Übungsserie 8

Abgabe der Hausübungen am 13.12.2017

Präsenzübungen

P8.1 - Zweidimensionales ideales Elektronengas

Wir betrachten ein zweidimensionales Elektronengas ($s = 1/2$) bestehend aus N Teilchen gebunden in einem Quadrat der Fläche L^2.

a) Wie groß sind Fermi-Impuls p_F und Fermi-Energie ϵ_F hier?

b) Bestimmen Sie für das großkanonische Ensemble das chemische Potential $\mu(T,N/V)$ im Tieftemperaturgrenzfall. Beachten Sie, dass hier μ exakt als Funktion von T und ϵ_F bestimmt werden kann, die Sommerfeldentwicklung ist nicht nötig.

c) Bestimmen Sie nun das großkanonische Potential Φ in der Sommerfeldentwicklung, d.h. in einer Niedertemperaturentwicklung ausgedrückt in den Größen N,T,ϵ_F. Können Sie eine Aussage über den Abbruch der Sommerfeldentwicklung machen?

d) Leiten Sie aus die Zustandsgleichung $pV = \ldots$ sowie die innere Energie her.

Hausübungen

H8.1 - Dreidimensionales ideales ultrarelativistisches Elektronengas [2P]

Wir betrachten ein dreidimensionales Elektronengas ($s = 1/2$) bestehend aus N ultrarelativistischen Teilchen mit der Dipersionsrelation $\epsilon_p = c|\vec{p}|$ gebunden in einem Volumen V.

a) Wie groß sind Fermi-Impuls p_F und Fermi-Energie ϵ_F hier?

b) Bestimmen Sie für das großkanonische Ensemble das chemische Potential $\mu(T,\epsilon_F)$ im Tieftemperaturgrenzfall in der Sommerfeldentwicklung.

c) Bestimmen Sie nun das großkanonische Potential Φ in der Sommerfeldentwicklung, ausgedrückt in den Größen N,T,ϵ_F.

d) Leiten Sie aus die Zustandsgleichung $pV = \ldots$ sowie die innere Energie her.

H8.2 - Entropie und spezifische Wärme des idealen Bose-Gases [2P]

In der Vorlesung konnten wir die Zustandsgleichung eines idealen Bose-Gases zu

$$p = \frac{kT}{\lambda^3} \begin{cases} g_{5/2}(z) & T > T_c \\ \zeta(\frac{5}{2}) & T \leq T_c \end{cases} \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\,, \quad z = e^{\beta\mu}$$

etablieren.

a) Berechnen Sie die Entropie $S = -(\frac{\partial\Phi}{T})_{V,\mu}$ mit $\Phi = -pV$ für homogene Systeme für das ideale Bose-Gas und überprüfen Sie den klassischen Limes.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\frac{d}{dz}g_\nu(z) = z^{-1}\, g_{\nu-1}(z)$ gilt.

b) Berechnen Sie weiterhin die Wärmekapazität bei konstantem Volumen des idealen Bose-Gases $C_V = T\,(\frac{\partial S}{\partial T})_{N,V}$. Welchen Wert nimmt C_V bei der kritischen Temperatur $T_c(n)$ bzw. für große T/T_c an?

   Hinweis: Differenzieren Sie $N = V\,\lambda^{-3}\, g_{3/2}(z)$ um $(\frac{\partial z}{\partial T})_{N,V}$ zu berechnen.

H8.3 - Bose-Einstein-Kondesation in zwei Dimensionen [1P]

Untersuchen Sie die Existenz einer kritischen Temperatur für die Bose-Einstein Kondensation im Fall eines zweidimensionalen, idealen, nicht-relativistischem Bose-Gas d.h. wir haben die Dispersionsrelation $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ vorliegen. Geben Sie im Falle der Existenz einer Bose-Einstein Kondensation die kritische Temperatur bei konstanter Dichte an.