Übungsserie 2

Abgabe der Hausübungen am Mittwoch 01.11

Präsenzübungen

P2.1 - Ising-Spinkette

Die Ising-Spinkette ist ein eindimensionales Modellsystem für Spinsysteme: Ising-Spins nehmen die Werte $S_i = \pm\hbar/2$ an und können als z-Komponente des Spins von auf einem linearen Gitter lokalisierter Teilchen ($i = 1, \ldots, N$) interpretiert werden. Ein *Mikrozustand* des Ising-Systems ist durch die Angabe der Werte $S_i = \pm 1$ für $i \in [1,N]$ gekennzeichnet, etwa

$$|\psi\rangle = |++-+---+--\ldots+\rangle$$

Wir nehmen der Einfachheit halber im Folgenden an, dass N gerade ist.

a) Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Mikrozustände!

b) Der uns interessierende *Makrozustand* der Magnetisierung der Kette sei mittels $M = \sum_i S_i$ definiert als die Gesamtheit aller Mikrozustände zu einem festen Wert M. Welche Werte von M sind möglich?

c) Bestimmen Sie die Zahl $Z(M)$ von Mikrozuständen zu gegebenen M. Wie lautet bei gleichwahrscheinlicher Spinorientierung der einzelnen Ising-Spins der Mittelwert von M?

d) Zeigen Sie, dass die Abweichung dieser Magnetisierung vom Mittelwert im thermodynamischen Limes einer Gaußverteilung genügt.

P2.2 - Klassischer Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein 1-dim. klassischer harmonischer Oszillator $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,q^2$

a) Wie sehen die Phasenraumkurven für feste Energie E aus?

b) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen für $H \leq E$ und $E \leq H \leq E + \Delta$

Hausübungen

H2.1 - Poisson-Verteilung [1P]

Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung

$$w_N(N_1) = \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1}$$

aus der Vorlesung für $p_1 \ll 1$ und $N_1 \ll N$ in die *Poisson*-Verteilung

$$w_N(N_1) = \frac{\langle N_1 \rangle^{N_1}}{N_1!} \exp[-\langle N_1 \rangle]$$

übergeht! Zeigen Sie ferner, dass in der Posssionverteilung der Mittelwert von N_1 und das Schwankungsquadrat $(\Delta N_1)^2$ übereinstimmen.

H2.2 - Ising-Spinkette [2P]

Wir kehren zu der Diskussion der Ising Spinkette zurück und interessieren uns nun für die Observable der Gesamtenergie, die durch $E = -\epsilon_0 \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}$ definiert ist.

a) Welche Gesamtenergien sind möglich? Bestimmen Sie die Zahl $Z(E)$ von Mikrozuständen zu gegebenem E exakt.

b) Überprüfen Sie erneut, dass die Gesamtzahl von Mikrozuständen $\sum_E Z(E)$ der in P2.1 a) ermittelten entspricht!

c) Wie lautet der Mittelwert der Energie?

H2.3 - Klassischer Harmonischer Oszillator [2P]

Wir kehren zu dem 1-dim. klassischer harmonischer Oszillator $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2$ aus P2.2 zurück.

a) Bestimmen Sie die mikrokanonische Verteilungsfunktion ρ.

b) Berechnen Sie damit den Mittelwert der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ und den Mittelwert der potentiellen Energie $\langle U \rangle$ und zeigen Sie

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{E}{2} + \frac{\Delta}{4}\,.$$