Übungsserie 13

Abgabe der Hausübungen am 31.01.2018

Präsenzübungen

Aufgabe P13.1 - Weiß Modell

Das Weiß-Modell stellt eine Spielart des Ising-Modells dar, in dem jeder der N Spins mit jedem anderen gleich stark wechselwirkt:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\frac{J}{N}\sum_{l,l'=1}^{N}\sigma_l\,\sigma_{l'} - h\sum_{l=1}^{N}\sigma_l\,, \qquad \sigma_l = \pm 1\,,$$

d.h. die Reichweite der Wechselwirkung ist unendlich. Dieses Modell läßt sich im thermodynamischen Limes $N \to \infty$ exakt lösen:

a) Zeigen Sie, dass sich die Hamiltonfunktion als Polynom zweiter Ordnung in $m = \sum_{l=1}^{N}\sigma_l$ schreiben läßt.

b) Wenden Sie die "Hubbard-Stratanovich" Transformation

$$e^{\frac{ax^2}{2N}} = \int_{-\infty}^{\infty} dy\,\sqrt{\frac{Na}{2\pi}}\,e^{-\frac{Nay^2}{2}+a\,xy}$$

an, um den Exponenten in der Zustandssumme in der Variablen m zu linearisieren.

c) Führen Sie nun die Summe über die Ising Spins $\sigma_l = \pm 1$ aus und lösen Sie das Integral mithilfe der Sattelpunktsmethode im Grenzfall $N \to \infty$.

d) Bestimmen Sie die Magnetisierung

$$M := \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\beta\,N}\frac{\partial \ln Z_N}{\partial h} = \frac{\langle m\rangle}{N}$$

und zeigen Sie, dass $M = y_0$ gilt, wobei y_0 die Lösung der transzendenten Gleichung

$$y_0 = \tanh(\beta\,J\,y_0 + \beta\,h)$$

ist. Wir werden in der Vorlesung zeigen, dass dieses Ergebnis identisch zu einer Mean-Field (Molekularfeld) Näherung des Ising Modells mit endlicher Reichweite ist.

Aufgabe H13.1 - Magnetische Suszeptibilität und Wärmekapazität des Isingmodells in Mean Field Näherung [3P]

i) Zeigen Sie, ausgehend von den Resultaten der Vorlesung für das Isingmodell in der Mean Field Näherung, dass für die magnetische Suszeptibilität χ für $T \sim T_c$ im Grenzfall verschwindenden äußeren Feldes h gilt

$$\lim_{h\to 0} \chi = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_T = \begin{cases} \frac{1}{\kappa(T-T_c)} & T > T_c \\ \frac{1}{2\,\kappa(T_c-T)} & T < T_c \end{cases} .$$

Hierbei ist zu beachten, dass es für $T < T_c$ zu der Bildung einer inhomogenen Phase mit Domänenstruktur kommt, wie in der Vorlesung besprochen. D.h. für die Magnetisierung m im Grenzwert $h \to 0$ gibt es je nach Phase unterschiedliche Lösungen.

ii) Zeigen Sie weiterhin, dass die Wärmekapazität bei $h = 0$ und $T \sim T_c$ die Form

$$c_{h=0} = -NkT\,\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\Big|_{h=0} = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \frac{3}{2}\,Nk\frac{T}{T_c} & T < T_c \end{cases} ,$$

annimmt. Gehen Sie hierzu von einer Entwicklung der relevanten Größen nach den kleinen Parametern aus.

Aufgabe H13.2 - Lösung des 1-D Isingmodells mit offenen Randbedingungen [1P]

Wir betrachten das 1D Isingmodell mit Hamiltonian

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}$$

und offenen Randbedingungen. Beachten Sie, dass wir lokale Kppplungen J_i eingeführt haben. Berechnen Sie die Zustandssumme Z_N!
Hinweis: Zeigen Sie die Existenz der Rekursionsrelation $Z_{N+1} = 2\,Z_N\,\cosh[J_N/kT]$.

Bitte denken Sie an die Anmeldung zur Modulabschlussprüfung!