\vec{p} = \vec{0}\rangle$ makroskopisch besetzt
- im Integral nicht berücksichtigt!
→ gesondert behandeln

$$\langle N \rangle = n(\varepsilon_{\vec{p}=0}) + \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} n(\varepsilon_{\vec{p}}) = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$$

$$\Rightarrow n\lambda^3 = g_{3/2}(z) + \underbrace{\frac{\lambda^3}{V} \frac{z}{1-z}}_{(*)}$$

(*) darf für $z \to 1$ auch im thermodynam. Limes $V \to \infty$ nicht verschwinden (sonst Problem nicht gelöst)

$\Rightarrow$ im Kondensationsgebiet: $1 - z = \mathcal{O}(V^{-1})$ $\Rightarrow z = 1 - \mathcal{O}(\frac{1}{V}) \xrightarrow{\text{TD-Limes}} 1$

für $z < 1$: (*) verschwindet im TD-Limes

$$\Rightarrow \quad z = \begin{cases} \overset{\text{inverse Funktion}}{g_{3/2}^{-1}}(n\lambda^3) & n\lambda^3 < g_{3/2}(1) \quad \text{reine Gas-Phase} \\ 1 & n\lambda^3 \geq g_{3/2}(1) \quad \text{Kondensationsgebiet} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ kritischer Punkt: $n\lambda^3 = g_{3/2}(1)$

→ kritische Temp. für festes n: $kT_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left(\frac{n}{\zeta(\frac{3}{2})}\right)^{2/3}$ $\quad (T<T_c \hat{=} n\lambda^3 > g_{3/2}(1))$

→ kritische Teilchendichte für festes T: $n_c = \zeta(\frac{3}{2})\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

⇒ in verschiedenen Temperaturbereichen:

$$T>T_c: \quad n\lambda^3 = g_{3/2}(z) = g_{3/2}(1)\left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2} \quad z<1 \quad (+)$$

$$T=T_c: \quad n\lambda^3 = g_{3/2}(1) \quad z=1$$

$$T<T_c: \quad n\lambda^3 = g_{3/2}(1)\left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2} \quad z=1 \quad (+)$$

$$\left[(+) \text{ aus } T=T_c: \quad n\lambda_c^3 = g_{3/2}(1), \quad n\lambda_c^3 = n\lambda^3\frac{\lambda_c^3}{\lambda^3} = n\lambda^3\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \right]$$

• großkanonisches Potential

$$\Phi = \underbrace{\beta^{-1}\log(\underbrace{1-e^{-\beta(0-\mu)}}_{=1-z})}_{\substack{z<1:\ O(V^0) \\ z\to 1:\ O(\ln V)}} + \underbrace{\sum_{\vec p\neq 0}\beta^{-1}\log(1-e^{-\beta(\epsilon_{\vec p}-\mu)})}_{\overset{\text{VL}}{=} -\frac{VkT}{\lambda^3}g_{5/2}(z)}$$

im TD-limes $V\to\infty$ viel kleiner als $O(V)$-Term

$$\Rightarrow \quad \Phi = -\frac{VkT}{\lambda^3}\begin{cases} g_{5/2}(z) & T>T_c \\ g_{3/2}(z) & T\leq T_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p = -\frac{\Phi}{V} = \frac{kT}{\lambda^3}\begin{cases} g_{5/2}(z) & T>T_c \\ g_{5/2}(1) & T\leq T_c \end{cases}$$

(a) Entropie des idealen Bose-Gases

- Zunächst Hinweis:

$$\left(\frac{\partial g_\nu(z)}{\partial z}\right)_{V,\mu} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1}-1}\right)_{V,\mu}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{z^2}\int_0^\infty dx\; x^{\nu-1}\frac{e^x}{(e^x z^{-1}-1)^2}$$

$$u \qquad v' \rightarrow v = -z\,\frac{1}{e^x z^{-1}-1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{z^2}\Bigg[\underbrace{-\frac{z}{e^x z^{-1}-1}x^{\nu-1}\Big|_0^\infty}_{=0} + (\nu-1)z\int_0^\infty dx\,\frac{x^{\nu-2}}{e^x z^{-1}-1}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^\infty dx\;\frac{x^{(\nu-1)-1}}{e^x z^{-1}-1}$$

$$= \frac{1}{z}g_{\nu-1}(z)$$

oder mit Reihendarstellung:

$$\left(\frac{\partial g_\nu(z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{\ell=1}^\infty \frac{z^\ell}{\ell^\nu}\right) = \sum_{\ell=1}^\infty \ell\,\frac{z^{\ell-1}}{\ell^\nu} = z^{-1}\sum_{\ell=1}^\infty \frac{z^\ell}{\ell^{\nu-1}} = \frac{1}{z}g_{\nu-1}(z)$$

- $S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_{V,\mu} = V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,\mu}$ mit $p = \frac{kT}{\lambda^3}\begin{cases} g_{5/2}(z) & T>T_c \\ g_{5/2}(1) & T\le T_c\end{cases}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{kT}{\lambda^3}\right)_{V,\mu} = \frac{5}{2}\frac{k}{\lambda^3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}g_{5/2}(z)\right)_{V,\mu} = \left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_{V,\mu}\left(\frac{\partial g_{5/2}(z)}{\partial z}\right)_{(V,\mu)} = \underbrace{\frac{1}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_{V,\mu}}_{=\left(\frac{\partial \log z}{\partial T}\right)_{V,\mu},\ \log z = \beta\mu} g_{3/2}(z) = -\frac{\mu}{kT^2}g_{3/2}(z)$$

- somit für $\boxed{T>T_c}$

$$S = V\left\{\frac{5}{2}\frac{k}{\lambda^3}\cdot g_{5/2}(z) + \frac{kT}{\lambda^3}\cdot\left(-\frac{\overset{\mu = kT\ln z}{\mu}}{kT^2}g_{3/2}(z)\right)\right\}$$

$$= Nk\cdot\underbrace{\frac{V}{N}\frac{1}{\lambda^3}g_{3/2}(z)}_{=1}\left\{\frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln z\right\}$$

(für $T>T_c$: $n\lambda^3 = g_{3/2}(z)$!)

$$\underline{\underline{= Nk\left\{\frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln z\right\}}}$$

- für $\boxed{T\le T_c}$

$$S = V\cdot\frac{5}{2}\frac{k}{\lambda^3}\cdot g_{5/2}(1)$$

mit $n\lambda^3 = g_{3/2}(1)\left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2}$ (+): $\frac{V}{\lambda^3} = \frac{N}{g_{3/2}(1)}\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$

$$\underline{\underline{= \frac{5}{2}Nk\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}}}$$

• im $\boxed{\text{klassischen Limes}}$

$T > T_c$: klassische Limes: $z \to 0$ $\quad$ ($n\lambda^3 = g_{3/2}(z) \Rightarrow z = g_{3/2}^{-1}(n\lambda^3)$

$n = \text{const.}$, $\lambda \propto \hbar \to 0$

$g^{-1}_{3/2}(0) = 0$)

für kleine z: $g_\nu(z) \simeq z + O(z^2)$

$$\Rightarrow \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} = 1$$

$$z \simeq g_{3/2}(z) = n\lambda^3$$

$$\Rightarrow S = Nk\left\{\frac{5}{2} + \ln\frac{V}{N\lambda^3}\right\}$$

Sackur-Tetrode-Formel

~ Entropie des klass. idealen Gases

$T < T_c$: keine z-Abhängigkeit

reines Quantenphänomen

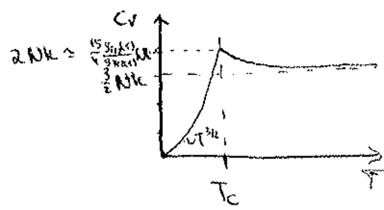
(b) Wärmekapazität

• $c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{N,V}$ mit $S = Nk\begin{cases}\left(\frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln z\right) & T > T_c \\ \frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} & T \leq T_c\end{cases}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} g_{3/2}(z)\right)_{N,V} \underset{T>T_c}{=} \left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{N\lambda^3}{V}\right)_{N,V} = -\frac{3}{2} n\lambda^3 T^{-1} = -\frac{3}{2}\frac{1}{T} g_{3/2}(z) \quad \text{für } T > T_c$$

aber auch:

$$\stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_{N,V} \frac{\partial g_{3/2}(z)}{\partial z} = \left(\frac{\partial \log z}{\partial T}\right)_{N,V} g_{1/2}(z)$$



$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \log z}{\partial T}\right)_{N,V} = -\frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \quad \text{für } T > T_c$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} g_{5/2}(z)\right)_{N,V} = \left(\frac{\partial \log z}{\partial T}\right)_{N,V} g_{3/2}(z) \underset{T>T_c}{=} -\frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{g_{3/2}(z)^2}{g_{1/2}(z)} \quad \text{für } T > T_c$$

• somit für $\boxed{T > T_c}$:

$$c_V = NkT\left\{\frac{5}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{g_{3/2}(z)^2}{g_{1/2}(z)}\right)\frac{1}{g_{3/2}(z)} - \frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)^2}\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{T}g_{3/2}(z)\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}Nk\left\{\frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{3}{2}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}\right\}$$

• für $\boxed{T < T_c}$:

$$c_V = \frac{5}{2}NkT \cdot \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \cdot \frac{3}{2}\frac{T^{1/2}}{T_c^{3/2}} = \frac{15}{4}Nk\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$T = 0$: $c_V = 0$ $\quad$ 3. HS ✓

• $\boxed{T = T_c}$: $c_V = \frac{15}{4}Nk\frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$ $\quad$ (aus $T > T_c$-Ergebnis durch $z \to 1$ und $g_{1/2}(1) = \infty$ und $T < T_c$ durch $T = T_c$ $\to$ c_V stetig)

• $\boxed{\frac{T}{T_c} \gg 1}$: $z = g_{3/2}^{-1}\left(g_{3/2}(1)\left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2}\right) \to 0 \Rightarrow \frac{g_\alpha(z)}{g_\beta(z)} \to 1 \to c_V = \frac{3}{2}Nk \mathrel{\hat{=}}$ ideales klass. Gas

H22

a) 2D - BOSE GAS (NICHTRELATIVISTISCH)

$$\bar{N} = \sum_p n(\varepsilon_p) = \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2}\int d^2p \; n(\varepsilon_p)$$

$$= \frac{gA}{(2\pi\hbar)^2}\, 2\pi \int_0^\infty dp \cdot \frac{p}{e^{\beta(\varepsilon_p-\mu)}-1} \qquad \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}, \quad d\varepsilon = \frac{p\,dp}{m}$$

$$= \frac{gAm}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$$

$$= \frac{gAm}{2\pi\hbar^2}\frac{1}{\beta}\, g_1(z) = \frac{gAm}{2\pi\hbar^2}\, kT \sum_{l=0}^\infty \frac{e^{\beta\mu l}}{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n}{kT}\,\frac{2\pi\hbar^2}{gm} = \sum_{l=0}^\infty \frac{z^l}{l}} = [0,\infty] \quad (+) \qquad \zeta(z=1) = \infty$$

Für $z=1$ $(\mu=0)$ divergiert diese Summe, d.h. die Gleichung $(+)$ besitzt stets eine Lösung für $z \in [0,1]$ (gegebenes n, T)

$\Rightarrow$ keine Bose-Einstein Kondensation!