P21 Statistische Physik **WS 17/18** **Prof. Jan Plefka**

Übungsserie 3

Abgabe der Hausübungen am Mittwoch 08.11

Präsenzübungen

P3.1 - Oberfläche der N-dimensionalen Einheitskugel

a) Zeigen Sie, dass die Oberfläche der N-dimensionalen Einheitskugel durch

$$\int d\Omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$$

gegeben ist, wobei $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dt\, t\, e^{-t}$. Hierzu ist es hilfreich das N-dimensionale Gaußintegral einerseits mittels Faktorisierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N e^{-x_1^2-x_2^2 \dots -x_N^2} \prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-x_i^2} = \sqrt{\pi}^N$$

und andererseits durch das Oberfäche O_N der N-dimensionalen Einheitskugel auszudrücken.

b) Zeigen Sie ausgehend von $V_3 = \frac{4\pi}{3}$, dass

$$\Gamma(\frac{n}{2}+1) = \sqrt{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\, n!! \qquad n \text{ ungerade}$$

gilt. Hierbei ist die Doppelfakultät als $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots n$ definiert.

P3.2 - Unbestimmtheitsmaß nach Shannon

Es sei bekannt, dass in Adlershof am 1. Juni 2018 die Wahrscheinlichkeit für Regen 0.4 und für keinen Niederschlag 0.6 ist. Am 1. Januar 2018 hingegen beträgt die Wahrscheinlichkeit für Regen 0.65, für Schneefall 0.15 und für keinen Niederschlag 0.2. An welchem der beiden Tage ist eine Wetterprognose unbestimmter (im Sinne des Shannon'schen Unbestimmtheitsmaß (auch bekannt als Entropie), wenn man unter einer Wetterprognose die Angabe versteht

a) ob es an den fraglichen Tagen regnet, schneit oder keinen Niederschlag gibt?

b) ob es an den fraglichen Tagen Niederschlag gibt oder nicht.

Diskutieren Sie Ihr Ergebnis!

H3.1 - Volumen und Oberflächen in hohen Dimensionen [2P]

Eine überraschende und für die Statistische Physik sehr wichtige Tatsache ist: *Fast das gesamte Volumen eines hochdimensionalen Körpers liegt unmittelbar unter seiner Oberfläche.* Im Hinblick auf den Phasenraum von Vielteilchensystemen denken wir an Raumdimensionen der Größenordnung $3N$ mit $N \sim 6 \cdot 10^{23}$ (Avogadro-Zahl). Wir wollen speziell Volumina und Oberflächen von Kugeln und Würfeln betrachten.

a) Für das Volumen einer N-dimensionalen Kugel oder Würfel gilt $V_N(L) = L^N \cdot V_N(1)$, wobei L den Radius bzw. Kantenlänge bezeichnet. Zeigen Sie für beliebiges festes κ

$$\lim_{N\to\infty} \frac{V_N(L) - V_N(L - \kappa\frac{L}{N})}{V_N(L)} = 1 - e^{-\kappa}$$

und diskutieren Sie dieses Ergebnis.

b) Begründen Sie folgende Zusammenhänge für die Oberfläche O und Volumen V einer Kugel bzw. Würfels in N Dimensionen

$$\frac{d}{dR}V_N(R) = O_N(R) \qquad \frac{d}{dL}V_N(L) = \frac{1}{2}O_N(L)$$

Ausehend von $V_N(L) = L^N$ und $V_N(R) \propto R^N$ zeigen Sie, dass für die Oberfläche des N-dimensionalen Einheitswürfels $O_N(1) = 2N$ gilt sowie der Zusammenhang $V_N(R) = \frac{R}{N}O_N(R)$ folgt. Was bedeutet dies für große N anschaulich?

H3.2 - Sattelpunktsmethode [1P]

Wir betrachten eine Klasse von mehrdimensionalen Integralen der Form

$$I = \int \prod_{i=1}^{n} dx_i \, \exp\Big[-N\, S(x_1, \dots, x_n)\Big]$$

im Grenzfall $N \to \infty$ bei festem n. In diesem Grenzfall ist der Wert von I dominiert durch die Sattelpunkte $\{x_i^c\}$ die

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}(x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c) = 0$$

erfüllen. Wählt man hier den dominantesten Sattelpunkt $\vec{x}^c$ aus, so lässt sich das Integral perturbativ in einer Entwicklung von Potenzen in $1/\sqrt{N}$ lösen, indem man die Entwicklung um den Sattelpunkt

$$\vec{x} = \vec{x}^c + \vec{y}/\sqrt{N}$$

ansetzt.

a) Finden Sie diese Lösung für I in führender Ordnung indem Sie S bis zum quadratischen Term in $\vec{y}$ entwickeln und schätzen Sie den Fehler ab!

b) Überprüfen Sie das Verfahren indem Sie das Integral

$$I(N) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-N(-x^2+\lambda x^4)}$$

mittels der Sattelpunktsmethode auswerten und mit einer numerischen Integration vergleichen! (Achtung: Hier gibt es zwei gleich wichtige Sattelpunkte!)

H3.3 - Entropieerhaltung und Extremaleigenschaft [2P]

In der Vorlesung haben wir die Definition der Entropie durch den statistischen Operator ρ eines Ensembles mittels $S = -k\,\mathrm{Sp}(\rho\,\log\rho)$ kennengelernt.

a) Zeigen Sie, dass die Entropie zeitlich konstant ist. Hier ist die Bewegungsgleichung von ρ, die von-Neumann Gleichung, zu benutzen.

b) Zeigen Sie weiterhin, dass von allen Ensembles deren Energie im Intervall $[E, E+\Delta]$ liegt, die Entropie des mikrokanonischen Ensembles maximal ist. Interpretieren Sie dies!