P21 Statistische Physik **WS 17/18** **Prof. Jan Plefka**

Übungsserie 9

Abgabe der Hausübungen am 20.12.2017

Präsenzübungen

P9.1 - Spezisische Wärme eines generischen, idealen Bose-Gases in d Dimensionen

Betrachten Sie ein ideales Bose-Gas in d Dimensionen mit chemischen Potential $\mu = 0$ und der Dispersionsrelation

$$\epsilon_{\vec{p}} = \epsilon_0 \left(\frac{|\vec{p}|}{p_0} \right)^a ,$$

wobei ϵ_0 bzw. p_0 Konstanten mit der Dimension Energie bzw. Impuls sind. Beispiele für den Fall $a = 1$ sind z.B. freie Photonen, akustische Phononen (in der sogenannten Debye-Näherung) oder Magnonen (Spinwellen) in Antiferromagneten. Ein Beispiel für $a = 2$ sind nichtrelativistische ideale Gase und Spinwellen in Ferromagneten. Bestimmen Sie das führende Tieftemperaturverhalten der spezifischen Wärme c_V für allgemeine Dimensionen d und Dispersionsparameter a.
Hinweise:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dx\, x^{n-1}\, e^{-x}$$

Volumen der Einheitskugel: $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$

Hausübungen

H9.1 - Einige Identitäten zum 1D Festkörpermodell [1P]

In der Vorlesung hatten wir ein 1D Modell eines Kristalls bestehend aus N harmonisch gekoppelten Massenpunkten u_n mit periodischen Randbedingungen $u_{N+1} = u_1$ studiert, das durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{W}_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{f}{2} \left(\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n \right)^2$$

beschrieben wird. $\hat{H}$ wurde diagonalisiert durch eine diskrete Fouriertransformation mit

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\sqrt{Nm}} \sum_{k \in K} e^{ikan}\, \hat{Q}_k$$

$$\hat{p}_n = \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_{k \in K} e^{-ikan}\, \hat{P}_k \qquad K = \{ -\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{aN}\, l,\ l = 0, \dots N-1 \}$$

wobei a den Gitterabstand der Massenpunkte in der Gleichgewichtslage beschreibt. In Ergänzung dieser Diskussion wollen wir zwei Sachverhalte überprüfen:

a) Zeigen Sie zunächst, dass gilt

$$\sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi \frac{l-l'}{N} n} = N\, \delta_{l,l'}\,.$$

b) Zeigen Sie weiterhin, dass aus den kanonischen Vertauschungsrelationen für $\hat{u}_n$ und $\hat{p}_n$, d.h. $[\hat{u}_n, \hat{p}_{n'}] = i\hbar\delta_{n,n'}$ die Vertauschungsrelation der Normalkoordinaten

$$[\hat{Q}_k, \hat{P}_{k'}] = i\hbar\, \delta_{k,k'}$$

folgen.

H9.2 - Wärmekapazität im Debye-Modell [2P]

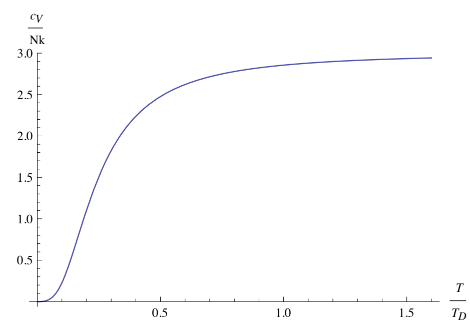
Im Debye-Modell eines Festkörpers wird die spektrale Zustandsdichte der Phononen durch

$$g_{\text{Debye}}(\omega) = \frac{3\omega^2}{\omega_D^3}\, \theta(\omega_D - \omega)\,, \qquad \omega_D : \text{Debye-Frequenz}$$

modelliert, wobei $\theta(x > 0) = 1$ und $\theta(x \leq 0) = 0$ ist.

a) Zeigen Sie, dass in diesem Modell die Wärmekapazität durch (numerischer Plot)

$$C_V = 9Nk\, \frac{T^3}{T_D^3} \int_0^{T_D/T} dx\, \frac{x^4\, e^x}{(e^x - 1)^2}$$



gegeben ist, mit der Debye-Temperatur $T_D = \hbar\omega_D/k$.

b) Zeigen Sie weiterhin das Grenzverhalten

$$C_V = \begin{cases} \frac{12\,\pi^4}{5}\, N\, k\, \frac{T^3}{T_D^3} + \ldots & \text{für} \quad T \ll T_D \\ 3Nk\Big(1 - \frac{1}{20}\, (\frac{T_D}{T})^2 + \ldots\Big) & \text{für} \quad T \gg T_D \end{cases}$$

H9.3 - Statistischer Operator für Spinsysteme [2P]

Gegeben sei ein gemischter Zustand aus den Eigenzuständen $|\uparrow_z\rangle$ des Spin-1/2-Operators in z-Richtung $\hat{S}_z$ und $|\uparrow_x\rangle$ des Spin-1/2-Operators in x-Richtung $\hat{S}_x$ mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 50%.

a) Bestimmen Sie $|\uparrow_x\rangle$ in der Basis $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$.

b) Wie lautet der statistische Operator $\hat{\rho}$ in Matrixdarstellung bzgl. der Eigenzustände von $\hat{S}_z$?

c) Bestimmen Sie die Eigenzustände von $\hat{\rho}$ in der Basis der Eigenzustände von $\hat{S}_z$.

d) Berechnen Sie die Entropie $S = -k\mathrm{Tr}\hat{\rho}\ln\hat{\rho}$ des gemischten Zustands.