P21 Statistische Physik **WS 17/18** **Prof. Jan Plefka**

Übungsserie 1

Abgabe der Hausübungen am Mittwoch 25.10

H1 - Binomialverteilung [1P]

Beweisen Sie die Gleichungen (I.24) und (I.25) im Skript.

H2 - Die Γ-Funktion [1P]

Die Γ-Funktion ist definiert durch

$$\Gamma(n+1) := \int_0^\infty dt t^n\, e^{-t}$$

a) Zeigen Sie $\Gamma(n+1) = n!$.
Hinweis: Führen $\Gamma(n+1)$ durch geeignetes partielles Integrieren auf $\int_0^\infty dt\, e^{-t}$ zurück.

b) Zeigen Sie, dass für große n gilt (Stirlingsche Formel)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Sattelpunktsmethode, d.h. zeigen Sie, dass der Integrand von $\Gamma(n+1)$ ein scharfes Maximum hat und passen Sie dann den Integranden bis zur zweiten Ordnung an eine Gauß-Funktion an.

H3 - Wahrscheinlichkeitsverteilung und erzeugendes Funktional [1P]

Ein Tellerwäscher spült ununterscheidbare Teller, die dabei mit der Wahrscheinlichkeit $p < 1$ zebrechen. Nachdem k Teller zerbrochen sind, wird er entlassen.

a) Begründen Sie kurz, dass die Wahrscheinlichkeit P_n insgesamt n Teller während des Arbeitsverhältnisses zu spülen (und dabei potentiell auch zu zerbrechen) gegeben ist durch

$$P_n = \binom{n-1}{k-1} p^k\, (1-p)^{n-k} \quad \text{für } n \geq k \quad \text{und} \quad P_n = 0 \text{ für } n < k\,.$$

b) Berechnen Sie das erzeugende Funktional $F(x) = \langle x^n \rangle := \sum_{n=0}^\infty P_n\, x^n$ unter Verwendung von $\sum_{m=0}^\infty \binom{l+m}{l} y^m = (1-y)^{-l-1}$ für $|y| < 1$. Ableitungen des Funktionals an der Stelle $x =?$ liefern Ihnen dann den Mittelwert $\langle n \rangle$ der gespülten Teller, sowie die Schwankung $\Delta n = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$ um diesen Wert.
Was ergibt sich für $\Delta n / \langle n \rangle$ im Limes $k \to \infty$?