Theoretische Physik I: Klassische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Vorlesungsskript zum Modul P2.1

Prof. Dr. Jan Plefka

Quantenfeld- und Stringtheorie
Institut für Physik

Version 7. August 2021

Inhaltsverzeichnis

I Mechanik des Massenpunktes

I.1 Raum, Zeit, Koordinaten und Transformationen

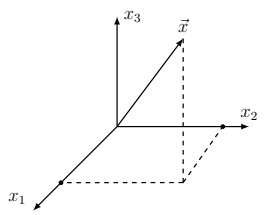
Bevor wir mit der Diskussion der Mechanik eines Massenpunktes beginnen, wollen wir einige grundlegende Gedanken zur Struktur des Raumes in dem wir uns bewegen fassen. Dies wird uns auf das Konzept einer Koordinatentransformationen und den Begriff einer mathematischen Gruppe führen, die grundlegende Bedeutung in der Physik haben.

Raum

Aus der Erfahrung heraus meinen wir zu wissen, dass wir in einem dreidimensionalen, linearen Raum leben. Es ist daher sinnvoll die Lage von Körpern (=idealisiert als Massenpunkte) und deren Abstände durch Punkte bzw. Vektoren im $\mathbb{R}^3$ anzugeben:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \tag{I.1}$$

Die reellen Zahlen x_i (mit $i = 1, 2, 3$) heißen die kartesischen Koordinaten[1] des Punktes $\vec{x}$.

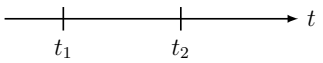


Abstand zweier Punkte:

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{y}| &= +\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^2} \end{aligned} \tag{I.2}$$

Zeit

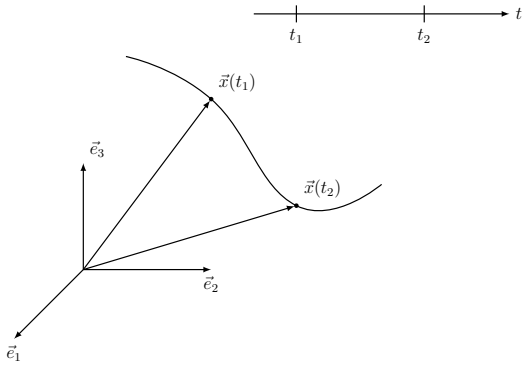
Weiterhin erscheint uns die Erfahrung zu lehren, dass es eine universelle an allen Raumpunkten gleich voranschreitende Zeit $t \in \mathbb{R}$ gibt, die von koordinierten Uhren gemessen wird:



Bahnkurve

Betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes im Raum, so läßt sich diese durch eine Bahnkurve beschreiben:

[1] (René Descartes, Frankreich, 1596-1616)



$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\,\vec{e}_i \qquad \text{(I.3)}$$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems

Die $\vec{e}_1$ bilden eine Orthonormalbasis (ONB)

$$\vec{e}_1 = (1,0,0) \qquad \vec{e}_2 = (0,1,0) \qquad \vec{e}_3 = (0,0,1) \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad \forall i,j \qquad \text{(I.4)}$$

Hier ist δ_{ij} das Kroneckersymbol[2]

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(I.5)}$$

Die Basisvektoren sind zeitunabhängig.

Geschwindigkeit

$$\frac{d\vec{x}}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \vec{v} = \sum_i \frac{dx_i(t)}{dt}\,\vec{e}_i = \dot{\vec{x}} \qquad \text{(I.6)}$$

Beschleunigung

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} := \sum_i \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2}\,\vec{e}_i = \vec{a} = \ddot{\vec{x}} \qquad \text{(I.7)}$$

Transformationen

Eine zentrale Frage, die wir uns immer wieder stellen werden lautet: Welche Transformationen lassen eine vorgegebene Struktur unverändert (invariant)? Die Existenz solcher Transformationen hat weitreichende Folgen für ein physikalisches System. Die Struktur des physikalischen Raumes $\mathbb{R}^3$ ist die eines linear-reellen Raumes, d.h. falls $\vec{x}$ und $\vec{y}$ im Raum liegen, so tun dies auch die Linearkombinationen $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Frage: Welche Transformationen lassen die Struktur von $\mathbb{R}^3$ invariant? D.h. unter welchen Transformationen bleibt der Abstand zweier Punkte (I.2) unverändert?

1) Translationen

Verschiebungen um einen konstanten Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

$$\boxed{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}} \qquad \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{(I.8)}$$

Die Translationen bilden eine Gruppe. D.h. die Hintereinanderausführung zweier Translationen ist wiederum eine Translation:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}\,, \qquad \vec{x}'' = \vec{x}' + \vec{b} = \vec{x} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{x} + \vec{c} \qquad \text{(I.9)}$$

[2] (Leopold Kronecker, Deutschland, 1823-1891)

mit $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ "Abgeschlossenheit"

Weiterhin, dass der Nullvektor $\vec{0} = (0, 0, 0)$ auch einer Translation entspricht

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \qquad \text{"Existenz der Einheit"} \tag{I.10}$$

Und schließlich, dass jede Translation wieder rückgängig gemacht werden kann: Die zu $\vec{a}$ inverse Translation lautet $(-\vec{a})$:

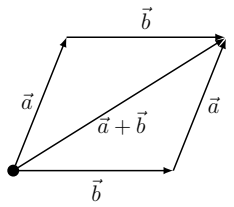
$$\begin{aligned} \vec{x}'' &= \vec{x} + \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{x} \\ &\Rightarrow \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \qquad \text{"Existenz des Inversen"} \end{aligned} \tag{I.11}$$

Diese drei Eigenschaften charakterisieren allgemein eine Gruppe G:

- Abgeschlossenheit des Produktes $\circ$ (Hintereinanderausführung der Transformation)
  Für $a, b \in G$ ist auch $a \circ b \in G$. Ferner muss das Produkt assoziativ sein, d.h. es gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- Existenz der Einheit:
  $\exists e \in G$ so dass für $a \in G$ gilt $a \circ e = e \circ a = a$
- Existenz des Inversen:
  $\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G$ so dass $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Die Gruppe der Translationen ist darüberhinaus abel'sch[3], d.h. die Hintereinanderausführung zweier Translationen kann vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu verändern:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{I.12}$$



Weiterhin hängt die Gruppe der Translationen von 3 reellen Parametern (a_1, a_2, a_3) ab, es ist eine sog. dreiparametrige kontinuierliche Gruppe.

Infinitesimale Translation: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\epsilon}$ mit $\frac{|\vec{\epsilon}|}{[m]} \ll 1$ $[m]$: Längeneinheit, z.B. Meter.

Endliche Transformationen sind so kontinuierlich mit der Einheit $\vec{0}$ verbunden.

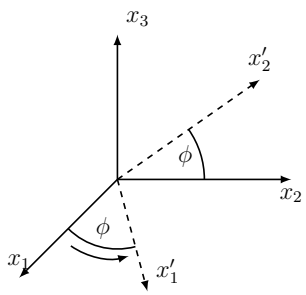
2) Rotationen

Betrachten wir nun die Drehung um die x_3 Achse:

$$\begin{aligned} x_1' &= \cos\phi \, x_1 + \sin\phi \, x_2 \\ x_2' &= -\sin\phi \, x_1 + \cos\phi \, x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \tag{I.13}$$

bzw.[a]

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \underline{A}_\phi \, \vec{x} \tag{I.14}$$



[a] Wir werden im Folgenden die Symbole für Matrizen unterstreichen.

[3] (Niels Hendrik Abel, Norwegen, 1802-1829)

Ein Punkt des Raumes wird offensichtlich wieder in einen Punkt des Raumes überführt. Der Abstand zweier Punkte bleibt unverändert, wenn beide Punkte rotiert werden: Für einen zweiten Punkt $\vec{y}$ hat man

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{y} = \underline{A}_\phi \, \vec{y} \tag{I.15}$$

und es gilt $\boxed{|\vec{x}' - \vec{y}'| = |\vec{x} - \vec{y}|}$.

Infinitesimale Drehung:

$\phi = \epsilon \ll 1$ so dass $\cos\epsilon \approx 1$ und $\sin\epsilon \approx \epsilon$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \epsilon\, x_2 \\ x_2' &= -\epsilon\, x_1 + x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \tag{I.16}$$

oder $\vec{x}' = (\underline{\mathbb{1}} + \epsilon\, \underline{T}_3)\, \vec{x}$ mit

$$\underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{I.17}$$

$\underline{T}_3$ nennt man Erzeugende der Rotation um die 3-Achse (oder z-Achse). Die endliche Drehung (I.13) kann mithilfe der Erzeugenden $\underline{T}_3$ geschrieben werden als

$$\underline{A}_\phi = e^{\phi\, \underline{T}_3} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cos\phi + \underline{T}_3 \, \sin\phi + \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{I.18}$$

Dies folgt aus der Relation

$$(\underline{T}_3)^2 = \begin{bmatrix} -\mathbb{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{I.19}$$

Entsprechendes gilt für die Drehungen um die 1- und 2-Achsen:

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{I.20}$$

Drehungen können um eine beliebige Achse durchgeführt werden. Diese läßt sich mithilfe eines Drehvektors $\vec{\phi}$ parametrisieren: Drehung um die Achse $\vec{\phi}/|\vec{\phi}|$ mit dem Winkel $|\vec{\phi}| = \phi$. Die zugehörige Drehmatrix lautet dann

$$\boxed{\underline{A}_{\vec{\phi}} := e^{\vec{\phi}\cdot\vec{\underline{T}}} = e^{\phi_1\, \underline{T}_1 + \phi_2\, \underline{T}_2 + \phi_3\, \underline{T}_3}} \tag{I.21}$$

Plausibel: Bei einer Wahl der Achsen des Koordinatensystems bei vorgegebener Drehung $\vec{\phi}$ wählen wir $\vec{e}_3 \parallel \vec{\phi}$ und $\underline{A}_{\vec{\phi}}$ aus (I.21) reduziert sich auf (I.18).

Allgemeine Form einer Drehung

Wir wollen nun eine allgemeine Drehung (I.24) auf alternativem Wege bestimmen. Eine Drehung besitzt die allgemeine Eigenschaft den Nullpunkt des Koordinatensystems invariant zu lassen. Es handelt sich deshalb um eine allgemeine lineare Transformation für die wir ansetzen

$$\vec{x}' = \underline{A}\, \vec{x} \qquad \text{bzw.} \qquad x_l' = \sum_{k=1}^{3} A_{lk}\, x_k \tag{I.22}$$

mit $A_{lk} \in \mathbb{R}$ den Einträgen der Matrix $\underline{A}$. Eine Rotation läßt den Abstand invariant. D.h. für den Abstand des Punktes $\vec{x}$ zum Ursprung $\vec{0}$ muss gelten:

$$\vec{x}'^2 = \vec{x}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_l x'_l\, x'_l = \sum_{l,k,n} A_{lk}\, x_k\, A_{ln}\, x_n \overset{!}{=} \sum_k x_k\, x_k$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\sum_l A_{lk}\, A_{ln} = \delta_{kn}} \tag{I.23}$$

Transponierte Matrix $\underline{A}^T$: $\qquad (A^T)_{lk} := A_{kl}$
Damit läßt sich (I.23) in Matrixnotation schreiben als

$$\boxed{\underline{A}^T \cdot \underline{A} = \mathbb{1}} \tag{I.24}$$

Matrizen, die (I.24) erfüllen, heißen orthogonale Matrizen. Man zeigt, dass orthogonale Matrizen eine Gruppe bilden:

Für das Produkt zweier orthogonaler Matrizen $\underline{A} \cdot \underline{B}$ gilt

$$(\underline{A}\,\underline{B})^T\, \underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B}^T\, \underbrace{\underline{A}^T\, \underline{A}}_{=\mathbb{1}}\, \underline{B} = \underline{B}^T\, \mathbb{1}\, \underline{B} = \underline{B}^T\, \underline{B} = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ auch $\underline{AB}$ ist orthogonal. Ferner ist die Matrixmultiplikation assoziativ. (Abgeschlossenheit)

Die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ ist orthogonale Matrix. (Existenz der Identität)

Weiterhin ist $\underline{A}^T = \underline{A}^{-1}$ ebenfalls orthogonal (Existenz des Inversen)

Damit haben wir eine Gruppe vorliegen: Die orthogonale Gruppe in 3D. Man schreibt $O(3)$.

Aus $\underline{A}^T\, \underline{A} = \mathbb{1}$ folgt für die Determinante $\det\big(\underline{A}^T\, \underline{A}\big) = 1$. Da

$$1 = \det\big(\underline{A}^T\, \underline{A}\big) = \det\big(\underline{A}^T\big)\, \det(\underline{A}) = \det(\underline{A})^2$$

folgt $\boxed{\det(\underline{A}) = \pm 1}$.

Matrizen mit $\det(\underline{A}) = -1$ können nicht kontinuierlich in die Einheit überführt werden, da $\det(\mathbb{1}) = 1$. Sie haben keine Erzeugenden!

Bsp: Transformation für $\det(\underline{A}) = -1$: Spiegelung

$$\begin{aligned} x'_1 &= -\,x_1 \\ x'_2 &= -\,x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{A} = -\mathbb{1} \\ x'_3 &= -\,x_3 \end{aligned} \tag{I.25}$$

Gemeinsam mit der $\mathbb{1}$ bilden $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ eine diskrete Gruppe mit 2 Elementen.

Die orthogonalen Matrizen mit $\det(\underline{A}) = 1$ bilden eine Untergruppe von $O(3)$ und können kontinuierlich mit der Einheit verbunden werden. Man bezeichnet diese Untergruppe als spezielle, orthogonale Gruppe $SO(3)$ oder Rotationsgruppe.

Infinitesimal: $\qquad \underline{A} = \mathbb{1} + \epsilon\, \underline{T} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\mathbb{1} = \underline{A}^T\, \underline{A} = \mathbb{1} + \epsilon\, (\underline{T}^T + \underline{T}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\underline{T}^T = -\underline{T}} \tag{I.26}$$

Die Erzeugenden von $SO(3)$ sind antisymmetrische Matrizen!

Jede antisymmetrische Matrix läßt sich als Linearkombination der drei Erzeuger $\underline{T}_1, \underline{T}_2, \underline{T}_3$ aus (I.17) und (I.20) schreiben:

$$\underline{T} = \sum_{l=1}^{3} \phi_l \, \underline{T}_l \, . \tag{I.27}$$

Übung:

Zeige, dass $(T_i)_{jk} = \epsilon_{ijk}$ ist, wobei ϵ_{ijk} ein total antisymmetrischer Tensor mit $\epsilon_{123} = 1$ ist.

I.2 Trägheitsgesetz, Inertialsystem, Galileitransformation

Ziel der Mechanik ist es die Bewegung von Körpern zu verstehen, wenn man die Kräfte kennt, die auf sie wirken. Hier betrachten wir zunächst einen Körper, den wir als Punktteilchen idealisieren können, da seine Ausdehnung für die betrachtete Größenordnungen der Bewegung vernachlässigbar seien.

Grundlage der Mechanik sind die Newton'schen Gesetze[4]

1. Gesetz; Trägheitsgesetz

Es gibt Koordinatensysteme (=Inertialsysteme) in denen ein Körper in gleichförmiger Bewegung oder Ruhe bleibt, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt.

Dies ist keine unmittelbare Erfahrung, da Inertialsysteme nicht leicht zu bekommen sind.

In einem Inertialsystem lautet die Bahnkurve eines Punktteilchens auf das keine Kraft wirkt:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \, t \, . \tag{I.28}$$

Bahnkurve durch $3 + 3 = 6$ Parameter festgelegt, die Anfangsbedingungen des Ortes $\vec{x}_0$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}_0$.

Frage: Welche Transformationen T führen Inertialsysteme in Inertialsysteme über?

D.h. für welche T gilt: $\boxed{\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \, t \xrightarrow{T} \vec{x}'(t') = \vec{x}'_0 + \vec{v}'_0 \, t'}$

Antwort:

- Sicherlich die Translation und Rotation:

$$\begin{aligned} &\text{Translation:} && \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} \quad t \to t' = t && \Rightarrow && \vec{x}'_0 = \vec{x}_0 + \vec{a} \, , && \vec{v}'_0 = \vec{v}_0 \\ &\text{Rotation:} && \vec{x} \to \vec{x}' = \underline{A}_{\vec{\phi}} \, \vec{x} \quad t \to t' = t && \Rightarrow && \vec{x}'_0 = \underline{A}_{\vec{\phi}} \vec{x}_0 \, , && \vec{v}'_0 = \underline{A}_{\vec{\phi}} \vec{v}_0 \end{aligned}$$

- Weiterhin die Translation in der Zeit:

$$\text{Zeittranslation:} \quad \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} \quad t \to t' = t + \tau \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'_0 = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \, \tau \, , \quad \vec{v}'_0 = \vec{v}_0$$

- Und die Verschiebung des Koordinatensystems mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{V}$:

$$\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{V} \, t \quad t \to t' = t \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'_0 = \vec{x}_0 \, , \quad \vec{v}'_0 = \vec{v}_0 + \vec{V}$$

[4] (Isaac Newton, England, 1643-1727)

Alle diese Transformationen gemeinsam bilden die Galileitransformationen[5]

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \underline{A}_{\vec{\phi}}\,\vec{x} + \vec{a} + \vec{V}\,t \\ t' &= t + \tau \end{aligned} \tag{I.29}$$

Dies ist eine 10 parametrige nicht-abel'sche Gruppe.

Die Bahnkurven (I.28) sind Lösungen der kräftefreien Newtongleichung $\boxed{m\,\ddot{\vec{x}} = 0}$ bzw. $\boxed{\ddot{\vec{x}} = 0}$.

Wiederum sind die Galilieitransformationen genau jene, die diese Gleichung in sich überführen:

$$\ddot{\vec{x}} = 0 \quad \xrightarrow{G.T.} \quad \underline{A}_{\vec{\phi}}\,\ddot{\vec{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{x}} = 0 \qquad (\text{da } \underline{A}_{\vec{\phi}} \text{ invertierbar}) \tag{I.30}$$

D.h. $\ddot{\vec{x}} = 0$ ist nicht streng invariant unter Galileitransformationen (I.29) sondern "kovariant".

Galilei'sches Prinzip

Naturgesetze ändern sich nicht, wenn man sie in einem anderen Inertialsystem formuliert. Es gibt somit kein ausgezeichnetes Inertialsystem!

Universeller Anspruch, sollte für alle fundamentalen Naturgesetze gelten.

N.B: Wir wissen aber, dass dieses Prinzip nur approximativ gilt, da in der relativistischen Mechanik die Lorentztransformationen an die Stelle der Galileitransformationen treten werden.

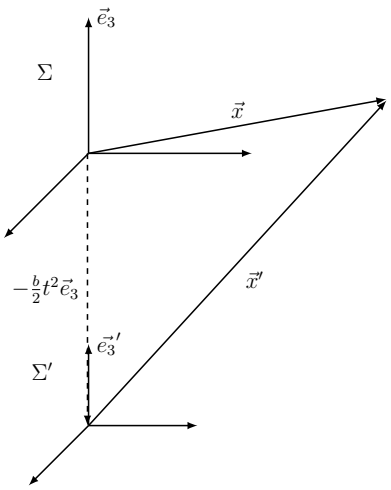
I.3 Beschleunigte Bezugssysteme

Wir wollen nun untersuchen, wie sich das kräftefreie Newton'sche Grundgesetz $m\ddot{x} = 0$ ändert, wenn man Transformationen von Inertialsystemen zu Nichtinertialsysteme betrachtet:

Σ : Inertialsystem

Σ' : Relativ zu Σ beschleunigt bewegtes Bezugssystem

I.3.1 Gleichförmig beschleunigtes Bezugssystem



Σ : Inertialsystem

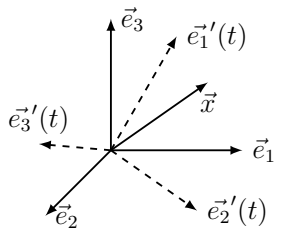
Σ' : Gleichförmig in $\vec{e}_3$-Richtung beschleunigtes Bezugssystem

[5] (Galileo Galilei, Italien, 1564-1642)

$$\vec{x} = \vec{x}' - \frac{b}{2}t^2\vec{e}_3$$
$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}' - b\vec{e}_3$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \Sigma & : & m\ddot{\vec{x}} = 0 \\ \Sigma' & : & m\ddot{\vec{x}}' = \underbrace{b\vec{e}_3}_{\text{Trägheitskraft}} \end{array}}$$

I.3.2 Rotierendes Bezugssystem um festen Punkt



$$\begin{array}{lll} \Sigma & : & \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \Sigma' & : & \vec{e'}_i(t) \cdot \vec{e'}_j(t) = \delta_{ij} \end{array}$$

Zwei Orthonormalbasen $\{\vec{e}_i\}$ und $\{\vec{e'}_i\}$ $\quad i = 1, 2, 3$.

Allgemeiner Vektor $\vec{x}$ zu einem festen Zeitpunkt t:

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i = \sum_i x_i'(t)\vec{e'}_i(t)$$

Multiplikation dieser Vektorgleichung mit $\vec{e'}_j(t)$ liefert die Transformation von x_i:

$$\sum_i x_i \underbrace{\left(\vec{e'}_i(t) \cdot \vec{e}_i\right)}_{=:D_{ji}(t)} = \sum_i x_i'(t)\delta_{ij} = x_j'(t)$$

$$\Rightarrow x_i'(t) = \boxed{\sum_j D_{ij}(t)x_j} \qquad \text{zu festem } t \tag{I.31}$$

$D_{ij}(t) = \vec{e'}_i(t) \cdot \vec{e}_j$ ist eine Drehmatrix, da $D^T_{ij}(t) = \vec{e}_i \cdot \vec{e'}_j(t)$ die inverse Matrix zu D ist.

<u>Beweis:</u>

<u>Äußeres Produkt</u> $\quad (\vec{e}_i)_\alpha\,(\vec{e}_j)_\beta$ oder $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Bsp: $\quad \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. D.h. es gilt $\sum_i \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i = \mathbb{1}$ bzw. $\sum_i (\vec{e}_i)_\alpha\,(\vec{e}_i)_\beta = \delta_{\alpha\beta}$.

Angewandt auf unser Problem folgt

$$\sum_j D_{ij}(t)\,D^T_{jk}(t) = \sum_j (\vec{e'}_i(t) \cdot \vec{e}_j)\,(\vec{e}_j \cdot \vec{e'}_k(t)) = (\vec{e'}_i(t) \cdot \underbrace{\sum_j \vec{e}_j)\,(\vec{e}_j}_{\mathbb{1}} \cdot \vec{e'}_k(t)) = \vec{e'}_i(t) \cdot \vec{e'}_k(t) = \delta_{ik}$$

Bzw. in Matrixnotation: $\underline{D}(t) \cdot \underline{D}^T(t) = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \underline{D}(t) \in O(3)$.

Aus (I.31) folgt:

$$\boxed{\dot{x}_i'(t) = \sum_j \dot{D}_{ij}(t)x_j + \sum_j D_{ij}(t)\dot{x}_j} \tag{I.32}$$

Die momentane Drehachse

Zerlegung von $\dot{\vec{e}}'_i(t)$ in die Basis $\left(\vec{e}'_i\right)(t)$:

$$\boxed{\dot{\vec{e}}'_i = \sum_j \underbrace{\left(\dot{\vec{e}}'_i \cdot \vec{e}'_j\right)}_{=:\Omega_{ij}} \vec{e}'_j = \sum_j \Omega_{ij} \vec{e}'_j} \tag{I.33}$$

Die Matrix $\underline{\Omega}$ ist antisymmetrisch: $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$, da

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij} &\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}{\Rightarrow} \dot{\vec{e}}'_i \cdot \vec{e}'_j + \vec{e}'_i \cdot \dot{\vec{e}}'_j = 0 \\ \Rightarrow \Omega_{ij} + \Omega_{ji} &= 0 \end{aligned}$$

<u>Def.:</u> $\dot{\vec{e}}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = \omega'_3$, $\dot{\vec{e}}'_2 \cdot \vec{e}'_3 = \omega'_1$, $\dot{\vec{e}}'_3 \cdot \vec{e}'_1 = \omega'_2$ bzw. kompakt geschrieben: $\dot{\vec{e}}'_i \cdot \vec{e}'_j = \epsilon_{ijk}\omega'_k$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega'_3 & -\omega'_2 \\ -\omega'_3 & 0 & \omega'_1 \\ \omega'_2 & -\omega'_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alternative Schreibweise über Vektorprodukt: z.B.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}'_1 &= \omega'_3 \vec{e}'_2 - \omega'_2 \vec{e}'_3 = \omega'_3 \vec{e}'_3 \times \vec{e}'_1 + \omega'_2 \vec{e}'_2 \times \vec{e}'_1 \\ &= \left(\sum_i \omega'_i \vec{e}'_i\right) \times \vec{e}'_1 =: \vec{\omega}(t) \times \vec{e}'_1 \end{aligned}$$

Analog

$$\boxed{\dot{\vec{e}}'_j(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}'_j(t)} \tag{I.34}$$

Wir nennen $\vec{\omega}(t)$ die <u>momentane Drehachse</u> mit Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}|$ und der Drehachse $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$.

Zeitliche Veränderung eines Vektors im rotierenden Bezugssystem

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \sum_i x'_i(t) \vec{e}'_i(t) \\ \dot{\vec{x}} &= \sum_i \dot{x}_i(t) \vec{e}'_i(t) + \sum_i x'_i(t) \underbrace{\dot{\vec{e}}'_i(t)}_{\vec{\omega} \times \vec{e}'_i} = \sum_i \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t) + \vec{\omega} \times \vec{x} \end{aligned}$$

<u>Def.:</u>

$$\frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \dot{x}'_i(t) \vec{e}'_i(t)$$

ist die im rotierenden Bezugssystem <u>beobachtete</u> Geschwindigkeit.

Bewegungsgleichungen im rotierenden Bezugssystem

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega}\times\vec{x}\right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}^{2\prime}\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} + \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{x} + \vec{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega}\times\vec{x}\right)\end{aligned}$$

Falls keine äußeren Kräfte wirken:

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^{2\prime}\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = -2m\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x}) - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{x}} \tag{I.35}$$

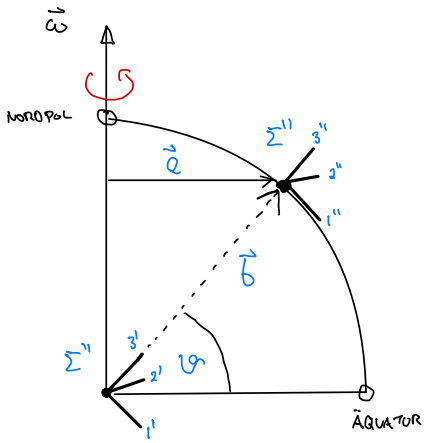
Es treten die Scheinkräfte auf:

$-2m\,\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t}$	Corioliskraft
$-m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x})$	Zentrifugalkraft

Typisch für Scheinkräfte ist, dass sie im Unendlichen nicht verschwinden. Kräfte, die tatsächlich zwischen Körpern wirken, nehmen mit dem Abstand ab. Die Corioliskraft[6] tritt nur bei Bewegung im Σ'-System auf.

Beispiel: Bewegungen auf der Erdoberfläche

Wir orientieren das rotierende System Σ' im Erdmittelpunkt so, dass die $\vec{e}_3'$ Achse in Richtung eines gegebenen Punktes auf der Erdoberfläche (etwa unser aktueller Standort) zeigt. Weiterhin wird $\vec{e}_1'$ in Richtung Süden und $\vec{e}_2'$ in Richtung Osten gelegt, ϑ ist die geographische Breite (gemessen als Winkel vom Äquator zum Ursprung des Systems Σ'' auf der Erdoberfläche). Die Achsen des dritten auf der Erdoberfläche liegenden Systems Σ'' sind gegenüber Σ' um den Vektor $\vec{b} = b\,\vec{e}_3'$ verschoben.



Angeschrieben im System Σ' haben wir deshalb

$$\vec{b} = b\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{\omega} = \omega\begin{bmatrix}-\cos\vartheta\\0\\\sin\vartheta\end{bmatrix}$$

Weiterhin gilt für einen beliebigen Punkt $\vec{x}$, der ortsfest im System Σ'' auf der Erdoberfläche sein soll

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{x}''\,, \qquad \frac{d'\vec{x}}{dt} = \frac{d''\vec{x}}{dt}$$

mit $\vec{x}''$ beobachtet auf der Erdoberfläche in (unserem) System Σ''.

Daraus folgt im kräftfreien Fall die Bewegungsgleichung für $\vec{x}''$ in unserem erdfesten rotierenden System

$$m\ddot{\vec{x}}'' = -2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{x}}'' - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{b}) - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x}'')$$

Der konstante Zentrifugalterm $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{b})$ nimmt dabei die Form an (mit $\vec{l}$ siehe Skizze)

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{b}) = b\omega^2\begin{bmatrix}\cos\vartheta\sin\vartheta\\0\\\cos^2\vartheta\end{bmatrix} = \omega^2\,\vec{l}$$

[6] (Gustave Gaspard de Coriolis, Frankreich, 1792 - 1843)

I.4 Das Newton'sche Grundgesetz

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = \vec{K}} \qquad \text{'2. Newton'sches Gesetz'} \tag{I.36}$$

Dieses gilt in INERTIALSYSTEMEN. $\vec{K} = \sum_i K_i \vec{e}_i$ bezeichnet man als Kraftvektor.

Bei Basistransformationen $\vec{e}_i \to \vec{e'}_i$ transformiert sich K_i zu K'_i wie x_i zu x'_i. Andere Körper und Ladungen bestimmen $\vec{K}$. $\vec{K}$ kann Funktion von $\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}$, t und durch das jeweilige physikalische System bestimmten Parametern $\{\alpha_i\}$ sein:

$$\vec{K} = \vec{K}\big(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{explizit}}}{t}; \{\alpha_i\}\big),$$

nicht jedoch von $\dddot{\vec{x}}$ und höheren Ableitungen! Beispiele für Paramter $\{\alpha_i\}$: Ladungen, Federkonstanten, Gravitationskonstante, ...

Die Newton'sche Grundgleichung (I.36) ist demnach ein System von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit. Integration dieser 3 DGLs liefert 6 Integrationskonstanten, $\vec{x}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0) = \dot{\vec{x}}(t_0)$, d.h. zu vorgegebenem Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 folgt die Bahn für alle früheren oder späteren Zeiten.

Das ergibt sich bereits aus der Taylorentwicklung der Koordinatenfunktionen $x_i(t)$ um t_0:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t_0) + \dot{x}_i(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{x}_i(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3 x_i}{\mathrm{d}t^3}(t_0)(t-t_0)^3 + ... \\ &= \sum_n^\infty x^{[n]} \frac{(t-t_0)^n}{n!}, \end{aligned}$$

wobei

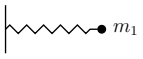
$$\begin{aligned} \ddot{x}_i(t_0) &= \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}(t_0) = \frac{1}{m} K_i\big(\vec{x}(t_0), \dot{\vec{x}}(t_0), t_0; \{\alpha_i\}\big) \\ \frac{\mathrm{d}^3 x_i}{\mathrm{d}t^3}(t_0) &= \frac{1}{m}\sum_j^3 \left\{ \frac{\partial K_i}{\partial x_j}\dot{x}_j(t_0) + \frac{\partial K_i}{\partial \dot{x}_j}\ddot{x}_j(t_0) + \frac{\partial K_i}{\partial t}(t_0) \right\} \\ &= \frac{1}{m}\sum_j^3 \left\{ \frac{\partial K_i}{\partial x_j}\dot{x}_j(t_0) + \frac{\partial K_i}{\partial \dot{x}_j}\frac{K_j}{m}(t_0) + \frac{\partial K_i}{\partial t}(t_0) \right\} \end{aligned}$$

und so weiter.

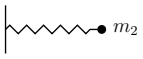
Träge Masse

Der Proportionalitätsfaktor m zwischen $\ddot{\vec{x}}$ und $\vec{K}$ ist die träge Masse. Eigenschaft des Massenpunktes: Trägheit gegenüber Bewegungsänderungen. Masse kann nicht in die Defintion der Kraft $\vec{K}$ aufgenommen werden.

Bsp.: Gleiche Feder, zwei verschiedene Körper



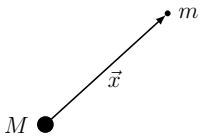
$$m_1\ddot{\vec{x}} = -c\vec{x} \quad \text{Federgleichung}$$



$$m_2\ddot{\vec{x}} = -c\vec{x}$$

Schwere Masse m_S

Aus Newtons Gravitationsgesetz:



$$\boxed{\vec{K} = -G\, m_S \cdot M \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$$

G : Gravitationskonstante M: Masse der Erde

Newton'sche Grundgleichung:

$$m\ddot{\vec{x}} = -Gm_S M \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \underset{\text{(in Erdnähe)}}{=} -m_S \vec{g}$$

Schwaches Äquivalenzprinzip

Experiment: Alle Körper fallen gleich schnell, d.h.

$$\boxed{m = m_S} \qquad \text{und} \qquad \ddot{\vec{x}} = -\vec{g}.$$

Gegenwärtige experimentelle Schranken:

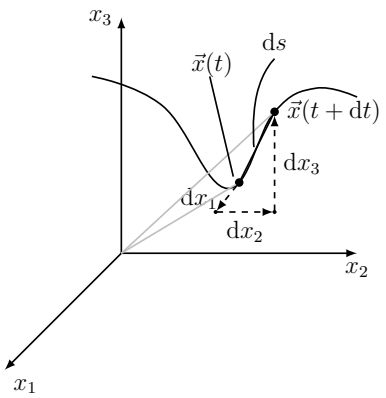
Labor: $\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{Be-Ti}} = (0.3 \pm 1.8) \cdot 10^{-13}$ (Beryllium-versus Titantestkörper im freien Fall)

Weltraum: $\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{Erde-Mond}} = (-0.8 \pm 1.3) \cdot 10^{-13}$ (Erde und Mond im freien Fall Richtung Sonne)

I.5 Das begleitende Dreibein, Zerlegung der Beschleunigung

I.5.1 Bogenelement der Raumkurve

Es sei $\vec{x}(t)$ gegeben.



$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2$$

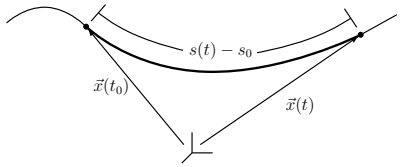
$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}s = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = |\vec{v}|\mathrm{d}t}$$

Integration liefert die Bogenlänge:

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{I.37}$$

D.h. $$\boxed{s(t) - s_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t |\vec{v}|} \qquad \underline{\text{Bogenlänge.}} \tag{I.38}$$



Somit gilt $s = s(t)$. Diese Relation lässt sich (zumindest lokal) invertieren, d.h.

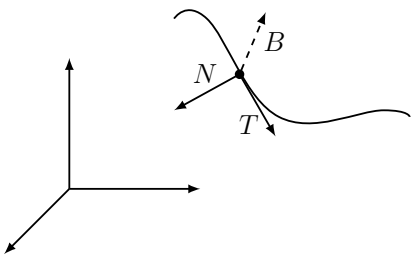
$$s = s(t) \Rightarrow t = t(s)$$

D.h. die Raumkurve $\vec{x}(t)$ lässt sich auch durch die Bogenlänge parametrisieren:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}[t(s)] = \vec{x}(s),$$

(wobei die Funktionen $x_i(t)$ und $x_i(s)$ natürlich unterschiedlich sind).

i) Tangentenvektor



T: Tangentenvektor $\vec{e}_T$
N: Normale $\vec{e}_N$
B: Binormale $\vec{e}_B$

Das begleitende Dreibein ändert seine Orientierung in jedem Punkt der Kurve. Der Tangentenvektor ist Einheitsvektor in Richung $\mathrm{d}\vec{x}$.

$$\vec{e}_T \parallel \mathrm{d}\vec{x}$$

$$\underline{\text{Def.:}} \qquad \boxed{\vec{e}_T = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}} \tag{I.39}$$

$$\vec{e}_T \cdot \vec{e}_T = \frac{\mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}}{(\mathrm{d}s)^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}} = 1$$

Alternativ: $\vec{e}_T = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

ii) Normale

$$\vec{e}_T(t) \cdot \vec{e}_T(t) = \vec{e}_T(s) \cdot \vec{e}_T(s) = 1$$

$$\text{Differentation nach } s \;\Rightarrow 2\,\vec{e}_T(s) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{e}_T(s) = 0$$

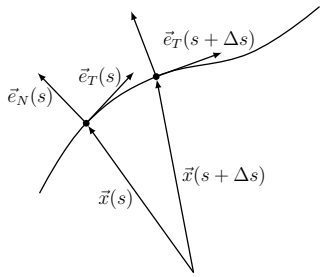
$$\Rightarrow \vec{e}_T \perp \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{e}_T$$

$$\underline{\text{Def.:}} \qquad \boxed{\vec{e}_N = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{e}_T \cdot \frac{1}{|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{e}_T|} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\vec{x}(s)}{|\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s^2}|}}$$

Der Normalenvektor. Offensichtlich ist $\vec{e}_N \cdot \vec{e}_N = 1$

Betrachtet man konsekutive Tangenten an die Kurve, so bilden $\vec{e}_T$ und $\vec{e}_N$ eine Schmiegeebene:

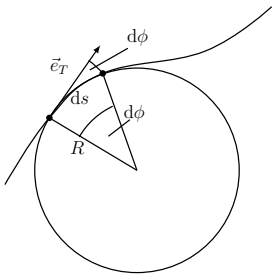
$$\begin{aligned}\vec{x}(s+\Delta s) &= \vec{x}(s) + \frac{\mathrm{d}\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s^2}(\Delta s)^2 + \mathcal{O}(\Delta s^3) \\ &= \vec{x}(s) + \Delta s\,\vec{e}_T + \frac{(\Delta s)^2}{2}\left|\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|\vec{e}_N + \mathcal{O}(\Delta s^3)\end{aligned}$$



Die Näherungskurve zweiter Ordnung an $\vec{x}(s)$ liegt in der von $\vec{e}_T$ und $\vec{e}_N$ aufgespannten Schmiegeebene.

Der Betrag von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{e}_T(s)$ bzw. $\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}s^2}$ steht mit dem <u>Schmiegekreis</u> in Zusammenhang.

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{e}_T\right| = \frac{1}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\vec{e}_N$$

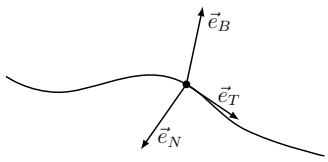


$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= R\mathrm{d}\phi \\ |\mathrm{d}\vec{e}_T| &= 1 \cdot \mathrm{d}\phi \\ \Rightarrow \left|\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}s}\right| &= \left|\frac{\mathrm{d}\phi}{R\,\mathrm{d}\phi}\right| = \frac{1}{R}\end{aligned}$$

und mit $\vec{e}_T = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}$ gilt $\boxed{\left|\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}s^2}\right| = \frac{1}{R}}$

iii) Binormale

$$\underline{\text{Def.:}} \qquad \boxed{\vec{e}_B = \vec{e}_T \times \vec{e}_N}$$



I.5.2 Zerlegung der Beschleunigung

Wir hatten die Relationen

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s} = \vec{e}_T \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\vec{e}_N$$

i) Geschindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\,\vec{e}_T$$

ii) Beschleunigung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v\,\vec{e}_T\right) = \dot{v}\vec{e}_T + v\dot{\vec{e}}_T \\ \dot{\vec{e}}_T &= \frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\vec{e}_N\end{aligned}$$

Somit: $$\boxed{\ddot{\vec{x}} = \dot{v}\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\vec{e}_N}$$

D.h., der Beschleunigungsvektor lässt sich in eine Tangential- und eine Normalkomponente zerlegen.

Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\boxed{m\dot{v}\vec{e}_T + m\frac{v^2}{R}\vec{e}_N = \vec{K}} \tag{I.40}$$

In Komponenten angeschrieben:

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{e}_T \cdot \vec{K} = K_T = m\dot{v} \\ &\vec{e}_N \cdot \vec{K} = K_N = m\frac{v^2}{R} \\ &\vec{e}_B \cdot \vec{K} = K_B = 0\end{aligned}}$$

<u>Beispiel:</u> Kreisbewegung mit $v = const.$:

$$\begin{aligned}&\Rightarrow K_T = 0 \quad \text{da } \dot{v} = 0, \quad K_B = 0 \quad \text{sowieso} \\ &\Rightarrow K_N = m\frac{v^2}{R}\end{aligned}$$

Bereits hier sehen wir, dass die Newton'sche Grundgleichung in einem gegebenen Koordinatensystem angeschrieben gegenüber Koordinatentransformationen nicht forminvariant ist. Ziel wird sein, eine forminvariante (oder universelle) Formulierung der Bewegungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten zu finden.

I.6 Umrechnung der Newton'schen Grundgleichungen in Allgemeine Koordinaten

Wir haben nun mehrfach gesehen, dass die Newton'schen Gleichungen unter allgemeinen Koordinatentransformationen nicht forminvariant sind.

Beispiel aus den Übungen: Übergang kartesische Koordinaten → Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\phi \\ x_2 &= \rho\sin\phi \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

Transformation der Bewegungsgleichungen:

$\vec{K} = \sum_i K_i\vec{e}_i = K_\rho\vec{e}_\rho + K_\phi\vec{e}_\phi + K_z\vec{e}_z$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= K_1 & & m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = K_\rho \\ m\ddot{x}_2 &= K_2 & \Leftrightarrow\quad & m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = K_\phi \\ m\ddot{x}_3 &= K_3 & & m\ddot{z} = K_z \end{aligned}$$

Frage: Wie findet man für den allgemeinen Fall die Bewegungsgleichungen?
Dies wollen wir nun durch Umrechnung der Newtongleichung herleiten, was uns auf den zentralen Begriff der Lagrange-Funktion führen wird.

Betrachten wir nun allgemeine Transformationsfunktionen f_i Koordinatensystemen $\{x_i\}$ und $\{q_i\}$ (müssen umkehrbar sein):

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, q_2, q_3, t) \\ x_2 &= f_2(q_1, q_2, q_3, t) \qquad \text{Transformation } \{x_i\} \to \{q_i\} \text{ darf explizit zeitabhängig sein} \\ x_3 &= f_3(q_1, q_2, q_3, t). \end{aligned} \tag{I.41}$$

Für die Geschwindigkeit gilt dann nach der Kettenregel

$$\dot{x}_j(t) = \left[\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial q_i}(q_1, q_2, q_3, t)\,\dot{q}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t}(q_1, q_2, q_3, t)\right]_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(t)}.$$

Wir schreiben $q \mathrel{\widehat{=}} \{q_1, q_2, q_3\}$ und $\dot{q} \mathrel{\widehat{=}} \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3\}$.

$$\text{Def.:} \qquad \boxed{\xi_j(q, \dot{q}, t) = \sum_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}(q, t)\,\dot{q}_i\right) + \frac{\partial f_j}{\partial t}(q, t)} \tag{I.42}$$

Hierbei betrachten wir die $\{q, \dot{q}, t\}$ als 7 *unabhängige* Variablen. Die Funktion $\xi_j(q, \dot{q}, t)$ geht im Fall der Einschränkung auf Bahnkurven $\xi_j(q, \dot{q}, t)|_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(t)} = \dot{x}_j(t)$ in die kartesischen komponenten der Geschwindigkeit des Massenpunktes über. Wir erweitern sie jedoch nun *jenseits* dieser Kurve in den 7 dimensionalen Raum $\{q, \dot{q}, t\}$.

Beispiel: Zylinderkoordinaten $q_1 = \rho \quad q_2 = \phi \quad q_3 = z$.
Dann

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1\cos q_2 = f_1(q_1, q_2, \cancel{q_3}, \cancel{t}) \\ \dot{x}_1 &= \Big[\dot{q}_1\cos q_2 - q_1\dot{q}_2\sin q_2\Big]_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(t)}. \end{aligned}$$

Die Funktion $\xi_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \dot{q}_1 \cos q_2 - q_1 \dot{q}_2 \sin q_2$ stellt eine gewöhnliche Funktion der unabhängigen Variablen $\{q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2\}$ dar, man kann beispielsweise ihre partiellen Ableitungen bilden:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{q}_1} = \cos q_2 \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{q}_2} = -q_1 \sin q_2.$$

Aus der Definition (I.42) folgt unmittelbar:

$$\boxed{\frac{\partial \xi_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial f_j}{\partial q_k}(q, t).} \tag{I.43}$$

<u>Nebenbemerkung:</u>
Die kinetische Energie eines Teilchens lautet in kartesischen Koordinaten

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

und somit

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \sum_j \dot{x}_j^2 = \left[\frac{m}{2} \sum_j \xi_j(q, \dot{q}, t)^2 \right]_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(t)}.$$

Wir definieren nun die allgemeine Funktion der Variablen $\{q, \dot{q}, t\}$ (gerade eben nicht eingeschränkt auf die Kurve $q = q(t)$, $\dot{q} = \dot{q}(t)$)

$$\boxed{T(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \sum_j \xi_j(q, \dot{q}, t)^2} \tag{I.44}$$

mit $T(q(t), \dot{q}(t), t) = E_{kin}$. Wir nennen vorerst T die verallgemeinerte kinetische Energie.

Wie lautet $\ddot{x}_j(t)$ in den neuen Variablen?

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_j(t) = \xi_j(q(t), \dot{q}(t), t) \\
&\ddot{x}_j(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \xi_j(q(t), \dot{q}(t), t) \qquad \Big| \cdot m \frac{\partial f_j}{\partial q_k}(q(t), t) \\
&\Rightarrow m\ddot{x}_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_k}(q(t), t) = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\xi_j(q(t), \dot{q}(t), t) \right] \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial \dot{q}_k}(q(t), t)
\end{aligned}$$

Wegen $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a\right) b = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ab) - a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} b$ folgt für die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} &= \left[m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\xi_j \frac{\partial \xi_j}{\partial \dot{q}_k} \right] - m \xi_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \xi_j}{\partial \dot{q}_k} \right]_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(t)} \\
&= m \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\xi_j^2) \right] - m \left[\xi_j \frac{\partial \xi_j}{\partial q_k} \right] \right]_{q=q(t), \dot{q}=\dot{q}(t)}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass mit (I.43) folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_j}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial f_j}{\partial q_k}(q(t),t)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial^2 f_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 f_j}{\partial q_k \partial t}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t}\right] \\ &= \frac{\partial \xi_j}{\partial q_k}.\end{aligned}$$

sowie die Relation $\xi_j \frac{\partial \xi_j}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\xi_j^2\right]$. D.h. wir finden dann

$$m\ddot{x}_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{m}{2}\xi_j^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{m}{2}\xi_j^2\right)\right]_{q=q(t),\dot{q}=\dot{q}(t)}.$$

Summiert man diese Gleichung über j, benutzt die Newton'sche Grundgleichung $m\ddot{x}_j = K_j$ (in den kartesischen Koordinaten $\{x_i\}$, sowie die Definition der verallgemeinerten kinetischen Energie $T(q,\dot{q},t) = \sum_j \frac{m}{2}\xi_j^2$ aus (I.44), so ergibt sich:

$$\boxed{\sum_j K_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}T(q,\dot{q},t) - \frac{\partial}{\partial q_k}T(q,\dot{q},t)\right]_{q=q(t),\dot{q}=\dot{q}(t)}.} \tag{I.45}$$

Die linke Seite definieren wir als <u>generalisierte Kräfte</u>

$$Q_k = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k}K_j = \sum_{j=1}^{3} C_{kj}K_j$$

mit der Matrix $C_{kj} = \frac{\partial f_j}{\partial q_k}$. Die generalisierten Kräfte Q_k sind Linearkombinationen der kartesischen Komponenten K_j der Kraft.

<u>Beispiele:</u>

a) Triviale Transformation:

$$\begin{aligned}x_j &= f_j(q,t) = q_j \quad j = 1,2,3 \\ \xi_j &= \sum_i \Big(\underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial q_i}}_{=\delta_{ij}}\dot{q}_i\Big) + \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial t}}_{=0} = \dot{q}_j\end{aligned}$$

kinetische Energie:

$$\begin{aligned}E_{kin} &= \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 \Rightarrow T = \frac{m}{2}\sum_j \dot{q}_j^2 = T(q) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= m\dot{q}_k \qquad \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0\end{aligned}$$

Diese Transformation liefert mit

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_j}{\partial q_k} = \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{jk} \\
&(I.45) \Rightarrow \sum_j K_j \delta_{jk} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q}_k(t)) - 0 \\
&\Rightarrow K_k = m\ddot{q}_k(t)
\end{aligned}$$

also wieder die alten Bewegungsgleichungen.

b) Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
x &= f_1(q_1, q_2) = \rho\cos\phi & q_1 &= \rho & \dot{q}_1 &= \dot{\rho} \\
y &= f_2(q_1, q_2) = \rho\sin\phi & q_2 &= \phi & \dot{q}_2 &= \dot{\phi} \\
z &= f_3(q_1, q_2) = z & q_3 &= z & \dot{q}_3 &= \dot{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi = \xi_1 & \Rightarrow \qquad \xi_1 &= \dot{q}_1\cos q_2 - q_1\dot{q}_2\sin q_2 \\
\dot{y} &= \dot{\rho}\sin\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi = \xi_2 & \xi_2 &= \dot{q}_1\sin q_2 + q_1\dot{q}_2\cos q_2 \\
\dot{z} &= \dot{z} = \xi_3 & \xi_3 &= \dot{q}_3\,.
\end{aligned}$$

<u>kinetische Energie:</u>

$$E_{kin} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \Rightarrow T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2) = T(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z})$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \rho} &= m\rho\dot{\phi}^2 & \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} &= m\dot{\rho} \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= m\rho^2\dot{\phi} & \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z}
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die drei Bewegungsgleichungen nach (I.45):

i) <u>$Q_1 = Q_\rho$</u>

$$\begin{aligned}
K_x\frac{\partial x}{\partial \rho} + K_y\frac{\partial y}{\partial \rho} + K_z\frac{\partial z}{\partial \rho} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\phi}^2 \\
K_x\cos\phi + K_y\sin\phi + K_z\cdot 0 &= m(\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2) \\
&\Rightarrow \boxed{m\left(\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\phi}(t)^2\right) = \vec{K}\cdot\vec{e}_\rho}
\end{aligned}$$

wobei $\vec{e}_\rho = \cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y$.

ii) <u>$Q_2 = Q_\phi$</u>:

$$\begin{aligned}
K_x\frac{\partial x}{\partial \phi} + K_y\frac{\partial y}{\partial \phi} + K_z\frac{\partial z}{\partial \phi} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\rho^2\dot{\phi}) - 0 \\
\rho\left(-K_x\sin\phi + K_y\cos\phi\right) + K_z\cdot 0 &= m\left(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi}\right) \\
&\Rightarrow \boxed{m\left(\rho\ddot{\phi}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\phi}(t)\right) = \vec{K}\cdot\vec{e}_\phi}
\end{aligned}$$

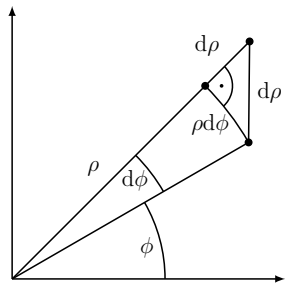
wobei $\vec{e}_\phi = -\sin\phi\vec{e}_x + \cos\phi\vec{e}_y$.

iii) $\underline{Q_3 = Q_z}$:

$$K_x \cdot 0 + K_y \cdot 0 + K_z \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - 0$$
$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{z} = K_z}$$

D.h. wir erhalten ein übereinstimmendes Ergebnis zum vorher hergeleiteten.

Anmerkung:
Einfacherer Weg zur Herleitung von $T(q, \dot{q}, t)$:



$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\rho)^2 + (\rho\mathrm{d}\phi)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\rho\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$$
$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{q}^2 + \dot{z}^2$$
$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad \text{wie zuvor}$$

I.7 Potential

In der folgenden Diskussion wollen wir uns nun auf Kräfte $\vec{K} = \vec{K}(\vec{x}, t; \{\alpha_i\})$ beschränken, die unabhängig von der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ sind und die des weiteren von einem Potential $V(\vec{x}, t; \{\alpha_i\})$ abgeleitet werden können:

$$\boxed{K_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}V(\vec{x}, t) =: -\partial_i V(\vec{x}, t) = -\nabla_i V(\vec{x}, t)}.$$

Im obigen haben wir verschiedene gebräuchliche Bezeichnungen für die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}$ benutzt. Den Differentialoperator $\vec{\nabla}$ bezeichnet man als "Nabla", obige GLeichung lautet dann auch $\vec{K} = -\vec{\nabla}V(\vec{x}, t)$.

Beispiele:

- kräftefreies Teilchen:
  $V = \text{const.},\ K_i = 0$
- konstante Kraft:
  $V = -\sum_{l=1}^{3} x_l b_l,\ K_i = b_i$
- Federgleichung/harmonischer Oszillator in 1D:
  $V = \frac{1}{2}kx^2,\ K = -kx$
- Coulombpotential[7] bzw. Newton'sches Gravitationspotential:
  $V = -\frac{\alpha}{r} = -\alpha\frac{1}{\sqrt{\vec{x}^2}},\ K_i = -\alpha\frac{x_i}{r^3}$
  $\alpha = \begin{cases} Gm_1m_2 & \text{Gravitation} \\ q_1q_2, & \text{Coulomb, Ladungen } q_1 \text{ und } q_2 \end{cases}$

[7] (Charles Augustin de Coulomb, Frankreich, 1736-1806)

Kräfte, die aus einem Potential folgen

$$\boxed{\vec{K} = -\vec{\nabla} V = -\mathrm{grad}\, V} \tag{I.46}$$

bezeichnet man als "konservative Kräfte". Für ein solches konservatives Kraftfeld gilt

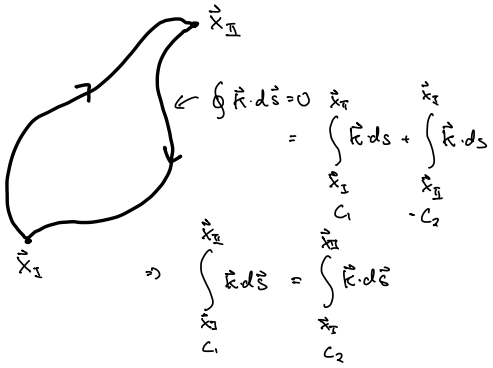
$$\vec{\nabla} \times \vec{K} = \mathrm{rot}\, \vec{K}(x_1, x_2, x_3, t) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \\ \frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \\ \frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \end{array} \right\} = 0,$$

da $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) V = 0$. Oder in den Komponenten sieht man das explizit, etwa der erste Eintrag oben: $-\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 0$.

Aus dem Stokes'schen Integralsatz[8] folgt

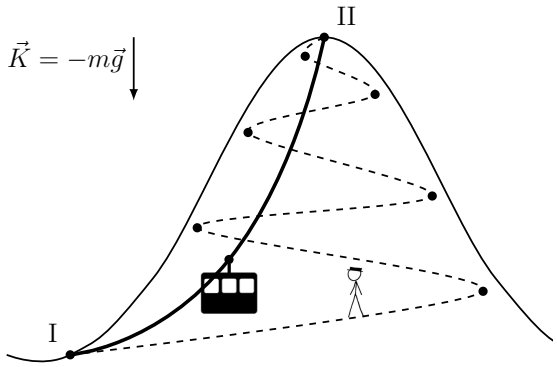
$$\oint \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_F \mathrm{rot} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{F} = 0$$

Das Wegintegral über die Kraft von einem Punkt $\vec{x}^I$ zu einem anderen $\vec{x}^{II}$ ist vom Weg unabhängig



und gleich der Potentialdifferenz:

$$V(\vec{x}^{II}) - V(\vec{x}^I) = -\int_{\vec{x}^I}^{\vec{x}^{II}} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$



Unabhängig vom Weg auf den Gipfel ist die geleistete Arbeit ist dieselbe!

[8] (George Gabriel Stokes, Irland/England, 1819-1903)

I.8 Wegintegrale

Frage: Wie berechnet man nun konkret ein solches Wegintegral entlang eines vorgegebenen Weges durch ein beliebiges Kraftfeld $\vec{K}(\vec{x})$?

$$\boxed{\int_C \vec{K} \cdot d\vec{x} = ? \qquad C\text{: Pfad}} \tag{I.47}$$

Parametrisierung der Raumkurve

Zunächst muss man den Weg durch eine Raumkurve parametrisieren

$$\begin{aligned} \vec{x}(\tau) &= x_1(\tau)\,\vec{e}_1 + x_2(\tau)\,\vec{e}_2 + x_3(\tau)\,\vec{e}_3 \qquad \tau \in [\tau_0, \tau_1] \\ \vec{x}(\tau_0) &= \vec{x}_0 \qquad \vec{x}(\tau_1) = \vec{x}_1\,. \end{aligned} \tag{I.48}$$

Hiebei ist τ ein beliebiger Parameter, er muss insbesondere nicht mit der Zeit identisch sein. Der Wert des Wegintegral ist stets unabhängig von der Parametrisierung des Weges, wie wir gleich sehen werden. Nun zur Berechnung des Wegintegrals: Hierzu führen wir dieses auf eingewöhnliches eindimensionales Integral über den Wegparameter τ zurück:

Differential

$$d\vec{x} = \Big(\frac{dx_1(\tau)}{d\tau}\,\vec{e}_1 + \frac{dx_2(\tau)}{d\tau}\,\vec{e}_2 + \frac{dx_3(\tau)}{d\tau}\,\vec{e}_3\Big)\,d\tau\,.$$

Wegintegral

$$\int_C \vec{K} \cdot d\vec{x} := \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \Big(\frac{dx_1(\tau)}{d\tau}\,K_1(\vec{x}(\tau)) + \frac{dx_2(\tau)}{d\tau}\,K_2(\vec{x}(\tau)) + \frac{dx_3(\tau)}{d\tau}\,K_3(\vec{x}(\tau))\Big) \tag{I.49}$$

Nun liegt ein gewöhnliches eindimensionales Integral über den Wegparameter τ vor, was sich integrieren lässt!

Parametrisierungsunabhängigkeit: Bei einer Umparametrisierung des Weges: $\tau \to \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau)$ ändern sich

$$d\tilde{\tau} = \frac{d\tilde{\tau}(\tau)}{d\tau}\,d\tau \qquad \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_i(\tau)}{d\tilde{\tau}}\,\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}$$

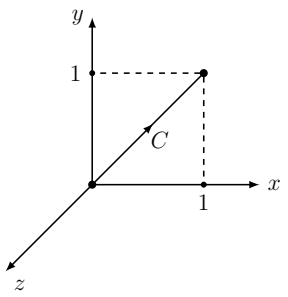
und somit

$$d\tau\,\frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = d\tilde{\tau}\,\frac{dx_i(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}}\,, \tag{I.50}$$

woraus die Unabhägigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung des Weges folgt. Dies ist eine zwingende Voraussetzung für eine sinnvolle Definition desselben. DEr Wert des Wegintegrals sollte unabhängig von der Parametrisierung des Weges sein.

Beispiel:

Kraftfeld: $\vec{K}(\vec{x}) = a\,y\,\vec{e}_y$



Weg: Gerade durch $P_0(0,0,0)$ und $P_1(1,1,0)$

$$x(\tau) = \tau \qquad y(\tau) = \tau \qquad z(\tau) = 0 \qquad \tau \in [0,1]$$
$$\Rightarrow d\vec{x}(\tau) = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)\, d\tau$$

Dann folgt

$$\vec{K} \cdot d\vec{x} = a\tau\, \vec{e}_x \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y)\, d\tau = a\tau\, d\tau$$
$$\int_C \vec{K} \cdot \vec{x} = \int_0^1 d\tau\, a\tau = \frac{a}{2}\,.$$

Wegunabhängigkeit

Falls gilt rot $\vec{K}(\vec{x}) = 0$, bzw. in Komponenten:

$$\frac{\partial K_x}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial K_y}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial K_z}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial z} = 0\,, \tag{I.51}$$

dann existiert ein Potential (zumindest lokal, genauer in einem sternförmigen Gebiet) mit

$$K_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Wir betrachten nun das Wegintegral entlang C entlang einer beliebigen Raumkurve $\vec{x}(\tau)$, die vom Startpunkt $\vec{x}(\tau_0) = \vec{x}_0$ zum Endpunkt $\vec{x}(\tau_1) = \vec{x}_1$ verläuft.

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{K} \cdot \vec{x} &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[K_x(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{dx(\tau)}{d\tau} + K_y(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{dy(\tau)}{d\tau} + K_z(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right] \\
&= -\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} \frac{dx(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \frac{dy(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \frac{dz(\tau)}{d\tau} + \right] \\
&= -\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \frac{dV(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{d\tau} \\
&= -V(\vec{x}(\tau))\Big|_{\tau=\tau_0}^{\tau=\tau_1} = -V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_0)
\end{aligned} \tag{I.52}$$

Das Resultat ist in der Tat wegunabhängig!

I.9 Lagrange Funktion

Für konservative Kräfte lassen sich die allgemeinen Bewegungsgleichungen (I.45)

$$Q_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T\right) - \frac{\partial}{\partial q_k} T \tag{I.53}$$

nun umschreiben. Wir hatten die verallgemeinerte Kraft definiert als

$$Q_k = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} K_j\,,$$

wobei die $f_j(q,t)$ die Koordinatentransformationen aus (I.41) waren. Da nun $K_j(x) = -\frac{\partial V}{\partial x_j}(x)$ und $x_j = f_j(q,t)$ folgt für die generalisierte Kraft

$$Q_k = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \overset{\text{Kettenregel}}{=} -\frac{\partial V}{\partial q_k}\Big((q,t)\Big) \tag{I.54}$$

Hier wird das Potential V als Funktion der allgemeinen Koordinaten q_i betrachtet. Daraus ergibt sich nun

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T\right) - \frac{\partial}{\partial q_k} T = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{I.55}$$

bzw. mit $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ folgt die zentrale Relation

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T-V)\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}(T-V) = 0}$$

Def: Lagrange Funktion [9]

$$\boxed{L(q,\dot{q},t) := T(q,\dot{q},t) - V(q,t)}$$

Die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt in einem beliebigen Koordinatensystem $\{q\}$, der einem Potential $V(q;t)$ ausgesetzt ist, lauten

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \tag{I.56}$$

Dies sind die "Lagrange'schen Bewegungsgleichungen"

I.10 Geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (I.56) können auch aufgestellt werden, wenn V nicht konservativ ist und von den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ abhängt.

Voraussetzung:

Die generalisierte Kraft folgt aus einem generalisierten Potential $V(q,\dot{q},t)$ für das gerade gilt

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right), \tag{I.57}$$

so dass die "Lagrange'schen Bewegungsgleichungen" (I.56) weiterhin gelten mit $L = T(q,\dot{q},t) - V(q,\dot{q},t)$. Nun sieht diese Bedingung an Q_j recht speziell aus, solch ein geschwindigkeitsabhängiges Potential tritt insbesondere für geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld auf:

$$V(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = -q\,\phi(\vec{x},t) + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\dot{\vec{x}} \tag{I.58}$$

ϕ: Skalares Potential, $\vec{A}$: Vektorpotential, q: Ladung (im CGS-System) Die resultierende Krat ist gerade die Lorentz-Kraft auf ein geladenes, bewegtes Teilchen im elektromagnetischen Feld: $\vec{Q} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$.

Die Herleitung ist etwas involviert, so dass wir sie hier nicht geben wollen. Sie greift auch etwas im Stoff voraus (Elektrodynamik im kommenden Semester). Im Nolting Band 2 findet man eine entsprechende Diskussion.

[9] (Joseph Louis Lagrange, Italien/Frankreich, 1736-1813)

Bemerkung

Sind nur einige der auf das Teilchen wirkende Kräfte von einem Potential herleitbar, so gelten die Lagrange'schen Gleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_j \,, \tag{I.59}$$

wobei hier die Q_j die verallgemeinerten Kräfte darstellen, die nicht von einem Potential herrühren.

I.11 Massenpunkt unter Zwangsbedingungen

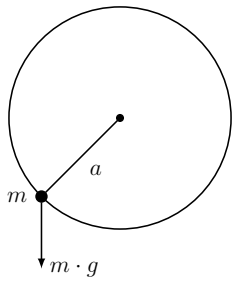
Häufige Situation: Die Bewegung unseres Massenpunktes ist durch äußere Bedingungen eingeschränkt, man spricht von Zwangsbedingungen.

Beispiele:

i) Teilchen auf Kugelschale
Masse m ist durch die Zwangsbedingung

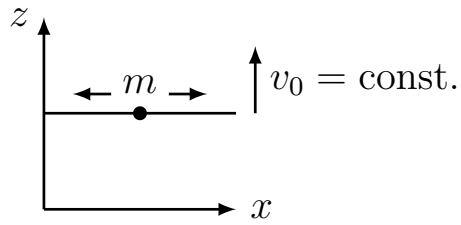
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{I.60}$$

gebunden. $\rightarrow$ Es wirkt eine Zwangskraft, die den Massenpunkt auf der Oberfläche hält.

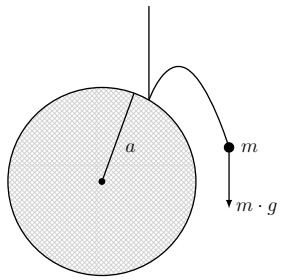


ii) Teilchen im Aufzug
Masse m kann sich in xy-Ebene frei bewegen, für z Koordinate gilt:

$$z(t) = v_0(t - t_0) + z_0 \rightarrow \dot{z} = v_0 \tag{I.61}$$

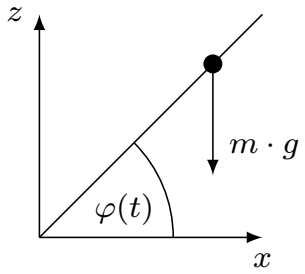


iii) Teilchen in der Umgebung einer harter Kugel im Erdschwerefeld



Verbotenes Gebiet:
$(x^2 + y^2 + z^2) - a^2 \geq 0$

iv) Masse auf schiefer Ebene mit veränderlicher Neigung



$$\frac{z}{x} - \tan\varphi(t) = 0$$

$\varphi(t)$: vorgegebene Funktion

Fazit:

Zwangsbedingungen sind geometrische Bindungen, die die freie Bewegung des Massenpunktes einschränken. Sie führen zu Zwangskräften, die in der Bewegungsgleichung zu berücksichtigen sind. Die Zwangsbedingungen und -kräfte können im Allgemeinen zeitabhängig sein.

Klassifizierung der Zwangsbedingungen:

a) Holonome Zwangsbedingungen:

$$\varphi_\nu(x, y, z, t) = c_\nu \qquad \nu = 1, \ldots, p \tag{I.62}$$

$$(p = 1 \text{ oder } 2 \text{ zunächst}) \tag{I.63}$$

- Holonom-Skleronom: Holonome Zwangsbedingung ist nicht explizit zeitabhängig, d.h.

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, p \tag{I.64}$$

- Holonom-Rheonom: Holonome Zwangsbedingung mit expliziter Zeitabhängigkeit

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} \neq 0 \tag{I.65}$$

b) Nicht-holonome Zwangsbedingungen

- Zwangsbedingung als Ungleichung

$$F(x, y, z, t) \geq 0 \tag{I.66}$$

- Zwangsbedingung in differentieller, nicht integrierbarer Form. Solche Bedingungen lassen sich schreiben als:

$$\sum_j f_{\nu j} \mathrm{d}x_j + f_{\nu t} \mathrm{d}t = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, p \tag{I.67}$$

  wobei sich die linke Seite nicht integrieren lässt. D.h sie stellt kein totales Differential dar und es gibt keine Funktion $F_\nu(\vec{x}, t)$ für die

$$f_{\nu j} = \frac{\partial F_\nu}{\partial x_j} \text{ für alle } j, \qquad f_{\nu t} = \frac{\partial F_\nu}{\partial t} \tag{I.68}$$

  gilt, sonst wäre (I.67) äquivalent zur holonomen Zwangsbedingung

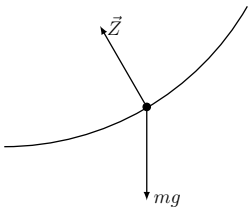
$$F_\nu(\vec{x}, t) = \text{const.} \tag{I.69}$$

Beispiel: Rollen in der Ebene

I.11.1 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Eine holonome Zwangsbedingung (Fläche)

Wir wollen uns zunächst auf eine holonome Zwangsbedingung beschränken. Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet in diesem Fall



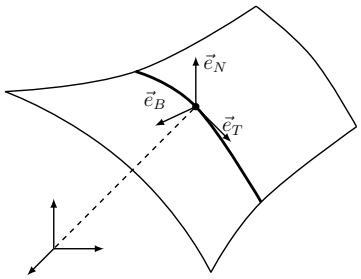
$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{K} + \vec{Z}$$

$\vec{K}$: Eingeprägte Kräfte (z.B. Schwerkraft)
$\vec{Z}$: Zwangskraft (unbekannt)

Zwangsbedingung: (p=1)

$$\boxed{\varphi(x, y, z, t) = \text{const.}} \tag{I.70}$$

Für feste Zeit t beschreibt diese Zwangsbedingung eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.



Flächennormale $\vec{e}_N$
Bewegung hat 2 Freiheitsgrade

Physikalische Aussage: Die Zwangskraft $\vec{Z}$ darf keinen Beitrag zur Beschleunigung des Massenpunktes in der Fläche haben.

$$\Rightarrow \vec{Z} \parallel \vec{e}_N \tag{I.71}$$

Die Normale einer Fläche ist der Gradient

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z \tag{I.72}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{Z} = \lambda \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi} \tag{I.73}$$

λ: Unbekannte, bezeichnet als Lagrange Multiplikator

Beweis: Richtig, da totales Differential von φ:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{I.74}$$

Bei Änderungen innerhalb der Fläche gilt

$$\mathrm{d}\varphi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{x} = 0 \tag{I.75}$$

und da $\mathrm{d}\vec{x}$ beliebig aber innerhalb der Fläche ist, folgt

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi \parallel \text{ Normale}$$

Lagrange-Gleichungen erster Art

D.h. wir haben die 4 Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= \vec{K} + \lambda\vec{\nabla}\varphi(\vec{x},t) \\ \varphi(\vec{x},t) &= c \end{aligned}}$$

für die 4 Unbekannten (x, y, z, λ). Dieses Gleichungssystem nennt man die Lagrange-Gleichungen 1. Art.

Lösungsstrategie:

1) Elimination einer Koordinate

$$\varphi(x,y,z,t) = c \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z &= f(x,y,t) \\ \dot{z} &= g(\dot{x},\dot{y},x,y,t) \\ \ddot{z} &= h(\ddot{x},\ddot{y},\dot{x},\dot{y},x,y,t) \end{aligned}$$

2) Aus

$$\underline{\ddot{z}} = K_z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,\underline{z},t) \tag{I.76}$$

gewinnt man durch einsetzen von $\ddot{z} = h(\ddot{x},\ddot{y},\dot{x},\dot{y},x,y,t)$ und $z = f(x,y,t)$

$$\lambda = \lambda(\ddot{x},\ddot{y},\dot{x},\dot{y},x,y,t) \tag{I.77}$$

3) Es verbleiben

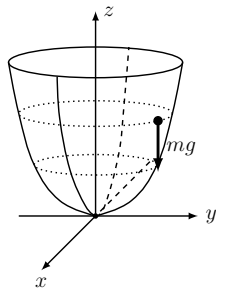
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= K_x(x,y,\underline{z},\dot{x},\dot{y},\underline{\dot{z}},t) + \lambda(\ddot{x},\ddot{y},\dot{x},\dot{y},x,y,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,\underline{z},\dot{x},\dot{y},\underline{\dot{z}},t) \\ m\ddot{y} &= K_y(x,y,\underline{z},\dot{x},\dot{y},\underline{\dot{z}},t) + \lambda(\ddot{x},\ddot{y},\dot{x},\dot{y},x,y,t)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,\underline{z},\dot{x},\dot{y},\underline{\dot{z}},t) \end{aligned}$$

Ersetzt man nun hier wiederum $z = f(x,y,t)$ und $\dot{z} = g(\dot{x},\dot{y},x,y,t)$, so erhält man zwei Differentialgleichungen für die zwei Freiheitsgrade $x(t)$ und $y(t)$.

4) Integration derselben liefert $x(t)$ und $y(t)$, daraus erhält man $z(t)$ und $\lambda(t)$ durch Einsetzen.

Beispiel:

Kugel auf Paraboloid



$$\begin{aligned} &z = a(x^2+y^2) \\ &\Rightarrow \varphi = z - a(x^2+y^2) = 0 = \text{const.} \qquad \text{(Zwangsbedingung)} \\ &\vec{\nabla}\varphi = (-2ax, -2ay, 1) \end{aligned}$$

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{K} + \lambda\vec{\nabla}\varphi \qquad \vec{K} = -mg\vec{e}_Z \tag{I.78}$$

Ausgeschrieben in den einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda 2ax & \dot{z} &= 2a(\dot{x}x + \dot{y}y) \\ m\ddot{y} &= -\lambda 2ay & \ddot{z} &= 2a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ddot{x}x + \ddot{y}y) \\ m\ddot{z} &= \lambda - mg \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = m\ddot{z} + mg = m[2a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ddot{x}x + \ddot{y}y) + g] \tag{I.79}$$

Daraus erhält man 2 gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\ddot{x} = -2a[2a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ddot{x}x + \ddot{y}y) + g]x$$
$$\ddot{y} = -2a[2a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ddot{x}x + \ddot{y}y) + g]y$$

Durch Lösen der DGLs findet man $x(t)$ und $y(t)$.

Zwei holonome Zwangsbedingungen (Kurve)

Nun betrachten wir den Fall zweier holonomer Zwangsbedingungen

$$\varphi_1(x, y, z, t) = c_1 \qquad \varphi_2(x, y, z, t) = c_2 \tag{I.80}$$

Diese beschreiben eine Kurve im $\mathbb{R}^3$ auf der sich unser Massenpunkt bewegen kann, da die beiden Bediungungen (I.80) den Schnitt zweiter Flächen beschreiben. [10] Daraus ergibt sich die Überlagerung der Zwangskräfte jeder einzelnen Ebene:

$$\vec{Z} = \lambda_1 \vec{\nabla}\varphi_1 + \lambda_2 \vec{\nabla}\varphi_2 \tag{I.81}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= \vec{K} + \lambda_1 \vec{\nabla}\varphi_1 + \lambda_2 \vec{\nabla}\varphi_2 \\ c_1 &= \varphi_1(x, y, z, t) \\ c_2 &= \varphi_2(x, y, z, t) \end{aligned}}$$

1 Freiheitsgrad, Lagrange Gleichungen 1. Art. Die Lösungsstrategie ist parallel zu der für eine holonome Zwangsbedingung: Durch Auflösen von (I.80) nach z.B. x und y reduziert sich das System auf eine DGL für $z(t)$.

I.11.2 Lagrange Gleichungen 2. Art

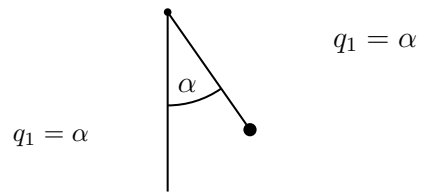
Zunächst Vorwegnahme des Ergebnisses: Bei r holonomen Zwangsbedingungen besitzt unser Massenpunkt $f = 3 - r$ Freiheitsgrade. Dann brauchen nur die Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ betrachtet werden, die diese Freiheitsgrade parametrisieren. Hierbei ist es zentral diese zwangsfreien Koordinaten zu finden!

Dann ist $T = T(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)$ bzw. $L = L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)$ und es gilt einfach

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, f$$

Beispiele für geeignete Koordinaten:

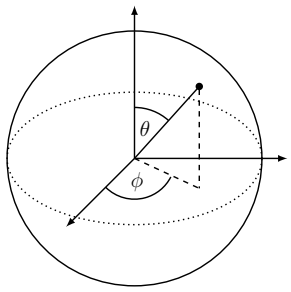
- Ebenes Pendel:



[10] Selbstverständlich ist der degenerierte Fall denkbar, dass es keinen Schnitt der Ebenen gibt, dann exisitiert aber schlichtweg keine Lösung des Systems, es ist dann nicht wohl gestellt.

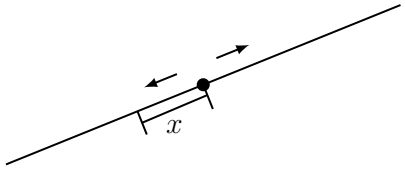
- Masse auf Kugelschale:

$q_1 = \phi \qquad q_2 = \theta$



- Masse auf Schiene:

$q_1 = x$



Die Wahl der Koordinaten ist beliebig!

Herleitung:

Ausgehend von beliebigen Koordinaten q_1, q_2, q_3 haben wir die Lagrange-Glg. für Kraft $\vec{K}$ und Zwangskraft $\vec{Z}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{j=1}^{3}(K_j + Z_j)\frac{\partial x_j}{\partial q_k}$$

Nun lautet für r holonome Zwangsbedingungen φ_ν =const., $\nu = 1, \ldots, r$ die Zwangskraft gerade

$$Z_j = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_j}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3} Z_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_k} \\
&= \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\right)}_{=\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_k}} \\
&= \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_k}
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{3} K_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial q_k} + \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_k}$$

Nun wählt man seine Koordinaten q_k speziell so:

$$\underbrace{q_1, \ldots, q_f}_{\text{beliebig}}, \underbrace{q_{f+1}, \ldots, q_3}_{\text{speziell mit}}$$

$$\begin{aligned} q_{f+1} &= \varphi_1 \\ &\vdots \\ q_3 &= \varphi_r \end{aligned}$$

D.h. die <u>holonomen Zwangsbedingungen</u> werden als <u>Koordinaten</u> gewählt:

$$q_{f+\nu} = \varphi_\nu = \text{const.} \qquad \nu = 1, \ldots, r$$

Dann gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_k} = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial q_{f+\nu}}{\partial q_k} = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \, \delta_{k,f+\nu}$$

Ist nun $k = 1, \ldots, f$, verschwindet dieser Ausdruck, da dann $\delta_{k,f+\nu}$ stets Null ist, und die verallgemeinerten Kräfte sind unabhängig von λ_ν:

$$\Rightarrow Q_k = \sum_{j=1}^{3} K_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + 0$$

Wir erhalten dann für $k = 1, \ldots, f$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}(q_1, \ldots, q_f, q_{f+1}, \ldots, q_3, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, \dot{q}_{f+1}, \ldots, \dot{q}_3) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{3} K_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \tag{I.82}$$

Nun ist die zeitliche Entwicklung der r-Koordinaten $q_{f+1}, \ldots, q_3$ bekannt

$$\begin{aligned} q_{f+1} &= \varphi_1 = c_1 \\ &\vdots \\ q_{f+r} &= \varphi_r = c_r \end{aligned} \qquad \Rightarrow \dot{q}_{f+j} = 0 \qquad j = 1, \ldots, r$$

So dass die Gleichung I.82 nun von den Koordinaten q_{f+j} entkoppelt:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f) - \frac{\partial T}{\partial q_k}(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f) = \sum_{j=1}^{3} K_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k}(q_1, ..., q_f, t)} \tag{I.83}$$

mit $k = 1, ..., f$. Dieses Gleichungssystem nennt man die <u>Lagrange Gleichungen 2. Art</u>.

<u>Spezialfall:</u> Die eingeprägten Kräfte sind konservativ:

$$K_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$$

Dann ist

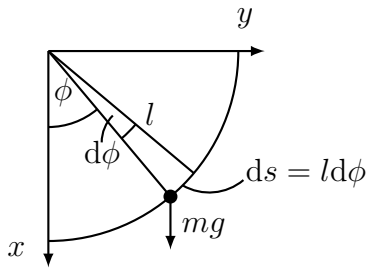
$$Q_k = \sum_{j=1}^{3} K_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}} \qquad k = 1, \ldots, f$$

mit der Lagrange-Funktion $L(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f) = T - V$.

Beispiel:

Ebenes Pendel: 2 holonome Zwangsbedingungen



$$z = 0, \quad l^2 = x^2 + y^2$$
$$\varphi_1(x, y, z, t) = z = 0 = c_1$$
$$\varphi_2(x, y, z, t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \ell = c_2$$

D.h. $r = 2$. Freiheitsgrade $f = 3 - 2 = 1$ Wahl der Koordinate $q = \varphi$.

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

<u>Kinetische Energie</u>

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \ell^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2$$
$$\Rightarrow T(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2$$

<u>Potentielle Energie</u>

$$K_x = mg, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -mg$$
$$\Rightarrow V = -mgx$$
$$\Rightarrow V(\varphi) = -mg\ell\cos\varphi$$

<u>Lagrange-Funktion</u>

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell^2\ddot{\varphi} - g\ell\sin\varphi = 0} \tag{I.84}$$

Um zu zeigen, dass die Wahl der freien Variable willkürlich sein kann, wiederholen wir die Analyse und wählen jetzt (eher ungeschickt)

$$q = x \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Zwangsbedingung: $z = 0$, sowie

$$y = \pm\sqrt{\ell^2 - x^2}$$
$$\dot{y} = \mp\frac{x\dot{x}}{\sqrt{\ell^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{\ell^2 - x^2}\right) = \frac{m}{2}\dot{x}^2\frac{\ell^2}{\ell^2 - x^2} \qquad \text{und} \quad V = -mgx$$

$$\Rightarrow L(x, \dot{x}) = \frac{m}{x}\dot{x}^2\frac{\ell^2}{\ell^2 - x^2} + mgx$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{x}\frac{\ell^2}{\ell^2 - x^2}\right) - \frac{m}{2}\dot{x}^2\frac{\ell^2 2x}{(\ell^2 - x^2)^2} + mg = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{x}(\ell^2 - x^2) + \dot{x}^2 x + (\ell^2 - x^2)^2\frac{g}{\ell^2} = 0$$

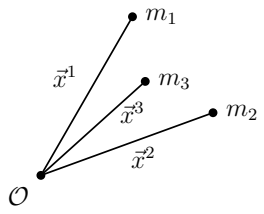
Substitution von $x = \ell\cos\varphi$ liefert vorheriges Ergebnis I.84.

II Mehrteilchensysteme und Erhaltungssätze

Für eine große Klasse von Kräften ist es möglich Aussagen über den Verlauf der Bewegung zu machen, ohne die explixite Lösung der Bewegungsgleichungen zu kennen. Dies wird durch das Auffinden von Gößen möglich, die während der Bewegung der Teilchen erhalten bleiben und durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Diese Erhaltungsgrößen sind deshalb von zentraler Bedeutung. Zuvor wollen wir uns aber der Beschreibung von Mehrteilchensystemen widmen.

II.1 Bewegungsgleichungen

Wir wollen nun unsere Betrachtungen auf N-Teilchensysteme ausdehnen:



Lage der N Teilchen:

$$\vec{x}^I, \quad I = 1, ..., N$$

Geschwindigkeiten der Teilchen:

$$\dot{\vec{x}}^I, \quad I = 1, ..., N.$$

II.1.1 Newton'sche Bewegungsgleichungen (Inertialsystem)

Betrachten wir zunächst die Newton'schen Bewegungsgleichungen ohne Zwangskräfte:

$$\boxed{m_I \ddot{\vec{x}}^I = \vec{K}^I(\{\vec{x}^I\}, \{\dot{\vec{x}}^I\}, t)} \tag{II.1}$$

oder in den jeweiligen Komponenten $i = x, y, z$:

$$\boxed{m_I \ddot{x}_i^I = K_i^I}. \tag{II.2}$$

Dies führt im Allgemeinen zu $3N$ gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung für die $\vec{x}^I(t)$ mit $6N$ Integrationskonstanten. Eine mögliche Wahl für die Anfangsbedingungen sind die Orte und Geschwindigkeiten der N Teilchen: $\vec{x}^I(t_0)$ und $\dot{\vec{x}}^I(t_0)$.
Alternative Indizierung:

$$\left.\begin{array}{l} I = 1, ..., N \\ i = x, y, z \end{array}\right\} \left(\begin{array}{c} I \\ i \end{array}\right) \Rightarrow a = 1, ..., 3N. \tag{II.3}$$

Mithilfe der Indices a ergibt sich II.1 in eine symmetrischen Form zu:

$$\boxed{m_a \ddot{x}_a = K_a} \tag{II.4}$$

Hierbei sind natürlich jeweils drei aufeinanderfolgende m_a identisch.
Nun nehmen wir r holonome Zwangsbedingungen mit $0 \leq r \leq 3N$ hinzu:

$$\varphi_\nu(x_1, ..., x_{3N}, t) = c_\nu, \quad \nu = 1, ..., r. \tag{II.5}$$

Beispiel einer solchen Zwangsbedingung wäre die Kopplung von Teilchen mit einer Stange der Länge l:

$$\varphi_1 = |\vec{x}^1 - \vec{x}^2| = l. \tag{II.6}$$

Nach den Argumenten des letzten Kapitels ergeben sich dann die Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\boxed{m_a \ddot{\vec{x}}_a = K_a + Z_a; \;\; Z_a = \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_a}} \tag{II.7}$$

Konservative Kräfte sind jetzt $K_a = K_a(x_1, ...x_{3N}, t)$ mit

$$\frac{\partial K_a}{\partial x_b} - \frac{\partial K_b}{\partial x_a} = 0, \;\; a, b = 1, ..., 3N. \tag{II.8}$$

Diese stammen von einem Potential $V = V(x_1, ..., x_{3N}, t)$ mit

$$\boxed{K_a = -\frac{\partial V}{\partial x_a}.} \tag{II.9}$$

II.1.2 Lagrange'sche Bewegungsgleichungen (Allgemeine Koordinaten)

Als nächsten Schritt betrachten wir wiederum den Übergang zu allgemeinen Koordinaten:

$$x_a \to q_a : \;\; x_a = f_a(q_1, ..., q_{3N}, t); \;\; a = 1, ..., 3N. \tag{II.10}$$

Wobei die q_a beliebig sind, allerdings müssen die f_a zumnidest in lokalen Umgebungen umkehrbare Funktionen sein. Die Diskussion in Kapitel I.10 kann nun einfach wiederholt werden, allerdings laufen die Summen nun statt von 1 bis 3 von 1 bis $3N$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k} \;\; k = 1, ..., 3N \tag{II.11}$$

wobei

$$T = \sum_{a=1}^{3N} \frac{m_a}{2} \dot{x}_a^2 \tag{II.12}$$

$$Q_k = \sum_{a=1}^{3N} K_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k} + \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_k} \tag{II.13}$$

Betrachtet man nun wieder konservative Kräfte $k_a = -\frac{\partial V}{\partial x_a}$, so folgt:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_k} \tag{II.14}$$

und die Zwangsbedingungen lassen sich durch geeignete Koordinatenwahl eliminieren:

$$x_a = f_a(\underbrace{q_1, ..., q_f}_{\text{beliebig}}, \underbrace{\varphi_1}_{=c_1}, ..., \underbrace{\varphi_r}_{=c_r}, t) \tag{II.15}$$

mit $f = 3N - r$ Freiheitsgraden.
Somit erhält man mit der Lagrangefunktion

$$L = T(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f) - V(q_1, ..., q_f, t) \tag{II.16}$$

die Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

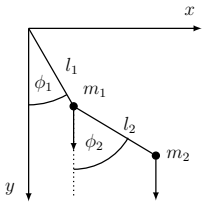
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \quad k = 1, ..., f. \tag{II.17}$$

Bemerkung:
Auch hier ist die Erweiterung zu geschwindigkeitsabhängigen Potentialen $V(q_1, ..., q_f, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_f, t)$ möglich, falls

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

gilt. Zum Beispiel für Teilchen im elektromagnetischen Feld gegeben.

Beispiel: Doppelpendel



Ebene $z = 0$
Freiheitsgrade: $f = 2$
Zwangsbedingungen:

$$|\vec{x}^1| = l_1,\ z^1 = 0,$$
$$|\vec{x}^1 - \vec{x}^2| = l_2,\ z^2 = 0,$$
$$r = 4 \to f = 3N - r = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

Koordinatenwahl: $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2$.

$$\Rightarrow T = \frac{m_1}{2}(v^1)^2 + \frac{m_2}{2}(v^2)^2\,, \qquad V = -m_1 g y^{(1)} - m_2 g y^{(2)}$$
$$(v^1)^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2;\ \ (v^2)^2 = (\dot{x}^{(0)})^2 + (\dot{y}^{(0)})^2$$

$$x^0 = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2$$
$$y^0 = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2$$

$$\begin{aligned}(v^2)^2 &= (l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2)^2 \\ &\quad + (l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2)^2 \\ &= l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 cos(\varphi_1 - \varphi_2)\end{aligned}$$

$$V = -m_1\, g\, l_1 \cos\varphi_1 - m_2\, g(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2).$$

Somit folgt für die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L = T - V = & \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \\ & + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & + (m_1 + m_2) g\, l_1 \cos\varphi_1 + m_2 l_2 g\, \cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die gekoppelten Lagrange-Gleichungen in φ_1 und φ_2.

II.2 Energieerhaltung

Hängt das Potential nicht von der Zeit ab, so gibt es eine erhaltene Größe, die wir Energie nennen: Es gilt: $V = V(x)$ und $x = \{x_1, ..., x_{3N}\}$, so dass mit $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V[x(t)] &= \sum_{a=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_a} \frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t} \overset{\text{II.42}}{=} - \sum_{a=1}^{3N} m_a \ddot{x}_a \dot{x}_a \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3N} m_a \dot{x}_a^2 \right) \end{aligned}$$

Das heißt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3N} m_a \dot{x}_a^2}_{T} + V(x) \right] = 0.$$

Dies ist der Energieerhaltungssatz:

$$\boxed{E = T + V = \text{const, falls } \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \tag{II.18}$$

Definition einer Erhaltungsgröße:

Wert der Größe bleibt während des Bewegungsablaufes konstant:

$$F(x_1(t), ..., x_{3N}(t)) = \text{const} = F(x_1(t_0), ..., x_{3N}(t_0)).$$

Die $x_a(t)$ ändern sich hierbei sehr wohl! Die Bewegungsgleichungen II.42 werden bei der Herleitung des Energieerhaltungssatzes verwendet, die Kenntnis der expliziten Lösung ist aber nicht nötig.

D.h. falls $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow$ Invarianz des Potentials unter infinitesimaler Zeittranslation.

$$\Rightarrow \boxed{\text{Invarianz unter Zeittransformation} \rightarrow \text{Energieerhaltung!}} \tag{II.19}$$

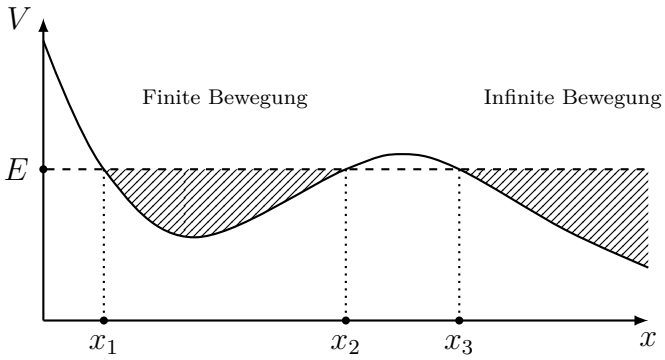
II.3 Eindimensionale Bewegung bei Energieerhaltung

Die Kenntnis von Erhaltungsgrößen ist sehr nützlich! Im eindimensionalen Fall erlaubt Energieerhaltung die Integration der Bewegungsgleichung. Der Energiesatz besagt hier einfach

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - V(x) \tag{II.20}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))} \tag{II.21}$$

Das heißt, dass Teilchen nur Werte von x durchlaufen kann, für die gilt: $E \geq V(x)$. Für vorgegebene



Energie E existieren Bewegungsbereiche für x. Punkte $V(x_i) = E$ sind Umkehrpunkte der Bewegung und es gilt $\dot{x}(t) = 0$ dort. An Umkehrpunkten findet ein Vorzeichenwechsel von dx und $\frac{dx}{dt}$ statt.

Finite Bewegung:
Bewegung in einem endlichen Intervall, Gebiet ist durch zwei Umkehrpunkte begrenzt (Oszillation).

Infinite Bewegung:
Bewegung in einem unendlichen Intervall, Gebiet durch einen oder keinen Umkehrpunkt begrenzt.

Die Gleichung II.21 kann integriert werden:

$$\mathrm{d}t = \frac{\pm \mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$$
$$\Rightarrow t - t_1 = \pm \int_{x_1}^{\bar{x}} \frac{\pm \mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$$

Dies ist nach Integration eine implizite Gleichung für $x(t)$, das unbestimmte Vorzeichen reflektiert die Zeitumkehrinvarianz:
Wenn $x(t)$ Lösung ist und die Anfangsbedingungen x_0 und v_0 sind, so ist $x(-t)$ eben falls Lösung mit den Anfangsbedingungen x_0 und $-v_0$.
Bei finiter Bewegung gilt für die Schwingungsdauer T:

$$T = 2 \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - V(x)}} \tag{II.22}$$

II.4 Impulserhaltung

Nun wollen wir zeigen, dass aus der Translationsinvarianz des Potentials die Impulserhaltung folgt:
Für $\vec{x}^I \to \vec{x}^{I'} = \vec{x}^I + \vec{a}$, $I = 1, ..., N$; $\vec{a} = \text{const}$ sei $V(\vec{x}^{I'}, t) = V(\vec{x}^I, t)$.
Dies ist z.B. realisiert für Potentiale, die nur vom Abstand der Teilchen vonneinander abhängen: $V(\vec{x}^I) = V(|\vec{x}^I - \vec{x}^J|)$.

Eine infinitesimale Translation impliziert nun:

$$V(\vec{x}^I + \vec{a}, t) = V(\vec{x}^I, t) + \sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{I=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i^I} V(\vec{x}^I, t) + \mathcal{O}(a^2) \stackrel{!}{=} V(\vec{x}^I, t)$$

Das heißt:

$$\sum_{I=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i^I} V(\vec{x}^I) = -\sum_{I=1}^{N} K_i^I = 0,$$

da die a_i infinitesimal aber beliebig sind.
Wir haben aus der Translationsinvarianz das dritte Newton'sche Gesetz hergeleitet: actio = reactio

$$\boxed{\sum_{I_1}^{N} \vec{K}^I = 0.} \tag{II.23}$$

Hieraus folgt unmittelbar die Impulserhaltung durch Verwendung der Newton'schen Bewegungsgleichungen II.42

$$0 = \sum_{I_1}^{N} m_I \ddot{\vec{x}}^I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\underbrace{\sum_{I=1}^{N} m_I \dot{\vec{x}}^I}_{:=\vec{P}} \right) \tag{II.24}$$

Gesamtimpuls:

$$\boxed{\vec{P} := \sum_{I=1}^{N} m_I \dot{\vec{x}}^I} \tag{II.25}$$

Impuls des I-ten Teilchens $\vec{p}^I = m_I \dot{\vec{x}}^I$. Erhaltungssatz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{P}(t) = \vec{P}(t_0)$.

Schwerpunkt:

(II.25) legt nahe, den Schwerpunkt $\vec{R}$ zu definieren:

$$\boxed{\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_{I=1}^{N} m_I \, \vec{x}^I} \tag{II.26}$$

mit der Gesamtmasse des Systems $M = \sum_{I=1}^{N} m_I$.
Aus (II.24) folgt:

$$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = 0} \tag{II.27}$$

Das ist der Schwerpunktsatz: Der Schwerpunkt bewegt sich aufgrund der Translationsinvarianz des Potentials geradlinig gleichförmig:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v} \cdot t.$$

Es gibt demnach ein Inertialsystem, in dem der Schwerpunkt ruht: Das Schwerpunktsystem. Bei abgeschlossenen mechanischen Systemen ist es sinnvoll das Schwerpunktssystem zur Beschreibung zu verwenden, da dies die triviale gleichförmige Bewegung des Gesamtsystems eliminiert.

II.5 Drehimpulserhaltung

Nun ist es naheliegend zu fragen, was aus der Rotationsinvarianz des Potentials folgt: Wir werden die Drehimpulserhaltung finden.

Rotationsinvarianz bedeutet:

$$V(\vec{x}^{I'}, t) = V(\vec{x}^I, t) \tag{II.28}$$

$$\text{mit} \quad \vec{x}^I \to \vec{x}^{I'} = \underline{A}\,\vec{x}^{I'} = (\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{T}_i)\,\vec{x}^I + \mathcal{O}(a^2)$$
$$= \vec{x}^I - \vec{a} \times \vec{x}^I + \mathcal{O}(a^{2)}$$

Wobei wir im letzten Schritt für die Erzeugenden die Relation $(T_i)_{jk} = \epsilon_{ijk}$ verwendet haben. Es folgt aus (II.28) für die infinitesimalen Drehungen

$$0 = \sum_{I=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} (\vec{a} \times \vec{x}^I)_j \frac{\partial}{\partial x_j^I} V(\vec{x}^I, t) = -\sum_{I=1}^{N} (\vec{a} \times \vec{x}^I) \cdot K^I \,. \tag{II.29}$$

wobei wir die Kraft die auf das I-te Teilchen $\vec{K}^I = -\vec{\nabla}_I V$ verwendet haben, wobei $\vec{\nabla}_I := \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j^I}$.

Nun nutzen wir die Newton'schen Bewegungsgleichungen und schließen

$$0 = -\vec{a} \cdot \sum_{I=1}^{N} m_I \vec{x}^I \times \ddot{\vec{x}}$$

da der Vektor $\vec{a}$ beliebig (aber infinitesimal) ist, folgern wir

$$0 = \sum_{I=1}^{N} m_I\, x^I \times \ddot{x}^I = \frac{d}{dt} \Big[\sum_{I=1}^{N} m_I\, x^I \times \dot{x}^I \Big] = 0 \,. \tag{II.30}$$

Im letzten Schritt wurde $\dot{\vec{x}}^I \times \dot{\vec{x}}^I = 0$ benutzt. Daraus ergibt sich der Erhaltungssatz, den wir mittels des IMpulses des I-ten Teilchen, $\vec{p}^I := m_I \dot{\vec{x}}^I$, umschreiben als

$$\sum_{I=1}^{N} (\vec{x}^I \times \vec{p}^I) = \text{const} \,. \tag{II.31}$$

D.h. mit der Definition des Drehimpulses eines Teilchen

$$\vec{L}^I := m_I\, \vec{x}^I \times \dot{\vec{x}}^I \tag{II.32}$$

und dem Gesamtdrehimpuls $\vec{L} := \sum_{I=1}^{N} m_I\, \vec{L}^I$ folgt aus (II.30) der Drehimpulssatz:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \vec{L} := \sum_{I=1}^{N} m_I\, \vec{L}^I} \,. \tag{II.33}$$

Zusammenfassend haben wir somit gezeigt: Zeittranslationsinvarianz des physikalischen Systems impliziert Energieerhaltung, Translationsinvarianz impliziert Impulserhaltung und Rotationsinvarianz impliziert die Drehimpulserhaltung.

II.6 Gailileitransformation von Energie, Impuls und Drehimpuls

Translationen in Raum und Zeit und die Rotationen sind im Fall invarianter Potentiale mit Erhaltungsgrößen verbunden. Eine wichtige Frage ist, wie sich diese unter den eigentlichen Galileitransformationen

$$\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} + \vec{v}\,t \tag{II.34}$$

verändern, die Inertialsysteme miteinander verbinden.

- Potentiale $V(\vec{x}^I)$, die invariant unter Transalationen sind, sind auch invariant unter Galileitransformationen
$$V(\vec{x}^I) = V(\vec{x}^I + \vec{a} + \vec{v}\,t)\,.$$

- Kinetische Energie
$$T' = \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N} m_I\,(\dot{\vec{x}}^{I'})^2 = \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N} m_I\left((\dot{\vec{x}}^I)^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{x}^I + \vec{v}^2\right) = T + \vec{v}\cdot\vec{P} + \frac{1}{2}\,M\,\vec{v}^2 \tag{II.35}$$
Falls das ursprüngliche System S ein Schwerpunktssystem war ($\vec{P} = 0$), dann ist
$$\boxed{T' = T_S + \frac{1}{2}\,M\,\vec{v}^2}\,. \tag{II.36}$$

- Impuls
$$\boxed{\vec{P}' = \vec{P} + \sum_{I=1}^{N} m_I\vec{v} = \vec{P} + M\,\vec{v}}\,. \tag{II.37}$$

- Drehimpuls
$$\begin{aligned}\vec{L}' &= \sum_{I=1}^{N} m_I\vec{x}^{I'} \times \dot{\vec{x}}^{I'} = \sum_{I=1}^{N} m_I(\vec{x} + \vec{a} + \vec{v}\,t) \times (\dot{\vec{x}} + \vec{v}) \\ &= \vec{L} + \vec{a}\times\vec{P} + M\,\vec{a}\times\vec{p} + t\,\vec{v}\times\vec{P} + M\,\vec{R}\times\vec{v}\,.\end{aligned} \tag{II.38}$$
Ist das ursprüngliche System S wiederum ein Schwerpunktssystem ($\vec{P} = 0, \vec{R} = 0$) so gilt
$$\boxed{\vec{L}' = \vec{L}_S + M\,\vec{a}\times\vec{v}}\,. \tag{II.39}$$

D.h. bezogen auf das Schwerpunktssystem unterscheiden sich alle Erhaltungsgrössen Energie, Impuls und Drehimouls um den Beitrag eines fiktiven Teilchens der Masse M und der Geschwindigkeit $\vec{v}$.

II.7 Zyklische Koordinaten

Energie, Impuls und Drehimpuls sind nicht die einzig möglichen Erhaltungsgrößen in einem physikalischen System, auch wenn sie aufgrund ihres Ursprungs aus der Struktur von Raum und Zeit, der Homogenität von Zeit und Raum sowie der Isotropie des Raumes, einen besonderen Status genießen. In der Tat lassen sich Erhaltungsgrößen im Fall der Beschreibung des Systems mittels verallgemeinerter Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ im Lagrange-Formalismus durch Relationen der Art

$$F(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) = \text{const}$$

ganz allgemein definieren. Diese stellen sich ein, wenn ein System sogenannte *zyklische Koordinaten* aufweist.

Lagrange-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad k-1,\ldots,f \tag{II.40}$$

Ist nun die Lagrangefunktion unabhängig von der Koordinate q_j

$$L = Lq_1,\ldots,\cancel{q_j},\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f,t)$$

so ist der assozierte verallgemeinerte Impuls

$$\boxed{p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}. \tag{II.41}$$

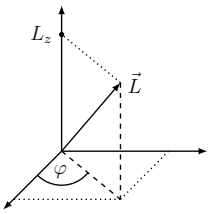
erhalten, da ja nach (II.40) gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}p_j = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p_j = \text{const}} \tag{II.42}$$

Ist die Lagrangefunktion unabhängig von q_j, so bezeichnet man q_j als zyklische Koordinate.

II.8 Drehimpuls als verallgemeinerter Impuls

Die Natur der verallgemeinerten Impulse, die *nicht* die Masseinheit kg*m/sec besitzen müssen, zeigt sich sehr schön in der Interpreatation des Drehimpulses als verallgemeinertem Impuls zu einer Winkelvariable. Die Projektion des Drehimpulses auf irgendeine Achse (nennen wir sie die z-Achse) ist der verallgemeinerte Impuls zur Koordinate φ, dem Drehwinkel um diese Achse



$$L_z = \sum_{I=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^I} \tag{II.43}$$

Dies folgt durch direktes Ausrechnen. Für die z-Komponente des Drehimpulses gilt

$$L_z = \sum_{I=1}^{N} m_I\,(x^I\,\dot{y}^I - y^I\,\dot{x}^I) = \sum_{I=1}^{N} m_I\,(r^I)^2\,\dot{\varphi}^I \tag{II.44}$$
$$\text{mit} \qquad x^I = r^I\cos\varphi^I\,, \quad y^I = r^I\sin\varphi^I$$

Andererseits hat die Lagrange-Funktion in diesen Variablen die Form

$$L = \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N} m_I\left[(\dot{r}^I)^2 + (r^I\,\dot{\varphi}^I)^2 + (\dot{z}^I)^2 - V(r^I,\varphi^I,z^I)\right] \tag{II.45}$$

und es ergibt sich der verallgemeinerte Impuls zu φ^I

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^I} = m_I(r^I)^2\,\dot{\varphi}^I = L_z$$

Insbesondere ist L_z erhalten, falls das Potential V unabhängig von φ^I ist!

III Integration der Bewegungsgleichungen

III.1 Eindimensionale Bewegung

Im 1D-Fall erlaubt die Energieerhaltung für zeitunabhängige Potentiale $V(x)$ die Integration der Bewegungsgleichungen, wie wir in Kapitel II.3 gesehen haben.

$$t - t_I = \pm \int_{x_I}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \qquad x = x(t) \text{ mit } x_I = x(t_I)$$

Für die Schwingungsdauer im Fall einer finiten Bewegung zwischen x_1 und x_2 gilt:

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

III.2 Zweikörperproblem

Ein zentrales Problem in der Physik ist ein mechanisches System zweier in Wechselwirkung stehender Teilchen mit einem abstandsabhängigen Potential $V = V(|\vec{x}^1 - \vec{x}^2|)$: Das Zweikörperproblem. Dieses lässt eine Lösung in allgemeiner Form zu, die wir nun diskutieren wollen.

Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{x}}^1\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{x}}^2\right)^2 - V(|\vec{x}^1 - \vec{x}^2|) \tag{III.1}$$

Vereinfachung durch Aufspaltung in Relativ- und Schwerpunktbewegung. Wir führen den Abstandsvektor ein, $\vec{r} := \vec{x}^1 - \vec{x}^2$, und legen Schwerpunkt $\vec{R}$ in den Ursprung, so dass

$$0 = m_1\vec{x}^1 + m_2\vec{x}^2$$

gilt. Es folgt

$$\vec{x}^1 = \frac{m^2}{M}\vec{r} \qquad \vec{x}^2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r} \qquad M = m_1 + m_2\,.$$

Einsetzen in (III.1):

$$L = \underbrace{\left(\frac{m_1}{M}\frac{m_2^2}{M^2} + \frac{m_2}{M}\frac{m_1^2}{M^2}\right)}_{\frac{m_1 m_2}{2}\frac{m_2+m_1}{M^2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}} \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r)} \qquad r = |\vec{r}| \tag{III.2}$$

<u>Reduzierte Masse</u> $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

Wir konnten das Zweikörperproblem auf ein effektives Einkörperproblem reduzieren: Die Dynamik wird durch ein fiktives Teilchen der Masse μ in einem äußeren, kugelsymmetrischen Potential $\Rightarrow$ man spricht von einem effektiven Teilchen in einem 'Zentralpotential' oder Zentralfeld.

III.3 Bewegung im Zentralfeld

Für $V = V(r)$ ist die Kraft

$$\vec{K} = -\vec{e}_r \frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{d. h.: } \vec{K} \parallel \vec{x}$$

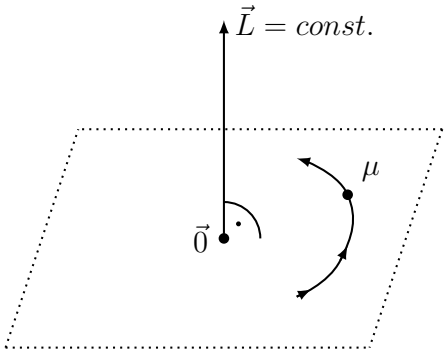
Erhaltungsgrößen?:

- Energie $E = T + V$
- Drehimpuls $\vec{L}$ (Rotationsinvarianz)

Achtung: Der Impuls des Teilchens im Zentralfeld ist nicht erhalten, da $V(|\vec{x}|) \neq V(|\vec{x} + \vec{a}|)$. Aus $\vec{L} = const.$ folgt, dass die Bewegung in der Ebene stattfindet, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ durch den Aufpunkt $\vec{x}(t_0)$ und die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t_0)$ festgelegt wird:

$$\vec{L} = \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = const.$$

D. h. $\quad \vec{L} \perp \vec{x}$



Geeignetes Koordinatensystem: Zylinderkoordinaten, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) die z-Achse in Richtung von $\vec{L}$ legen. Damit haben wir

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = 0$$

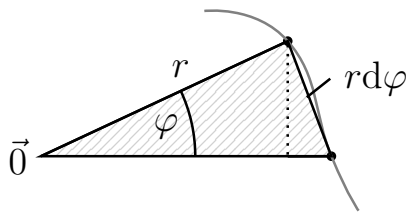
Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

Zyklische Variable: $\quad \varphi: \quad L_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} =: p_\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = const. \qquad \text{(Drehimpulserhaltung)}$$

III.3.1 Geometrische Interpretation:



$$r^2\dot{\varphi} = const.$$

Fläche des infinitesimalen Sektors

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2}r \cdot r\mathrm{d}\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{p_\varphi = 2m\dot{f} = const.} \quad \text{Flächensatz} \tag{III.3}$$

$\dot{f}$: Flächengeschwindigkeit

Radiusvektor des sich bewegenden Teilchens überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. (Zweites KEPLER[1]'sches Gesetz)

III.3.2 Integration

Lösung der Bahngleichung am einfachsten über Erhaltung der Energie E und des Drehimpulses $p_\varphi = l$:

$$p_\varphi = l = mr^2\dot{\varphi} = const. \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$$
$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = const.$$

Analog zum bereits behandelten 1D Fall ergibt sich

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{l^2}{m^2r^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \pm\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{l^2}{m^2r^2}}}$$

D.h., wir erhalten die implizite Lösung für r für ein *beliebiges* Zentralfeldpotential $V(r)$

$$\boxed{t = \pm\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{l^2}{m^2r^2}}} + const.} \tag{III.4}$$

$\Rightarrow t = t(r) \curvearrowright r = r(t)$.

Für den Winkel φ folgt aus der Drehimpulserhaltung

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{l}{mr^2}\mathrm{d}t = \pm\frac{\frac{l}{mr^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{l^2}{m^2r^2}}}$$

und somit

$$\boxed{\varphi(r) = \pm\int \frac{l}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{l^2}{r^2}}} + const.} \tag{III.5}$$

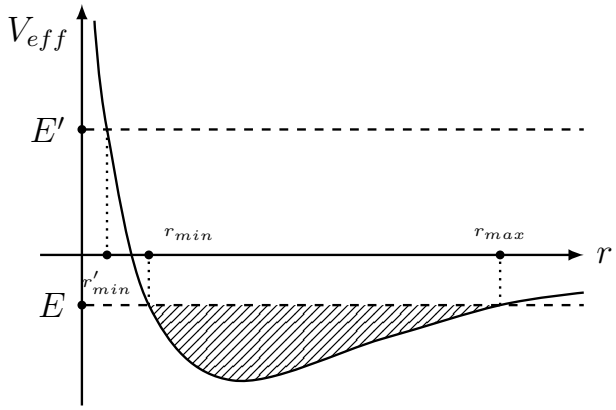
und mit $r(t)$ auch $\varphi(t)$. D.h., die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Zentralfeld $V(r)$ ist damit völlig auf die Integrale (III.4) und (III.5) reduziert worden.

<u>Diskussion:</u> Aus

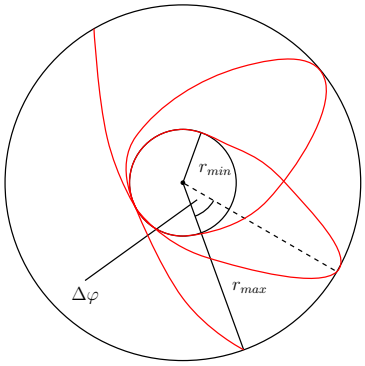
$$E = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + V(r)}_{=:V_{eff}(r)}$$

folgt $E - V_{eff} \geq 0$. $\Rightarrow$ Bewegungsbereiche für r:

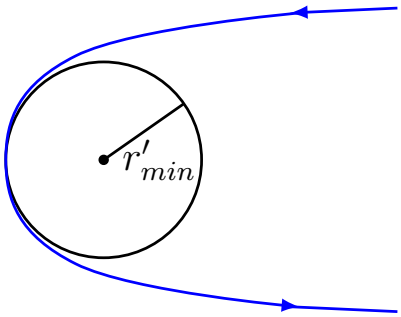
[1] (Johannes Kepler, Deutschland, 1571-1630)



Für Energie = E: Finite Bewegung zwischen r_{min} und r_{max}. Umkehrpunkte $\dot{r}_{min} = 0 = \dot{r}_{max}$, Bahn verläuft zwischen den Kreisen mit Radius r_{min} bzw. r_{max}, i. A. nicht geschlossen:



Für Energie = E': Infinite Bewegung für $r > r'_{min}$, Umkehrpunkt bei $V(r'_{min}) = E$ mit $\dot{r}'_{min} = 0$:



Im Fall der finiten Bewegung sind geschlossene Bahnkurven nur dann möglich, wenn nach m Umläufen der Winkel φ sich um $2\pi m$, $m \in \mathbb{N}$ geändert hat:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{l}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-V(r))-\frac{l^2}{r^2}}}$$
$$= -2\frac{\partial}{\partial l}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \mathrm{d}r\sqrt{2m(E-V(r))-\frac{l^2}{r^2}} \tag{III.6}$$

Geschlossene Bahnkurve für $n\cdot\Delta\varphi = 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = 2\pi\frac{m}{n}}$$

D.h., nur falls obiges Integral (III.6)$= 2\pi z$ mit $z \in \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen) ist, haben wir periodische Bewegung!

$\rightarrow$ Das ist insbesondere der Fall für $V(r) \propto \frac{1}{r}$ und $V(r) \propto r^2$, wie wir sehen werden.

III.4 Das Kepler-Problem

Betrachten wir nun ein Zentralfeld mit $V(r) \propto \frac{1}{r}$

$\rightarrow$ relevant für Gravitations- und Coulombwechselwirkung

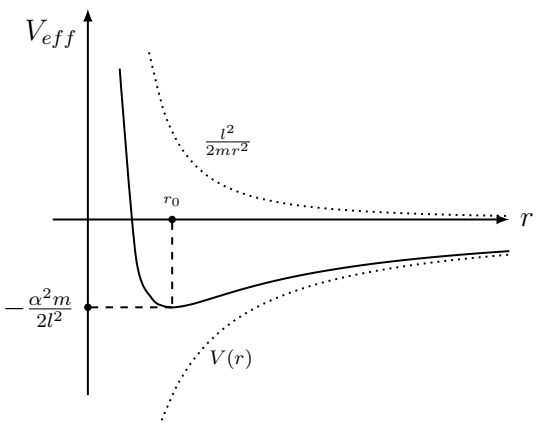
$\rightarrow$ $\vec{K} \propto \frac{1}{r^2}\frac{\vec{x}}{r}$

III.4.1 Anziehender Fall

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \text{mit } \alpha > 0$$
$$\vec{K} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\vec{x}}{r} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{x}}{r}$$

Effektives Potential

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$



<u>Das heißt:</u>

$E > 0$ infinite Bewegung

$E < 0$ finite Bewegung

$E = (V_{eff})_{min} = -\frac{\alpha^2 m}{2l^2}$ (Kreisbahn)

Integration der Bahnkurve $r(\varphi)$

$$\varphi = \pm \int \frac{l}{r^2} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E + \frac{\alpha}{r}] - \frac{l^2}{r^2}}}$$

Substitution:

$$\frac{l}{r} - \frac{m\alpha}{l} = x, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = -\frac{l}{r^2}, \qquad x^2 = \frac{l^2}{r^2} - 2m\frac{\alpha}{r} + \frac{m^2\alpha^2}{l^2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \pm \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{l^2} - x^2}} = \pm \frac{1}{x_0} \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}} \qquad x_0 = \sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{l^2}}$$

$$= \pm \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right) + \varphi_0$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\frac{l}{r} - \frac{m\alpha}{l}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\alpha}{l}\right)^2}}$$

Mit den Definitionen (Erhaltungsgrößen)

$$\boxed{p = \frac{l^2}{m\alpha}; \quad \epsilon = \sqrt{1 + 2E\frac{l^2}{m\alpha^2}}} \tag{III.7}$$

$$\underline{p: \text{ 'Bahnparameter'}} \qquad \underline{\epsilon: \text{ 'Exzentrität'}} \quad \epsilon \in \mathbf{R}, \text{ da } E \geq -\frac{\alpha^2 m}{2l^2} \tag{III.8}$$

bzw. mit

$$\epsilon^2 - 1 = 2E\frac{l^2}{m\alpha^2} \qquad \sqrt{2mE + \left(\frac{m\alpha}{l}\right)^2} = \frac{l}{p}\epsilon \qquad \frac{l}{r} - \frac{m\alpha}{l} = l(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) \tag{III.9}$$

folgt für die Bahnkurve $r(\varphi)$:

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}} \tag{III.10}$$

Die Gleichung beschreibt Bahnkurven in Form einer Ellipse ($0 < \epsilon < 1$), einer Parabel ($\epsilon = 1$) und einer Hyperbel ($\epsilon > 1$). Dies sehen wir durch Quadrieren der Gleichung (III.10): (setze $\varphi_0 = 0$)

$$p - \epsilon r\cos\varphi = r \quad \Rightarrow \quad p^2 - 2\epsilon pr\cos\varphi + \epsilon^2 r^2\cos^2\varphi = r^2$$

Übergang in kartesische Koordinaten

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad r\cos\varphi = x$$

$$\Rightarrow p^2 - 2\epsilon px + \epsilon^2 x^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2(1 - \epsilon^2) + 2\epsilon px + y^2 = p^2} \tag{III.11}$$

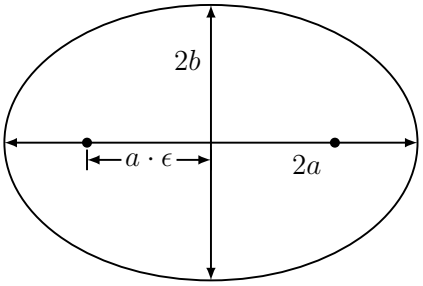
Betrachte nun die <u>Translation</u> $x = \hat{x} - \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}$ für ($\epsilon \neq 1$):

$$\text{(III.11)} \Rightarrow \hat{x}^2(1 - \epsilon^2) + \frac{\epsilon^2 p^2}{1 - \epsilon^2} - \frac{2\epsilon^2 p^2}{1 - \epsilon^2} + y^2 = p^2$$

$$\Rightarrow \hat{x}^2(1 - \epsilon^2) + y^2 = p^2\left(1 + \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2}\right) = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2}$$

i) $\underline{0 < \epsilon < 1}$

$$\boxed{\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{Ellipsengleichung}$$



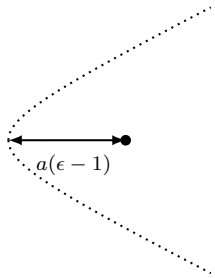
mit $a^2 = \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^2}$, $b^2 = \frac{p^2}{1-\epsilon^2}$, bzw.

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}}$$

ii) $\underline{0 < \epsilon < 1}$

$$\boxed{\frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{Hyperbelgleichung}$$



mit $a^2 = \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^2}$, $b^2 = \frac{p^2}{\epsilon^2-1}$

iii) $\underline{\epsilon = 1}$

Hier machen wir die Translation $\hat{x} = x + \frac{p}{2}$

$$(\text{III.11}) \Rightarrow \boxed{y^2 + 2p\hat{x} = 0} \qquad \text{Parabelgleichung} \tag{III.12}$$

Bahn eines Teilchens, das bei $r = \infty$ in Ruhe startet.

D. h. wir finden die Bahnen für

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^2 m}{2l^2} \leq E < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Ellipse} \\ E = 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Parabel} \\ E > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Hyperbel.} \end{aligned}$$

Die Umkehrpunkte r_{min} und r_{max} folgen aus (III.10):

$$r_{min} = \frac{p}{1+\epsilon} \qquad r_{max} = \frac{p}{1-\epsilon} \qquad (\text{für } 0 < \epsilon < 1)$$

Falls $\epsilon \geq 1$ gibt es nur einen Umkehrpunkt $r_{min} = \frac{p}{1+\epsilon}$.

<u>Umlaufzeit (für $E < 0$):</u>

Aus dem Flächensatz $\dot{f} = \frac{l}{2m} = const$ folgt für einen Umlauf (Fläche der Ellipse ist πab):

$$\pi ab = \int_0^\tau \mathrm{d}t \frac{l}{2m} = \frac{l}{2m} T \Rightarrow T = \frac{2\pi abm}{l}$$

Mit $a = \frac{\alpha}{2|E|}$ und $b = \frac{l}{\sqrt{2|E|m}}$ folgt $T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$ bzw.

$$\boxed{T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}} \tag{III.13}$$

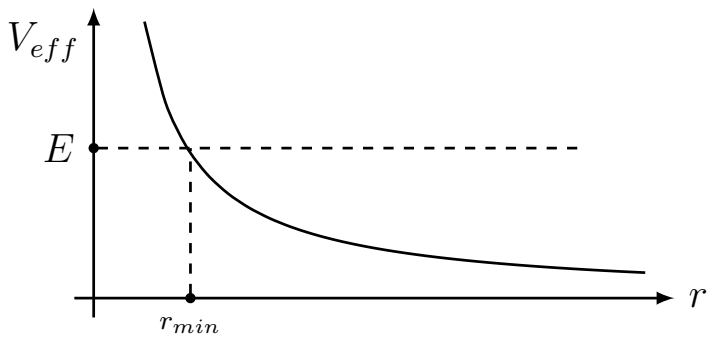
Das bedeutet $T^2 \propto a^3$ (3. KEPLER'sches Gesetz).

Für das gravitative Zweikörperproblem ist $m = \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ und $\alpha = m_1 m_2 \gamma$. (γ: NEWTON'sche Gravitationskonstante). Für $m_2 \gg m_1$ (etwa $m_2 = m_\odot$ und $m_1 = m_{Planet}$) ist $\frac{\mu}{\alpha} = \frac{1}{\gamma(m_1+m_2)} \approx \frac{1}{\gamma m_\odot}$, so dass das Verhältnis $\frac{T^2}{a^3}$ für alle Planeten im Sonnensystem gleich ist. Weiterhin lässt sich aus dem Verhältnis und γ die Sonnenmasse bestimmen.

III.4.2 Abstoßender Fall

$$V(r) = +\frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha > 0)$$

Dann existiert nur eine infinite Bewegung: $E > 0$

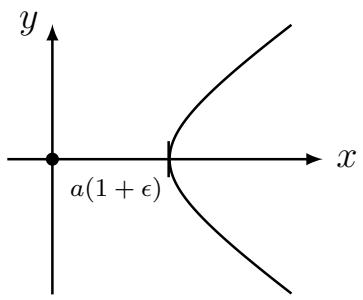


Rechnung wie zuvor, lediglich $\alpha \to -\alpha$:

$$r(\varphi) = \frac{p}{-1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0 - \pi)}$$

mit wie bisher $p = \frac{l^2}{m\alpha} > 0$ und $\epsilon = \sqrt{1 + 2E\frac{l^2}{m\alpha^2}} > 0$.

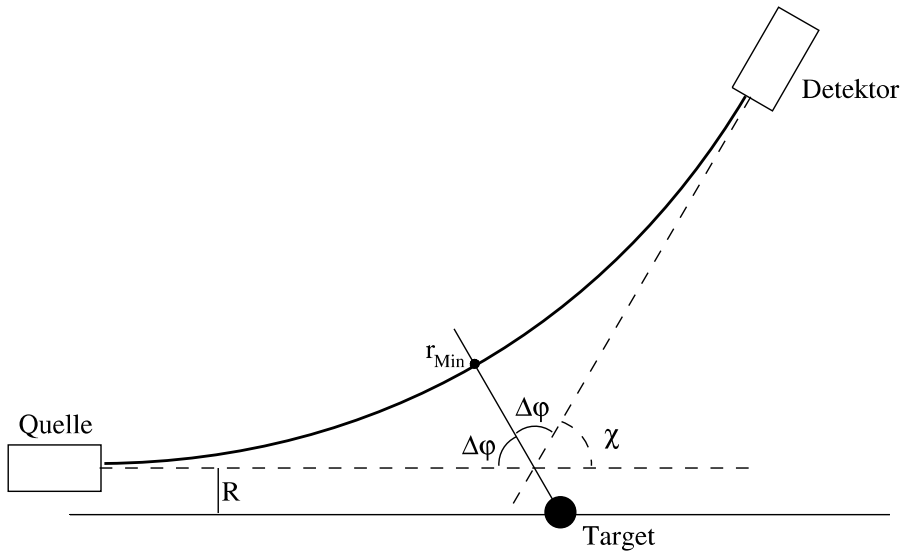
Bahn: verschobene Hyperbel



III.5 Teilchenstreuung und Wirkungsquerschnitt

Häufiges Experiment: Streuung eines Teilchens an einem Target.

Wir wollen annehmen, dass das Target eines Zentralpotential erzeugt (etwa geladener Atomkern) und auf das (geladene massive) Teilchen einwirkt.



Quelle Q und Detektor D befinden sich im Unendlichen. In Q werden identische Teilchen mit festen Energien

$$E = \frac{\mu}{2} v_\infty^2$$

emitiert.

Drehimpuls und Energie bestimmen $\Delta\varphi$ und somit auch den Streuwinkel χ. Der Drehimpuls ergibt sich aus den Stoßparameter R (siehe Skizze) zu

$$l = \mu R v_\infty. \tag{III.14}$$

D.h. $l^2 = 2\mu E R^2$. Weiterhin ist

$$E = V_{eff}(r_{min})$$

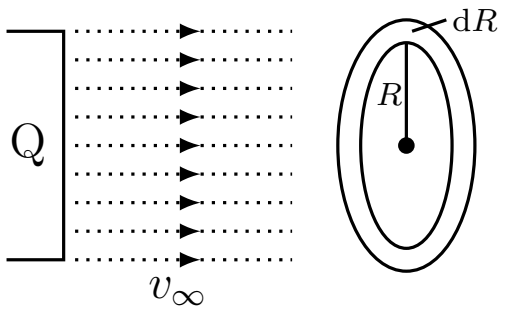
da die Radialgeschwindigkeit am Umkehrpunkt $r = r_{min}$ verschwindet. Die Winkeländerung zwischen $r = r_\infty$ und $r = r_{min}$ ergibt sich aus (III.6):

$$\Delta\varphi = l \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[2m(E - V_{eff}(r))\right]^{-1/2}$$

Für den Streuwinkel gilt $\chi = \pi - 2\Delta\varphi$, somit folgt also $\chi = \chi(E, R)$, da

$$V_{eff} = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = V(r) + E\frac{R^2}{r^2}$$

Im Experiment ist jedoch R oft kein messbarer Parameter, da die Lage des Streuzentrums (etwa ein Atomkern) nicht genau bekannt ist. Stattdessen erfolgt die Präparation eines homogenen Teilchenstrahls bei Q:



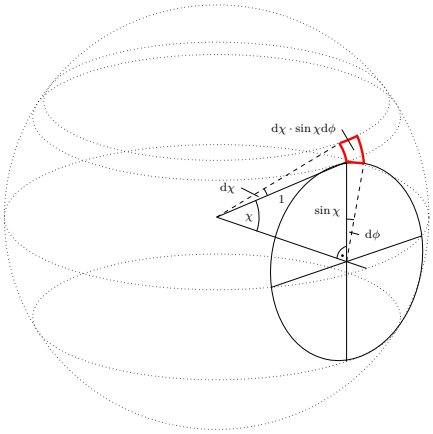
$n = \frac{\#\text{Teilchen}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

$2\pi R \cdot \mathrm{d}R \cdot n$=(#Teilchen/Zeit, die auf Streuzentrum mit Stoßparameter in $[R, R + \mathrm{d}R]$ einlaufen)

Diese werden in einen Winkelbereich $[\chi, \chi + \mathrm{d}\chi]$ und $[\phi, \phi + \mathrm{d}\phi]$ gestreut, also

$$\begin{aligned}\mathrm{d}N &= nR\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\phi \\ &= (\#\text{ Teilchen/Zeit, die in den Winkelbereich } [\chi, \chi + \mathrm{d}\chi] \text{ und } [\phi, \phi + \mathrm{d}\phi] \text{ gestreut werden}).\end{aligned}$$

Für den Raumwinkel gilt $\mathrm{d}\Omega = \sin\chi \mathrm{d}\chi\mathrm{d}\phi$ (ist Fächenelement auf der Einheitskugel),



<u>Definition:</u> Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{n} = R\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\chi}\right|\frac{\mathrm{d}\Omega}{\sin\chi}} \qquad \text{(III.15)}$$

Integration über die Raumwinkel $\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\phi$ liefert dann den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{tot} = \int \mathrm{d}\sigma\,,$$

der die Dimension einer Fläche trägt.

Beispiel: Wirkungsquerschnitt des Coulombpotentials (Rutherford'sche Streuformel[2])

$$\boxed{\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

r_{min} wird erreicht wenn rechte Seite der Gleichung maximal wird, also $\cos\varphi = 1$, d.h. $\varphi = 0$.
$r = \infty$ wird erreicht bei φ_∞, für das gilt

$$\begin{aligned} &0 = 1 + \epsilon\cos\varphi_\infty \\ &\Rightarrow \epsilon^2\cos^2\varphi_\infty = 1 \\ &\Rightarrow (\epsilon^2 - 1)\cos^2\varphi_\infty = \sin^2\varphi_\infty. \end{aligned}$$

Mit $\epsilon^2 - 1 = \frac{4E^2R^2}{\alpha^2}$, vergleiche (III.9), erhalten wir

$$R^2 = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \tan^2\varphi_\infty.$$

$\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$ und $\tan(\varphi_\infty) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = \cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$, sodass nun $R = R(E,\chi)$ folgt:

$$\boxed{R^2 = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \cot^2\left(\frac{\chi}{2}\right).}$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot^2(x) = 2\cot(x)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = 2\cot(x)\left(-1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = -2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$$

ist

$$2R\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\chi}\right| = \left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2 \left|\frac{\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\chi}{2}\right)}\right|.$$

Es folgt mit (III.15) und $\sin\chi = 2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}$

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\chi}{2}}\mathrm{d}\Omega} \qquad \text{Rutherford'sche Streuformel.} \tag{III.16}$$

III.6 Homogene Potentiale und der Virialsatz

In diesem Abschnitt wollen wir allgemeine Aussagen für eine Klasse von Potentialen machen, die homogene Funktionen der Koordinaten $\vec{x}^I$ sind. Darunter verstehen wir die Eigenschaft:

$$V(\lambda\vec{x}^1, \lambda\vec{x}^2, ..., \lambda\vec{x}^N) = \lambda^k V(\vec{x}^1, \vec{x}^2, ..., \vec{x}^N) \tag{III.17}$$

[2] (Ernest Rutherford, England, 1871-1937)

Wir nennen die Potenz k den Grad der Homogenität von V. In der Tat ist (III.6) ist gleichbedeutend mit

$$\sum_{I=1}^{N} \vec{x}^I \vec{\nabla}_I V = \sum_{a=1}^{3N} x_a \frac{\partial}{\partial x_a} V = kV(\vec{x}^1, \vec{x}^2, ..., \vec{x}^N).$$

Beispiele homogener Potentiale:

- Coulomb (k=1)
- harmonischer Oszillator (k=2)

Für die kinetische Energie gilt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_I m_I \left(\dot{\vec{x}}^I\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_I m_I \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\vec{x}^I \dot{\vec{x}}^I\right) - \vec{x}^I \ddot{\vec{x}}^I \right) \\ &\quad \text{mit } m_I \ddot{\vec{x}}^I = -\vec{\nabla}_I V : \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_I m_I \vec{x}^I \dot{\vec{x}}^I \right) + \frac{1}{2} \sum_I \vec{x}^I \vec{\nabla}_I V \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_I m_I \vec{x}^I \dot{\vec{x}}^I \right) + \frac{1}{2} kV(\vec{x}^1, \vec{x}^2, ..., \vec{x}^N). \end{aligned} \tag{III.18}$$

Nun wollen wir diese Gleichung zeitlich mitteln:

$$\boxed{\bar{F} := \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{d}t F(x(t), \dot{x}(t))} \tag{III.19}$$

Für eine finite Bewegung wird die zeitliche Mittelung über die Ableitung einer Funktion der Koordinaten stets Null ergeben:

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x, \dot{x})} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left(F(x(\tau), \dot{x}(\tau)) - F(x(0), \dot{x}(0)) \right) \to 0,$$

da $F(x(t), \dot{x}(t))$ stets endlich bleibt (finite Bewegung, x und $\dot{x}$ sind beschränkt). D.h. (III.6) impliziert

$$\boxed{\bar{T} = \frac{k}{2} \bar{V} \qquad \text{Virialsatz}} \tag{III.20}$$

k: Grad der Homogenität des Potentials.

Beispiele:

- Harmonischer Oszillator: $\bar{T} = \bar{V}$
- Coulomb, Kepler: $\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V}$ (gilt nur im Fall der finiten Bewegung)

Skalenverhalten
Skalentransformation der Koordinaten und der Zeit:

$$\vec{x}'^I = \lambda \vec{x}^I \qquad t' = \kappa t. \tag{III.21}$$

Behauptung:
Im Fall homogener Potentiale sind die Bewegungsgleichungen invariant unter Skalentransformationen falls die Relation $\kappa^2 = \lambda^{2-k}$ gilt. D.h. falls $\vec{x}^I(t)$ Lösung der Bewegungsgleichungen ist, so ist auch $\vec{x}'^I(t) = \lambda\vec{x}^I(\kappa^{-1}t)$ Lösung.

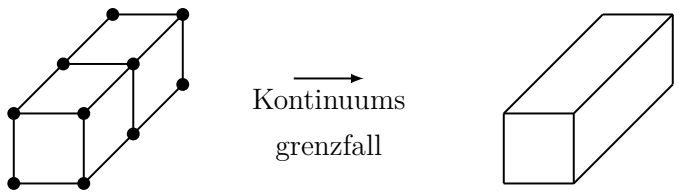
Beweis:
Unter (III.21) verändern sich die Geschwindigkeiten um den Faktor $\frac{\lambda}{\kappa}$, d.h. $T \to \frac{\lambda^2}{\kappa^2}T$. Das Potential verändert sich um $V \to \lambda^k V$. Mit $\kappa^2 = \lambda^{2-k}$ ist auch $T \to \frac{\lambda^2}{\lambda^{2-k}}T = \lambda^k T$ und somit $L \to \lambda^k L$, d.h. die Lagrange-Funktion verändert sich lediglich um einen konstanten Faktor und die Bewegungsgleichungen sind unverändert.
Das Ergebnis folgt auch durch einfaches explizites Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
m_I\ddot{\vec{x}}'^I(t) &= \lambda m_I \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{x}^I(\kappa^{-1}t) \\
&= \lambda m_I \frac{1}{\kappa^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(\kappa^{-1}t)^2}\vec{x}^I(\kappa^{-1}t) \\
&= -\frac{\lambda}{\kappa^2}\vec{\nabla}_I V(\vec{x}^I(\kappa^{-1}t)) \\
&= -\frac{\lambda}{\kappa^2}\vec{\nabla}_I V(\lambda^{-1}\vec{x}'^I(t)) \\
&= -\frac{\lambda}{\kappa^2}\lambda\vec{\nabla}'_I V(\lambda^{-1}\vec{x}'^I(t)) \\
&= -\frac{\lambda^{2-k}}{\kappa^2}\vec{\nabla}'_I V(\vec{x}'^I(t)) \\
&= -\vec{\nabla}'_I V(\vec{x}'^I(t)).
\end{aligned}$$

IV Der starre Körper

IV.1 Modell, Freiheitsgrade und Winkelgeschwindigkeit

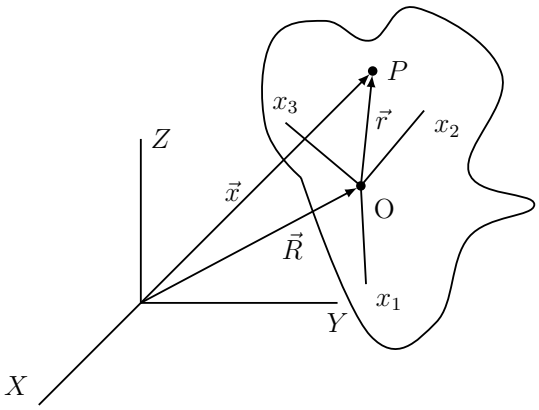
Starrer Körper in der Mechanik: System von N Massenpunkten, deren Abstände unveränderlich sind. Festkörper als starres Gitter von Molekülen und Atomen, die wir als Massenpunkte bschreiben.



$M = \sum_I m_I$ $\qquad$ $M = \int \rho \, \mathrm{d}V$ $\qquad$ ρ: Dichte

Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers durch zwei Koordinatensysteme:

- Ruhendes Inertialsystem X, Y, Z
- Bewegliches System $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, das starr mit dem Körper verbunden ist. Nullpunkt des bewegten Systems liegt zweckmäßigerweise im Schwerpunkt.



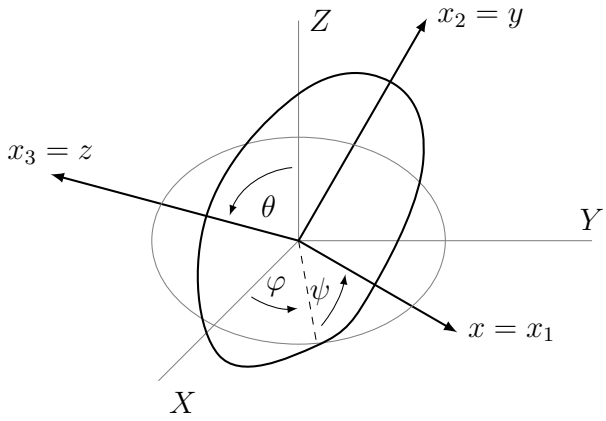
Lage des Körpers bzgl. des ruhenden Systems X, Y, Z vollständig durch Lage des bewegten Systems bestimmt.

Zahl der Freiheitsgrade:

3 Koordinaten X, Y, Z von $\vec{R}$

3 Winkel ϕ, θ, ψ, die Rotation der Achsen x, y, z bzgl. X, Y, Z beschreiben

Die Winkel ϕ, θ, ψ können als Euler'sche Winkel gewählt werden:



Für beliebigen Punkt P im starren Körper ist

$$\vec{x} = \vec{R} + \vec{r}.$$

Eine infinitesimale Verschiebung von $\vec{x}$ setzt sich zusammen aus der infinitesimalen Translation von $\vec{R}$ und der infinitesimalen Rotation von $\vec{r}$:

$$\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}\vec{R} + \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Teilen wir dies durch die Zeit $\mathrm{d}t$, in der diese Verschiebung vor sich geht, folgen die Geschwindigkeiten des Punktes

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \vec{V} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{IV.1}$$

$\vec{V}$: Geschwindigkeit des Schwerpunktes
$\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit der Drehung des starren Körpers.
Bemerkung: Nirgendwo in der obigen Betrachtung wurde verwendet, dass der Aufpunkt $\vec{O}$ im Schwerpunkt liegt. Ändern wir den Aufpunkt $\vec{O}$ des Körpers zu $\vec{O}'$ mit $\vec{O} - \vec{O}' = \vec{a}$, d.h. weg vom Schwerpunkt, so ist $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ und (IV.1) ändert sich zu

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

D.h. $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ und $\boxed{\vec{\omega}' = \vec{\omega}}$. Die zweite Gleichung besagt, dass sämtliche mit dem Körper starr verbundene Koordinatensysteme um parallele Achsen mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten rotieren.

IV.2 Trägheitstensor

Kinetische Energie des starren Körpers modelliert als Ansammlung von N Massenpunkten mit starren Abständen lautet

$$T = \sum m \frac{\vec{v}^2}{2} \hat{=} \sum_{I=1}^{N} m_I \frac{\vec{v}^{I\,2}}{2}$$

(nutzen verkürzte Notation und lassen Indizes I für die Teilchen weg)

$$\begin{aligned}(\text{IV.1}) \Rightarrow T &= \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2 \\ &= \sum \frac{m}{2}\left[\vec{V}^2 + 2\vec{V}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) + (\vec{\omega}\times\vec{r})^2\right]\end{aligned}$$

Erster Term: $\frac{1}{2}\sum m\vec{V}^2 = M\vec{V}^2$
Zweiter Term: $\sum m\vec{V}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \sum m\vec{r}\cdot(\vec{V}\times\omega) = (\vec{V}\times\vec{\omega})\cdot(\sum_I m_I\vec{r})$
Da $\vec{O}$ im Schwerpunkt liegt, ist $\sum_I m_I\vec{r}^I = 0$! Somit verschwindet der zweite Term.
Letzter Term: $(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = \vec{\omega}^2\vec{r}^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2$
Ergebnis: kinetische Energie

$$\boxed{T = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m\left[\omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2\right]} \tag{IV.2}$$

Erster Beitrag: K Energie der Translation T_{trans}, Gesamtmasse ist effektiv im Schwerpunkt konzentriert
Zweiter Beitrag: Rotationsenergie T_{rot}
Tensorschreibweise für Rotationsenergie

$$\begin{aligned}T_{rot} &= \frac{1}{2}\sum m\left(\omega_i^2 x_j^2 - \omega_i x_i x_k \omega_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum m\left(\omega_i\omega_k\delta_{ik}x_j^2 - \omega_i\omega_k x_i x_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\omega_i\omega_k \underbrace{\left[\sum m\left(\delta_{ik}x_j^2 - x_i x_k\right)\right]}_{=:I_{ik}}\end{aligned}$$

- Haben Einstein'sche Summenkonvention benutzt: Über doppelt vorkommende Raumindizes $i, j, k = 1, 2, 3$ wird summiert ohne Summenzeichen zu schreiben. Z.B. $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_i B_i$, $\vec{r}^2 = x_j x_j$.
- $\omega_i = \delta_{ik}\omega_k$
- Einführung des Trägheitstensors I_{ik}:

$$\begin{aligned}I_{ik} &:= \sum m(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k) \\ &= \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2)\end{pmatrix} = I_{ki} \qquad \text{(symmetrisch)} \\ &\underset{\text{Kontinuum}}{=} \int \rho(\vec{x})\left(\vec{x}^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Für die kinetische Energie ergibt sich somit

$$\boxed{T = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k}. \tag{IV.3}$$

Für die Lagrange-Funktion folgt

$$\boxed{L = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k - V(X, Y, Z, \varphi, \theta, \psi)}. \tag{IV.4}$$

Das Potential ist Funktion der 6 Freiheitsgrade des starren Körpers - mehr dazu später.

Wir wollen uns nun der Vereinfachung des Rotationsenergieterms zuwenden. Als symmetrische, reelle 3×3 Matrix kann der Trägheitstensor durch eine Hauptachsentransformation in Diagonalform gebracht werden. Die entsprechenden Komponenten des Tensors heißen Hauptträgheitsmomente I_1, I_2, I_3, die korrespondieren Achsen im körperfesten System x_1, x_2, x_3 heißen die Hauptträgheitsachsen. In diesem körperfesten System der Hauptträgheitsachsen nimmt der Rotationsanteil der kinetischen Energie eine einfache Form an:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \tag{IV.5}$$

mit $\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \vec{e_i}$ und

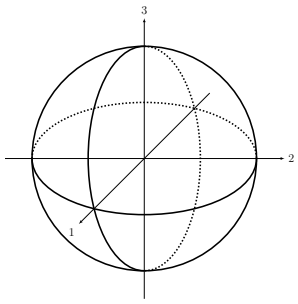
$$I_1 = \sum m(x_2^2 + x_3^2), \quad I_2 = \sum m(x_1^2 + x_3^2), \quad I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2) \tag{IV.6}$$

Bemerkungen:

- Es gilt stets $I_1 + I_2 \geq I_3$ (und zyklisch), denn

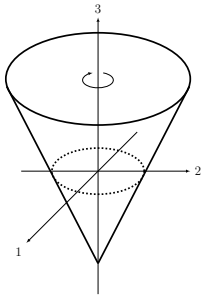
$$I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3 \tag{IV.7}$$

- Die Hauptträgheitsachsen liegen entlang von Symmetrieachsen des Körpers.

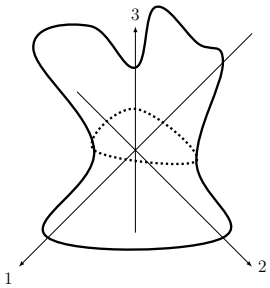


$I_1 = I_2 = I_3$: Kugelkreisel
(Achsen 1,2,3 können frei rotiert werden ohne die Hauptträgheitseigenschaft zu verlieren)

N.B: Ein Würfel ist auch ein Kugelkreisel!



$I_1 = I_2 \neq I_3$: Symmetrischer Kreisel
(Achsen 1,2 können frei um die 3 Achse rotiert werden ohne die Hauptträgheitseigenschaft zu verlieren)



$I_1 \neq I_2 \neq I_3$: Unsymmetrischer Kreisel
(Achsen sind fest aber stets orthogonal zueinander!)

- Sonderfälle:

– Massen in einer Ebene

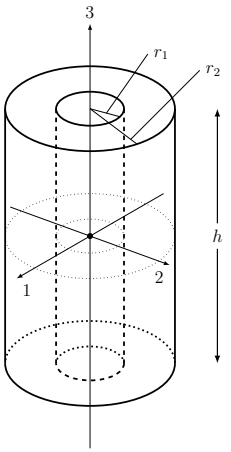
$$I_1 = \sum m x_2^2 \qquad \text{(IV.8)}$$
$$I_2 = \sum m x_1^2 \qquad \text{(IV.9)}$$
$$I_3 = I_1 + I_2 \qquad \text{(IV.10)}$$

– Rotator: Massen entlang einer Linie (hier der x_3 Achse

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2 \qquad \text{(IV.11)}$$
$$I_3 = 0 \qquad \text{(IV.12)}$$

Beim Rotator gibt es nur 2 Rotationsfreiheitsgrade, da Rotation um 3 keinen BEitrag zur kinetischen energie hat (punktförmige Massen)

Beispiel zur Berechnung: Trägheitsmoment eines Hohlzylinders



Dichte $\rho = \text{const}$

$$I_{33} = \int_V \rho(x_1^2 + x_2^2)\mathrm{d}V = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho r^2 (r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z)$$
$$= \rho 2\pi h \int_{r_1}^{r_2} r^3 \mathrm{d}r = \rho\frac{\pi}{2}h(r_2^4 - r_1^4) = \rho\frac{\pi}{2}h(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)$$

Und mit $V = \pi h(r_2^2 - r_1^2)$ und $\rho = \frac{M}{V}$ folgt

$$\boxed{I_{33} = \frac{M}{2}(r_2^2 + r_1^2)} \qquad \text{(IV.13)}$$

IV.3 Drehimpuls des starren Körpers

Allgemein: Drehimpuls eines System von Massenpunkten

$$\vec{\ell} = \sum_I \vec{x}^I \times \vec{p}^I \qquad \text{(IV.14)}$$

Hier ist $\vec{x}^I = \vec{R} + \vec{r}^I$ sowie (vergleiche (IV.1)) $\vec{v} = \dot{\vec{x}}^I = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}^I$. Somit folgt für den Drehimpuls eines starren Körpers:

$$\begin{aligned}
\vec{\ell} &= \sum_I m_I(\vec{R} + \vec{r}^I) \times (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}^I) = \vec{R} \times (M\vec{V}) + \underbrace{\sum_I m_I \vec{r}^I \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^I)}_{\vec{\omega}(\vec{r}^I)^2 - \vec{r}^I(\vec{\omega}\cdot\vec{r}^I)} \\
&\quad + \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_I m_I \vec{r}^I}_{=0}) + (\underbrace{\sum_I m_I \vec{r}^I}_{=0}) \times \vec{V} \\
&= \underbrace{\vec{R} \times (M\vec{V})}_{=:\vec{\ell}_S} + \underbrace{\sum_I m_I(\vec{\omega}(\vec{r}^I)^2 - \vec{r}^I(\vec{\omega}\cdot\vec{r}^I)}_{=:\vec{M}}
\end{aligned}$$

Der Drehimpuls hängt immer vom Bezugspunkt ab, was sich im Schwerpunktsanteils $\vec{\ell}_S$ äußert. Der intrinsische Drehimpuls des starren Körpers ist der zweite Term $\vec{M} = \sum_I m_I(\vec{\omega}(\vec{r}^I)^2 - \vec{r}^I(\vec{\omega}\cdot\vec{r}^I)$.

In Tensorschreibweise lässt sich $\vec{M}$ darstellen wie (lassen nun wieder Teilchenindes I weg).

$$M_i = \sum m(\omega_i x_j^2 - x_1\omega_j x_j \tag{IV.15}$$

$$= \sum m(x_l^2\delta_{ij} - x_i x_j)\omega_j = I_{ij} w_j \tag{IV.16}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_i = I_{ij}\omega_j} \tag{IV.17}$$

Wenn die x_i-Achsen Hauptträgheitsachsen sind gilt

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_e \end{pmatrix} \vec{\omega} \tag{IV.18}$$

bzw.

$$M_1 = I_1\omega_1 \tag{IV.19}$$

$$M_2 = I_2\omega_2 \tag{IV.20}$$

$$M_3 = I_3\omega_3 \tag{IV.21}$$

d. h. im Allgemeinen ist $\boxed{\vec{M} \nparallel \vec{\omega}}$, Drehimpuls und Drehachse sind nur bei Rotation um Hauptträgheitsachsen parallel

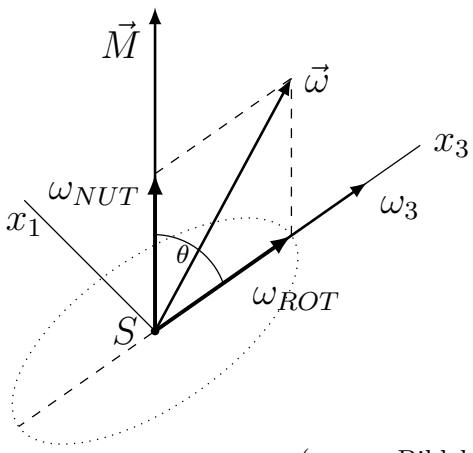
Ausnahmen

- <u>Kugelkreisel</u> $I = I_1 = I_2 = I_3$ Hier ist $\vec{M} = I\vec{\omega}$ und $\vec{M} \parallel \vec{\omega}$
- <u>Rotator</u> $I = I_1 = I_2$, $I_3 = 0$ und $\omega_3 = 0$ Somit auch hier $\vec{M} = I\vec{\omega}$ und $\vec{M} \parallel \vec{\omega}$

Wir wollen nun die freie Bewegung eines starren Körpers betrachten, der keinerlei äußeren Kräften unterliegt. Die gleichförimige Translationsbewegung des Schwerpunktes lassen wir weg, da sie uns nicht interessiert. Es liegt also einefreie Rotation vor. Wir betrachten den Fall eines symmetrischen Kreisels.

Symmetrischer Kreisel:

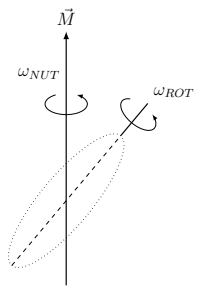
Nutation
Situation: Der Drehimpuls ist erhalten, $\vec{M} = \text{const.}$, $I_1 = I_2 = I$ und $I_3 \neq I$



Wahl der Achsen x_1, x_2 beliebig. Zu einem festen Zeitpunkt spannen $\vec{M}$ und $\vec{e}_3$ eine Ebene auf, in die wir x_1-Achse legen $\Rightarrow M_2 = 0$. Somit wegen $M_2 = I_2\omega_2$ auch $\omega_2 = 0$. $\Rightarrow \vec{M}, \vec{\omega}, x_1, x_3$ in einer momentanen Ebene

(x_2 aus Bildebene heraus)

Bewegung: Nutation um $\vec{M}$ Achse und Rotation um x_3-Achse.



Aus Zeichnung:

$$\vec{\omega} = \omega_{\text{NUT}} \frac{\vec{M}}{|\vec{M}|} + \omega_{\text{ROT}}\, \vec{e}_3 \tag{IV.22}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{\omega} = \omega_1 = \frac{M_1}{I} = \omega_{\text{NUT}} \frac{M_1}{M} \Rightarrow \boxed{\omega_{\text{NUT}} = \frac{|\vec{M}|}{I}} \tag{IV.23}$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{\omega} = \omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \omega_{\text{NUT}} \frac{M_3}{M} + \omega_{\text{ROT}} \tag{IV.24}$$

$$M_3 = |\vec{M}|\, \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_3 = \frac{|\vec{M}| \cos\theta}{I_3}} \tag{IV.25}$$

$$\text{ebenso} \quad \omega_{\text{ROT}} = \frac{M_3}{I_3} - \frac{M_3}{I} = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I}\right) |\vec{M}| \cos\theta \tag{IV.26}$$

Hierbei sind ω_{NUT} die Nutationsgeschwindigkeit und ω_3 die Rotationsgeschwindigkeit um die Symmetrieachse des Körpers.

Steiner'scher Satz

Der Trägheitstensor I_{ij} bezieht sich auf ein körperfestes Koordinatensystem, das im Schwerpunkt seinen Ursprung O hat. In der Übung zeigen wir, dass für einen alternativen Trägheitstensor I'_{ij} dessen Bezugssystem um einen Vektor $\vec{a}$ relativ zu O parallel verschoben ist der Steiner'sche Satz

$$I'_{ij} = I_{ij} + M\,(a_l^2\,\delta_{ij} - a_i\,a_j)$$

gilt. Hierbei bezeichnen a_i die Komponenten im körperfesten Bezugssystem $x_1 - x_2 - x_3$.

IV.4 Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Mithilfe der Lagrange-Funktion (IV.2) lassen sich die Bewegungsgleichunge des starren Körpers etablieren.

$$L = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k - V(X,Y,Z,\theta,\varphi,\psi) \tag{IV.27}$$

Die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunktsbewegung läßt sich leicht ableiten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0 \Rightarrow M\dot{\vec{V}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{R}} =: \vec{K} \Rightarrow M\dot{\vec{V}} = \vec{K} \tag{IV.28}$$

Wobei $\vec{K}$ die gesamte am Körper angreifende Kraft ist.

$$dV(\vec{x}_1,...\vec{x}_N) = \sum_I \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_I} d\vec{x}_I = \sum_I \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_I}(\mathrm{d}\vec{R} + \mathrm{d}\vec{\varphi}\times\vec{r}_I) \tag{IV.29}$$

$$= (\underbrace{\sum_I \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_I}}_{-\sum_I \vec{K}_I = -\vec{K}})\cdot \mathrm{d}\vec{R} + \mathrm{d}\vec{\varphi}\cdot(\sum_I \vec{r}_I \times \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_I}) \tag{IV.30}$$

Hieraus folgt

$$-\frac{\partial V}{\partial \vec{R}} = \sum_I \vec{K}_I = \vec{K} \tag{IV.31}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \vec{\varphi}} = \sum_I \vec{r}_I \times \vec{K}_I =: \vec{D} \tag{IV.32}$$

Wobei wir das Drehmoment $\vec{D}$ definiert haben:

$$\boxed{\vec{D} = \sum_I \vec{r}_I \times \vec{K}_I} \tag{IV.33}$$

D.h mit $\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$ lernen wir ferner, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{\omega}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{ik}\omega_k) = D_i} \tag{IV.34}$$

Bzw mit der Definition des Drehimpulses bezüglich des Schwerpunktes des starren Körpers $\vec{M}$.

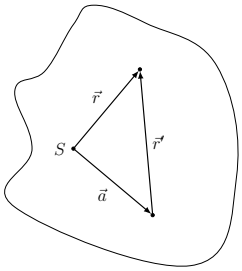
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M} = \vec{D}} \tag{IV.35}$$

Liegen keine Drehmomente an, so ist $\vec{M}$ Erhaltungsgröße.

Bemerkung

Bei einer Verschiebung des Aufpunktes im starren Körper weg vom Schwerpunkt S ändern sich Drehimpuls $\vec{M}$ und Drehmoment $\vec{D}$:

$\vec{r} = \vec{r}^{\,\prime} + \vec{a}$



$$\sum_I \vec{r}_I \times \vec{K}_I = \vec{r}_I^{\,\prime} \times \vec{K}_I + \vec{a} \times \sum_I \vec{K}_I = \vec{D}' + \vec{a} \times \vec{K}$$

Falls $\vec{D} \perp \vec{K}$ ist, kann man stets einen speziellen Verschiebungsvektor $\vec{a}_S$ finden bezüglich dessen das Drehmoment $\vec{D}'$ verschwindet:

$$\boxed{\vec{D} = \vec{a}_S \times \vec{K}} \tag{IV.36}$$

In der Tat gilt dies für eine ganze Linie von Verschiebungsvektoren

$$\vec{a}_S(\tau) = \vec{a}_s + \tau \frac{\vec{K}}{|K|}. \tag{IV.37}$$

Im Fall $\vec{D} \perp \vec{K}$ kann also das Drehmoment auf eine einzige Kraft, die am Punkt $\vec{a}_S$ angreift reduziert werden.

Wichtiges Beispiel:

Homogenes Kraftfeld Gilt $\vec{K}_I = e_I \vec{E}$ mit $\vec{E} = \text{const.}$ (etwa Erdschwerefeld $\vec{E} = \vec{g}$ und $e_I = m_I$) folgt

$$\vec{K} = \sum_I \vec{K}_I = \left(\sum_I e_I \right) \vec{E} \tag{IV.38}$$

$$\vec{D} = \left(\sum_I e_I \vec{r}_I \right) \times \vec{E} \tag{IV.39}$$

D.h. $\vec{D} \perp \vec{K}$ und mit

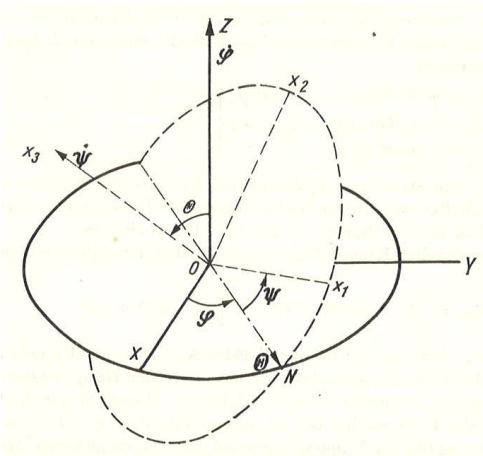
$$\vec{a}_S = \frac{\sum_I e_I \vec{r}_I}{\sum_I e_I} \qquad \text{ist} \qquad \boxed{\vec{D} = \vec{a}_S \times \vec{K}} \tag{IV.40}$$

Gilt insbesondere $\sum_I = e_I \vec{r}_I = 0$ (etwa für Schwerpunkt im Fall des Erdschwerefeldes) ist $\vec{D} = 0! \Rightarrow$ Wurf des starren Körpers: Bahn der SP wie Punktteilchens und freie Rotation mit $\vec{M} = \text{const.}$

IV.5 Eulerwinkel

Um im allgemeinen Fall die Rotationsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{ik}\omega_k) = D_i$ (IV.34) lösen zu können, benötigen wir den Zusammenhang

$$\boxed{\vec{\omega} \Leftrightarrow \text{ Eulerwinkel } \theta, \varphi, \psi} \tag{IV.41}$$



Zerlegung von $\vec\omega$ in Rotationen um φ, θ, ψ:

$$\vec\omega = \dot{\vec\psi} + \dot{\vec\theta} + \dot{\vec\varphi} \tag{IV.42}$$

und Zerlegung im körperfesten x_1-x_2-x_3 System. Dieses sei aufgespannt durch die Orthonormalbasis $\vec e_1', \vec e_2', \vec e_3'$

Aus der Skizze:

$$\dot{\vec\psi} = \dot\psi \vec e_3' \tag{IV.43}$$

$$\dot{\vec\theta} = \dot\theta \cos\psi \vec e_1' - \dot\theta \sin\psi \vec e_2' \tag{IV.44}$$

$$\vec e_3' \cdot \dot{\vec\varphi} = \dot\varphi \cos\theta \tag{IV.45}$$

Projektion von $\dot{\vec\varphi}$ in x_1, x_2-Ebene: $\dot\varphi \sin\theta$

$$\Rightarrow \vec e_1' \cdot \dot{\vec\varphi} = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi \tag{IV.46}$$

$$\vec e_2' \cdot \dot{\vec\varphi} = \dot\varphi \sin\theta \cos\psi \tag{IV.47}$$

Summieren wir all diese Beiträge auf, folgt

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\ \omega_2 &= \dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \\ \omega_3 &= \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi \end{aligned}} \tag{IV.48}$$

Damit folgt für die Rotationsenergie bei der Wahl der körperfesten Achsen englang der Hauptträgheitsachsen

$$\boxed{\begin{aligned} T_{\mathrm{ROT}} &= \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot\varphi^2\left(\left(I_1 \sin^2\psi + I_2\cos^2\psi\right)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\right. \\ &\quad + \dot\theta^2\left(I_1\cos^2\psi + I_2\sin^2\psi\right) + \dot\psi^2 I_3 \\ &\quad \left. +2\dot\varphi\dot\theta(I_1 - I_2)\sin\theta\sin\psi\cos\psi + 2\dot\varphi\dot\psi I_3\cos\theta\right) \end{aligned}} \tag{IV.49}$$

Gibt man $V = V(X, Y, Z, \varphi, \theta, \psi)$ vor, folgen die 6 Bewegungsgleichungen. Für symmetrischen Kreisel vereinfacht sich T_{ROT} auf ($I = I_1 = I_2$):

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{ROT}} &= \frac{1}{2}\left(\dot\varphi^2(I\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta) + \dot\theta^2 I + \dot\psi^2 I_3 + 2\dot\varphi\dot\psi I_3\cos\theta\right) \\ &= \frac{I}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\,\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

Für Kugelkreisel ($I_3 = I$) weiterhin zu:

$$T_{\mathrm{ROT}} = \frac{I}{2}\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \dot\psi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta\right)$$

IV.6 Die Euler'schen Gleichungen

Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers $\mu\dot{\vec{V}} = \vec{K}$ (μ = Gesamtmasse), und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M} = \vec{D}$ beziehen sich auf das ruhende Inertialsystem. Die Beziehung zwischen $\vec{M}$ und $\vec{\omega}$ ist jedoch am einfachsten im rotierenden, körperfesten System x, y, z (bzw. x_1, x_2, x_3 in der obigen Skizze), von dem wir annehmen wollen, dass es in Hauptachsen vorleigt. Wir wollen deshalb die Bewegungsgleichungen in das rotierende x, y, z System transformieren. Dies hatten wir in Kapitel I.3.2 diskutiert.

$$\vec{x} = \sum_i \vec{x}_i'(t) \underbrace{\vec{e}_i'(t)}_{\text{rotierendes System}} = \sum_i \vec{x}_i(t)\vec{e}_i \tag{IV.50}$$

$$\dot{\vec{x}} = \underbrace{\sum_i \dot{\vec{x}}'(t)\vec{e}_i'(t)}_{\frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t}} + \sum_i \vec{x}'(t) \underbrace{\dot{\vec{e}}_i'(t)}_{\omega\times\vec{e}_i'(t)} \tag{IV.51}$$

sodass für beliebigen Vektor $\vec{x}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega}\times\vec{x} \tag{IV.52}$$

$\frac{\mathrm{d}'\vec{x}}{\mathrm{d}t}$ beschreibt die zeitliche Änderung von $\vec{x}$, wie es im rotierenden körperfesten System wahrgenommen wird.

Es folgt

$$\mu\frac{\mathrm{d}'\vec{V}}{\mathrm{d}t} + \mu\vec{\omega}\times\vec{V} = \vec{K} \tag{IV.53}$$

$$\frac{\mathrm{d}'\vec{M}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega}\times\vec{M} = \vec{D} \tag{IV.54}$$

Bzw in Komponenten des rotierenden körperfesten Hauptachsensystems angeschrieben:

$$\boxed{\begin{aligned}\mu(\dot{V}_1 + \omega_2 V_3 - \omega_3 V_2) &= K_1\\ \mu(\dot{V}_2 + \omega_3 V_1 - \omega_1 V_3) &= K_2\\ \mu(\dot{V}_3 + \omega_1 V_2 - \omega_2 V_1) &= K_3\end{aligned}} \tag{IV.55}$$

$$\boxed{\begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= D_1\\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= D_2\\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= D_3\end{aligned}} \tag{IV.56}$$

Dies sind die Euler'schen Gleichungen[1]

Beispiel: Freie Rotation des symmetrischen Kreisels

$$I_1 = I_2 = I \qquad \vec{K} = \vec{D} = \vec{V} = 0 \tag{IV.57}$$

(IV.56) $\Rightarrow I_3\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{const.}$

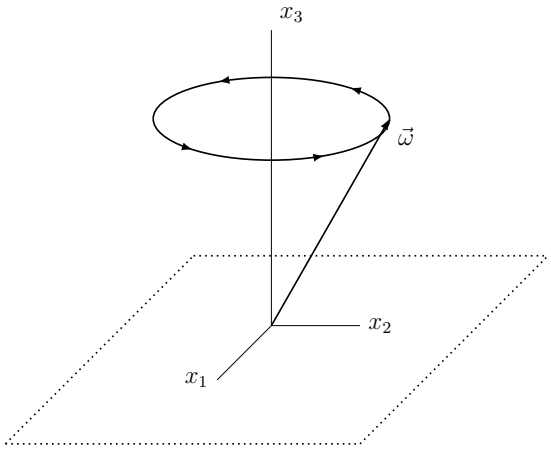
1. & 2. Glgn: $\dot{\omega}_1 = -\Omega\omega_2, \qquad \dot{\omega}_2 = +\Omega\omega_1$ mit $\boxed{\Omega = \omega_3\frac{I_3 - I}{I}}$.

[1] (Leonhard Euler, Schweiz/Russland, 1707-1783)

Integration dieser zwei Differentialgleichungen mittels Komplexifizierung

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_1 + i\omega_2) = i\Omega(\omega_1 + i\omega_2) \\
&\Rightarrow \omega_1 + i\omega_2 = Ae^{i\Omega t} \qquad \text{bzw. mit } A \in \mathbb{R} \\
&\omega_1(t) = A\cos(\Omega t), \qquad \omega_2(t) = A\sin(\Omega t)
\end{aligned}$$

D.h. $\vec{\omega}$ rotiert um x_3 mit konstanter Länge und Geschwindigkeit.



Ist äquivalent zu der Diskussion in IV.3 im körperfesten System.

IV.7 Freie Rotation des unsymmetrischen Kreisels

Für die freie Rotation gilt $\vec{M} = \text{const}$ und $E = \text{const}$ (Energie). Im körperfesten, rotierenden Hauptachsensystem gilt $\vec{M} = \sum_i M'(t)\vec{e}_{i'}(t)$ sind jedoch die Komponenten $M'(t)$ nicht konstant, lediglich deren qudrierte Summe ist erhalten: $M_1'(t)^2 + M_2'(t)^2 + M_3'(t)^2 = M^2 = \text{const}$.

Wir haben die erhaltungssätze:

$$\begin{aligned}
I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 &= 2\,E \\
I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 &= M^2
\end{aligned}$$

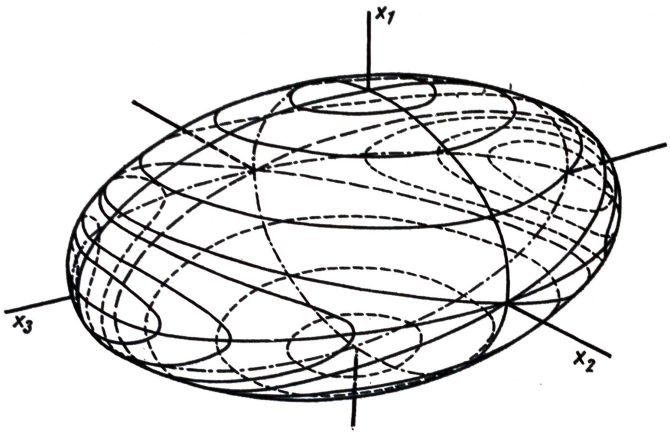
Bzw. mit $I_i\omega_i(t) = M_i'(t)$ folgt:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{{M_1'}^2(t)}{I_1} + \frac{{M_2'}^2(t)}{I_2} + \frac{{M_3'}^2(t)}{I_3} = 2E = \text{const} && \text{(IV.58)} \\
&{M_1'}^2(t) + {M_2'}^2(t) + {M_3'}^2(t) = M^2 = \text{const} && \text{(IV.59)}
\end{aligned}}$$

Hiebei stellt Glg. (IV.58) die Gleichung eines Ellipsoids mit den drei Halbachsen $\sqrt{2EI_1}$, $\sqrt{2EI_2}$, $\sqrt{2EI_3}$ dar, und Glg. (IV.59) die Gleichung einer Kugel mit Radius M^2 dar. Nehmen wir o.B.d.A. an, dass $I_1 < I_2 < I_3$ gelte, so sehen wir, dass diese beiden Gleichungen nur erfüllt werden können, wenn die Bedingung

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3 \tag{IV.60}$$

erfüllt ist. Dann bewegen sich die $M_i'(t)$ entlang den Schnitten des Ellipsoids und der Kugel:



D.h. die Rotation um die Hauptachsen x_1 & x_3 ist stabil (kleinstes und größtes Trägheitsmoment), die Rotation um x_2 ist instabil!

Ein schönes Video dieses Effekts von der ISS gibt es hier: https://youtu.be/1n-HMSCDYtM

Es findet eine initiale Roation um die mittlere Hauptachse des T-förmigen Körpers statt, die instabil ist. Der Überraschungseffekt liegt darin, dass nicht unmittelbar klar ist, dass die Rotation um das T-Bein ein mittleres Trägheitsmoment hat.

V Analytische Mechanik

Wir haben uns mittlerweile das notwendige Rüstzeug erarbeitet, um die mechanische Dynamik von Vielteilchensystemen mit und ohne Zwangsbedingungen durch Bewegungsgleichungen in Form gekoppelter Differentialgleichungen zweiter Ordnung vollständig zu beschreiben. Die gelingt im Fall konservativer Systeme mittels der Lagrangefunktion und den assozierten Lagrangegleichungen erster und zweiter Art, die auch den Fall der Zwangsbedingungen lösen. Der Ursprung dieser Gleichungen war in unserer bisherigen Diskussion jedoch etwas opak, wir haben sie durch Umschreiben der Newton'schen Bewegungsgleichungen in allgemeine Koordinaten gefundedn.

In diesem Kapitel wollen wir diesen Zustand dramatisch verbessern und die zugrundeliegenden Prinzipien der Mechanik detailierter erarbeiten, die als *analytische Mechanik* bekannt sind. Dieses Kapitel ist von zentraler Bedeutung für die Natur physikalischer Theoriebildung und strahlt in weite Bereiche der theoretischen Physik aus. Faszinierenderweise haben die hier abzuleitenden Prinzipien in der gesamten klassischen Physik Gültigkeit und stellen auch die Grundlagen einer späteren „Quantisierung" dar. Sie sind das Rückgrat der theoretischen Physik und berühren unser Naturverständnis in tiefster Manier. Das „Herzstück" der analytischen Mechanik ist das Prinzip der kleinsten Wirkung oder das Hamilton'sche[1] Prinzip, dem wir uns nun widmen wollen.

V.1 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

In der allgemeinste Formulierung des Bewegungsgesetzes mechanischer, konservativer Systeme beschreiben wir den Zustand eines Vielteilchensystems mittels verallgemeinerte Koordinaten $q_a(t)$ und verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_a(t)$, $(a = 1, ..., f)$, wobei$f$ die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet. In den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$, mit $t_1 < t_2$, nehme das System bestimmte, vorgegebene Lagen ein:

$$\begin{aligned} q_a^A &= q_a(t_1) \\ q_a^E &= q_a(t_2). \end{aligned} \tag{V.1}$$

Dies ist eine mögliche alternative Wahl der Randbedingungen der Dynamik, anstelle der bislang meist gewählten Anfangsbedingung $q_a^A = q_a(t_1)$ und $v_a^A = \dot{q}_a(t_1)$. Die zentrale Annahme dem Hamilton'schen Prinzips ist, das jedes konservative mechanische System ist durch eine Lagrange-Funktion charakterisiert ist:

$$L(q_1(t), ..., q_f(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_f(t), t)$$

und die Bewegung zwischen q_a^A und q_a^E der Teilchen gerade so erfolgt, dass das Zeitintegral,

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q_1(t), ..., q_f(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_f(t), t)} \tag{V.2}$$

genannt die <u>Wirkung</u> S, <u>minimal</u> wird.[2] $\Rightarrow$ <u>„Prinzip der kleinsten Wirkung"</u>

[1] (William Rowan Hamilton, Irland, 1805 - 1865)

[2] In der Tat folgt die Bewegungsgleichung lediglich aus der Extremalität von S, wie wir gliech sehen werden.

S hängt von der Bahnkurve $q_a(t)$ mit den Randbedingungen (V.1) ab, deshalb ist S ein Funktional von $q_a(t)$:

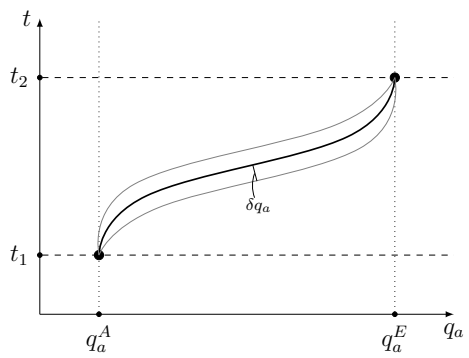
$$S = S[q].$$

S ist also eine „Funktion einer Funktion“.

Um das Extremum von S zu finden, bedienen wir uns der *Variationsrechnung*, die wir hier kurz entwickeln wollen. Hierzu betrachten wir die Variation der Bahnkurve bei festen Randbedingungen (V.1):

$$\begin{aligned} q_a'(t) &= q_a(t) + \delta q_a(t) \\ \delta q_a^A &= \delta q_a(t_1) = 0 \\ \delta q_a^E &= \delta q_a(t_2) = 0. \end{aligned} \tag{V.3}$$

wobei $q_a(t)$ gerade die (gesuchte und noch unbekannte) Funktion sei, die die Wirkung S minimiert. Das impliziert aber, dass S wächst wenn man $q_a(t)$ durch eine beliebige andere Funktion $q_a'(t)$ ersetzt. Nun sei $\delta q_a(t)$ eine Funktion, deren Betrag in dem gesamten Intervall $[t_1, t_2]$ infinitesimal klein ist, sie heißt *Variation* der extremalen Funktion $q_a(t)$.



Die Variation $\delta q_a(t)$ ist so definiert, dass

$$\delta \dot{q}_a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_a(t). \tag{V.4}$$

Eine Variation der Wirkung findet sich dann aus den Prinzipien der mehrdimensionalen Taylorentwicklung wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q_a + \delta q_a, \dot{q}_a + \delta \dot{q}_a, t) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(q_a, \dot{q}_a, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{a=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a \right). \end{aligned}$$

Wobei wir hier lediglich in *linearer* Ordnung der kleinen Variationen δq und $\delta \dot{q}_a$ entwickeln, d.h. wir betrachten die führende Variation der Wirkung S und vernachlässigen Terme zweiter Ordnung in den Variationen. Für die extremale Bahn $q_a(t)$ ist gerade $\delta S = 0$, wie wir das aus der Analysis

gewöhnlicher Funktionen kennen. Mit (V.4) ergibt sich dann durch partielle Integration

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{a=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_a}_{\text{part. Integration}} \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{a=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \right) \delta q_a + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right]_{t=t_1}^{t=t_2}}_{=0,\ \text{da } \delta q_a(t_1) = \delta q_a(t_2) = 0.}
\end{aligned}
$$

Da die Variationsfunktion $\delta q_a(t)$ infinitesimal aber beliebig war, folgt:

$$
\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) = 0.} \tag{V.5}
$$

Dies sind genau die Lagrange-Gleichungen! Das heißt, die Aussagen

$$
S[q] \text{ ist extremal } \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) = 0
$$

sind äquivalent. Wir haben also die Lagrangegleichungen (zweiter Art) aus dem Extremalprinzip der Wirkung abgeleitet. Wir können dieses somit als das grundlegende Axiom der Mechanik einführen.

Bemerkung:
Nun ist unmittelbar klar, dass Addition einer totalen Zeitableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q,t)$ zu L die Bewegungsgleichungen nicht ändert: [Wir schreiben $\{q_a, a = 1, \ldots, f\} = q$]

$$
\begin{aligned}
L'(q, \dot{q}, t) &= L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q,t) \\
\Rightarrow S'[q] &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L'(q, \dot{q}, t) = S[q] + F(q^E, t_2) - F(q^A, t_1).
\end{aligned}
$$

Da $\delta q^A = 0 = \delta q^E$ ist $\delta F(q^{A/E}, t) = 0$ und $\delta S'[q] = \delta S[q]$, so dass identische Bewegungsgleichungen vorliegen.

Euler-Gleichung der Variationsrechnung

Die obige Herleitung der Lagrange-Gleicungen aus der Extremalität der Wirkung lässt sich auch auf Probleme jenseits der Mechanik verallgemeinern. Betrachten wir hierzu das Integral

$$
F[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f\Big(x, y(x), y'(x)\Big)
$$

als Funktional der reellen Funktion $y(x)$ mittels der "Kostenfunktion" f, so wird F bei festgehaltenen $y(x_1)$ und $y(x_2)$ gerade für jene Funktion $y(x)$ extremal, die die *Euler-Gleichung*

$$
\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{V.6}
$$

erfüllt. Man nennt diese Funktion die *Extremale*.

Die Euler-Gleichung der Variationsrechung kann so z.B. für Probleme wie dem kürzesten Weg zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche oder dem Auffinden von Minimalflächen mit vorgegegeben Randbedingungen, bzw. ganz allgemeinen Oprimierungsproblemen, verwandt werden.

V.2 Noether Theorem

In diesem Abschnitt wollen wir den in der Physik zentralen Zusammenhang zwischen Symmetrien der Bewegungsgleichungen und Erhaltungsgrößen ergrarbeiten. Wir hatten dies bereits in vorherigen Kapiteln gleichsam zu Fuss getan, hier folgt nun die theoretische Fundierung, die auf die Mathematikerin und theoretische Physikerin Emmy Noether zurückgeht.

Ausgangspunkt ist die Frage: Wie ändert sich die Wirkung unter *beliebigen* Variationen der Bahnkurve und der Zeit?

$$\boxed{t' = t + \tau(t); \quad q'_a(t') = q_a(t) + \Delta q_a(t)} \tag{V.7}$$

Wobei τ und Δq_a beliebige Funktionen sind, die nicht an den Rändern verschwinden müssen.
Für die Variation von q_a bei fester Zeit $q'_a(t) = q_a(t) + \delta q_a(t)$ finden wir einen Zusammenhang der Variationen δq_a und Δq_a wie folgt:

$$\begin{aligned} q'_a(t') &= q'_a(t + \tau(t)) = q'_a(t) + \tau(t)\dot{q}_a(t) \\ &= q_a(t) + \delta q_a(t) + \tau(t)\dot{q}_a(t) \\ &\overset{!}{=} q_a(t) + \Delta q_a(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta q_a(t) = \Delta q_a(t) - \tau(t)\dot{q}_a(t)} \tag{V.8}$$

Nun berechnen wir die Änderung der Wirkung unter (V.7):

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t'_1}^{t'_2} \mathrm{d}t L'(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') \\ \Delta S &= S' - S \\ t' &= t + \tau(t) \Rightarrow \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t(1 + \dot{\tau}(t)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,(1 + \underset{(3)}{\dot{\tau}})\, L(q'(t+\tau), \dot{q}'(t+\tau), t+\tau) \tag{V.9}$$

Nun ist (stets in linearer Näherung in Variationen)

$$L(q'(t+\tau), \dot{q}'(t+\tau), t+\tau) = L(q'(t), \dot{q}'(t), t) + \tau(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underset{(2)}{L(q'(t), \dot{q}'(t), t)}.$$

Für $\tau(t)$ und δq infinitesimal ergibt sich:

$$\tau(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(q'(t), \dot{q}'(t), t) = \tau(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(q(t), \dot{q}(t), t) + \mathcal{O}(\tau \cdot \delta q).$$

Terme zweiter Ordnung wie $\tau^2, (\delta q)^2, \tau \cdot \delta q$ werden konsistent vernachlässigt. Weiterhin folgt aus (V.8):

$$L(q'(t), \dot{q}'(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \sum_{a=1}^{f} \underset{(1)}{\left(\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}_a}\delta \dot{q}_a \right)}$$

Kombinieren wir alles in (V.9), so folgt:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\sum_{a=1}^{f} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a \right)}_{(1)} + \tau(t) \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(q, \dot{q}, t)}_{(2)} + \underbrace{\dot{\tau} L(q, \dot{q}, t)}_{(3)} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\sum_{a=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \right] \delta q_a + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{a=1}^{f} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a + \tau(t) L(q, \dot{q}, t) \right]\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt den zweiten Term partiell integriert haben:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d}{dt} \delta q_a = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \delta q_a + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right)$$

Ersetzen wir δq_a durch (V.8) und führen die folgenden Bezeichnungsweisen ein:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} =: p_a} \quad \text{Verallgemeinerter Impuls} \tag{V.10}$$

$$\boxed{H := \sum_{a=1}^{f} p_a \dot{q}_a - L} \quad \text{Hamiltonfunktion} \tag{V.11}$$

so folgt für die Variation der Wirkung:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\sum_{a=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \right] \delta q_a + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_a p_a \Delta q_a - H\tau \right].$$

Variieren wir in (V.7) nun gerade die extremale Funktion $q_a(t)$ für die die Lagrangegleichungen erfüllt sind, so ergibt sich:

$$\boxed{\Delta S = \sum_{a=1}^{f} p_a(t) \Delta q_a(t) - H(t)\tau(t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}} \tag{V.12}$$

Für den Fall, dass die Transformation (V.7) $t' = t + \tau(t)$ und $q'(t') = q(t) + \Delta q(t)$ die Wirkung invariant lassen, sie also eine Symmetrietransformation darstellen, so wird diese Gleichung (V.12) zu einem Erhaltungssatz:

$$\boxed{\Delta S = 0 \Rightarrow H(t)\tau(t) - \sum_{a=1}^{f} p_a(t) \Delta q_a(t) = \text{const}} \tag{V.13}$$

Dies ist die einfache Form des Noethertheorems.[3]

Im Allgemeinen könnte der Fall eintreten, dass sich die Wirkung bei einer Variation à la (V.7) um eine totale Zeitableitung ändert:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q, t).$$

Dann wären die Bewegungsgleichungen immer noch invariant und wir haben weiterhin einer Symmetrie des Systems vorliegen. Es folgt also die allgemeine Form des Noethertheorems:

[3] (Emmy Noether, Deutschland/USA, 1882 - 1935)

Sei $t' = t + \tau(t)$, $q'_a(t') = q_a(t) + \Delta q_a(t)$ mit $a = 1, ..., f$ eine Symmetrie der Wirkung, d.h. es gelte

$$\Delta S = S' - S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q,t)$$

dann existiert eine assoziierte Erhaltungsgröße:

$$\boxed{H(t)\tau(t) - \sum_{a=1}^{f} p_a(t)\Delta q_a(t) + F(t) = \text{const}} \tag{V.14}$$

Dies ist der von Emmy Noether erkannte zentrale Zusammenhang zwischen der Symmetrie der Wirkung und der Existenz einer dazugehörigen Erhaltungsgröße.

Beispiele:

1. Impuls
$$t' = t\,, \quad \text{d.h. } \tau(t) = 0 \qquad q'_a = q_a + a_a, \quad \text{d.h. } \Delta q_a = a_a = \text{const}\,.$$
Falls $L(q'_a, \dot{q}'_a, t) = L(q_a, \dot{q}_a, t)$ gilt, ist
$$P = \sum_{a=1}^{f} p_a(t) a_a = \text{const}$$
Können alle a_a unabhängig voneinander gewählt werden, so ist jedes individuelle p_a erhalten.
   - Zyklische Variable:
     $a_a \neq 0$ nur für manche $a \in I \Rightarrow p_a =$const für $a \in I$.
   - Gesamtimpuls:
     Ist Symmetrie nur gegeben, falls alle a_a identisch sind, so ist nur der Gesamtimpuls
     $$P = \sum_{a=1}^{f} p_a(t) = \text{const.}$$
     erhalten.t

2. Energie
Hängt $L(q, \dot{q})$ nicht explizit von der Zeit ab, so ist L invariant unter Zeittranslation:
$$t' = t + \tau \qquad q'_a(t') = q_a(t) \Rightarrow \Delta q_a = 0$$
$\Rightarrow H(t)\tau(t) =$const, da τ beliebig:
$$\boxed{H(t) = \sum_{a=1}^{f} p_a \dot{q}_a - L(q, \dot{q}) = \text{const}}\,. \tag{V.15}$$
Wir sehen, dass $H(t) = E \Rightarrow$ Die Hamiltonfunktion ausgewertet auf der Bahnkurve ist gerade die Energie.

Test: Sei $L = \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{q}_a^2 - V(q_a)$, dann ist:
$$H = \sum_a \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}}_{m_a \dot{q}_a} \dot{q}_a - \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{q}_a^2 + V(q_a) = \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{q}_a^2 + V(q_a).$$

3. Schwerpunktsatz
   Betrachten nun die eigentliche Galileitransformation

$$t' = t, \text{d.h. } \tau = 0\,, \qquad \vec{x}_i' = \vec{x}_i + \Delta\vec{v}\cdot t\,, \quad \text{d.h. } \Delta\vec{x}_i = \Delta\vec{v}\cdot t$$

   $|\Delta\vec{v}|$ sei infinitesimal und zeitlich konstant. Wir betrachten zunächst die resultierende Variation der kinetischen Energie (und nehmen wie immer nur lineare Variationen mit)

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{x}}_i')^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{x}}_i^2) + 2\Delta\vec{v}\cdot\dot{\vec{x}}_i) \\ &= T + \Delta\vec{v}\cdot\sum_i m_i\dot{\vec{x}}_i = T + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Delta\vec{v}\cdot\sum_i m_i\vec{x}_i\right) \end{aligned}$$

   Das heißt: T ändert sich um eine totale Zeitableitung. Wenn nun das Potential translationsinvariant ist, etwa nur von Abständen $(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2$ abhängt, so folgt nach dem Noethertheorem die Erhaltungsgröße:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{x}}_i\cdot\Delta\vec{v}\,t + \Delta\vec{v}\cdot\sum_i m_i\vec{x}_i &= \text{const} \\ \Rightarrow \qquad -\Delta\vec{v}\cdot(\vec{P}\,t - M\vec{R}) &= \text{const}, \end{aligned}$$

   wobei $\vec{R}$ den Schwerpunkt und $\vec{P}$ den Gesamtimpuls des Vielteilchenssystems beschreibt. Da die infintesimale Transformationsgeschwindigleit $\Delta\vec{v}$ beliebig ist, folgt der Schwerpunktsatz

$$M\vec{R} - \vec{P}\,t = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{R}(t) = \frac{1}{M}\,\vec{P}\,t + \vec{R}(t=0)\,, \qquad \vec{P} = \text{const}$$

V.3 Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

Die Lagrange-Gleichungen eines Systems von f Freiheitsgraden liegen als ein System von f gewöhnlichen Differentialgleichungen *zweiter Ordnung in der Zeit* vor. In der nun zu diskutierenden Hamilton'schen Formulierung der Dynamik eines mechanischen Systems wird die Bewegung durch ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem *erster Ordnung in der Zeit* für $2f$ Variablen bestehend aus $2f$ gekoppelten Gleichungen beschrieben. Der Übergang von der Lagrange'schen Formulierung des Systems zu der sogenannten Hamilton'schen Formulierung erfolgt mittels einer sogenannten Legendretransformation [4].

Wir beginnen mit der Lagrangefunktion in den verallgemeinerten Koordinaten q_a

$$L(q,\dot{q},t) = L(q_1,\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f,t)$$

und erhalten die verallgmeinerten oder kanonisch konjugierten Impulse zu den q_a:

$$p_a = \frac{\partial L(q_1\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots\dot{q}_f,t)}{\partial\dot{a}_a} \tag{V.16}$$

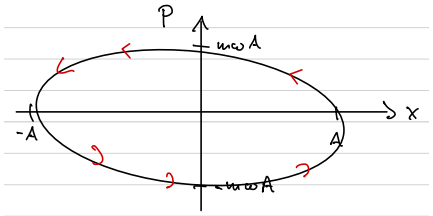
Wir wollen nun das System nicht mehr im f-dimensionalen Konfigurationsraum $\{q_1,\ldots,q_f\}$ sondern im $2f$-dimensionalen Phasenraum $\{q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots,p_f\}$ beschreiben. In der Tat ist der Zustand eines Systems durch einen Punkt im Phasenraum vollständig beschrieben. Die zeitliche Änderung des Systems ist eine Trajektorie (Bahnkurve) im Phasenraum.

[4] (Adrien Marie Legendre, Frankreich, 1752-1833)

Beispiel:

Harmonischer Oszillator

$$q = q_0 \sin \omega t\,, \qquad p = m\omega q_0 \cos \omega t$$



Wir wollen nun die f Gleichungen (V.16) nach den $\dot{q}_a$ auflösen, hierzu müssen wir verlangen, dass

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a\, \dot{q}_b} \neq 0 \tag{V.17}$$

gilt. Dies garantiert zumindest lokal die Invertierung von (V.16). Dann können wir aus (V.16)

$$\dot{q}_a = \dot{q}_a(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t) \tag{V.18}$$

durch Auflösung finden. Wir betrachten nun die *Hamiltonfunktion* als Funktion der Koordinaten und kanonischen Impulse:

$$\boxed{H(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t) := \sum_{a=1}^{f} \Big\{ p_a\, \dot{q}_a - L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) \Big\}\Big|_{\dot{q}_a = \dot{q}_a(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)}} \tag{V.19}$$

Im letzten Kapitel hatten wir gesehen, dass $H(t)$ im Konfigurationsraum ausgewertet für jene $q_a(t)$ & $\dot{q}_a(t)$, die die Lagrangegleichungen erfüllen, gerade die Energie des Systems ist. Nun zeigen wir, dass $H(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$ mit zunächst unbestimmten q_a und p_q die gesamte Dynamik des Systems im Phasenraum bestimmt. Dazu seien nun die Bahnkurven $q_a(t)$ und $p_a(t)$ zunächst unbekannt. Wir betrachten die Hamiltonfunktion als Funktion auf dem Phasenraum.

Zuerst leiten wir partiell nach den Impulsen ab

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_a} = \dot{q}_a + \sum_{b=1}^{f} p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{\overset{(V.16)}{=} p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} = \dot{q}_a\,. \tag{V.20}$$

Und dann nach den Koordinaten:

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_a} = \sum_{b=1}^{f} p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} - \sum_{b=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{\overset{(V.16)}{=} p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} = -\frac{\partial L}{\partial q_a}\,, \tag{V.21}$$

nun ist aufgrund der Lagrangegleichung $\dfrac{\partial L}{\partial q_a} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = \dot{p}_a$, so dass

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_a} = -\dot{p}_a \tag{V.22}$$

folgt. Damit haben wir die *Hamilton*'schen Bewegungsgleichungen gefunden

$$\boxed{\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_a} = \dot{q}_a\,, \qquad \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_a} = -\dot{p}_a\,, \qquad a = 1,\ldots,f\,.} \tag{V.23}$$

Dies ist eine System von $2f$ gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung in t.

Für die totale Zeitableitung der Hamiltonfunktion gilt:

$$\frac{d}{dt}H(q,p,t) = \sum_{b=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_b}\,\dot{q}_b + \frac{\partial H}{\partial p_b}\,\dot{p}_b\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{V.24}$$

Gelten die Hamilton-Gleichungen, d.h. befindet sich unser System auf den Phasenraumtrajektorien, so verschwindet der Term in der Klammer und es folgt

$$\boxed{\frac{d}{dt}H(q,p,t) = \frac{\partial}{\partial t}H(q,p,t)} \tag{V.25}$$

D.h. hängt H nicht *explizit* von der Zeit ab und sind die $q_a(t)$ und $p_a(t)$ in H gerade L osungen der Hmailton'schen Gleichungen, so ist H erhalten: Wir können es mit der Energie identifizieren.

Die Umkehrung, dass aus den Hamilton-Gleichungen die Lagrange-Gleichungen folgen, ist auch richtig. Hierzu starten wir von $H(q,p,t)$ und finden aus der Relation

$$\dot{q}_a(q,p,t) = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_a} \tag{V.26}$$

durch Auflösen $p_a = p_a(q,\dot{q},t)$. Nun machen wir wiederum eine Legendre-Transformation $H \to L$ mit $p \to \dot{q}$

$$\begin{aligned} L(q,\dot{q},t) &= \sum_{b=1}^{f} p_b\,\dot{q}_b - H(q,p,t) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} &= p_a + \sum_{b=1}^{f}\dot{q}_b\,\frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} - \sum_{b=1}^{f}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_b}}_{\overset{(V.23)}{=}\dot{q}_b}\,\frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} = p_a \end{aligned} \tag{V.27}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = \sum_{b=1}^{f}\frac{\partial p_b}{\partial q_a}\,\dot{q}_b - \frac{\partial H}{\partial q_a} - \sum_{b=1}^{f}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_b}}_{\overset{(V.23)}{=}\dot{q}_b}\,\frac{\partial p_b}{\partial q_a} = -\frac{\partial H}{\partial q_a} \tag{V.28}$$

Nun ist aber nach (V.23) gerade $-\dfrac{\partial H}{\partial q_a} = \dot{p}_a = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)$, so dass in der Tat die *Lagrange-Gleichungen* folgen:

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)$$

D.h. wir haben nun gezeigt, dass die drei Formulierungen der Mechanik: Newton'sche Grundgleichungen, Lagrangegleichungen und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (V.23) äquivalent sind.

Beispiel:

$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$

- Impuls: $p_a = \frac{\partial L}{\partial x_a} = m\,\dot{x}_a$, Inversion $\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}}{m}$, Lagrange Funktion dann $L = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V(\vec{x})$
- Hamiltonfunktion: $H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$
- Hamilton'sche Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{p_a}{m} = \dot{x}_a\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial x_a} = \frac{\partial V}{\partial x_a} = -\dot{p}_a\,, \tag{V.29}$$

V.4 Legendre Transformation

Was ist nun genau eine Legendre Transformation? Dies ist ein wichtiges Verfahren für Variablentransformationen in der Theoretischen Physik.

Sei $f = f(x)$ mit dem Differential $df = \frac{df}{dx}\,dx =: u(x)\,dx$.

<u>Gesucht:</u> Funktion $g = g(u)$ mit der Eigenschaft $\frac{dg}{du} = x$.

<u>Lösung:</u> $df = u\,dx = d(ux) - x\,du$

$$\Rightarrow \quad d(f - u\,x) = -x\,du \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{du}\,(f - u\,x) = -x \tag{V.30}$$

Somit lautet die gesuchte Funktion g

$$g(u) = u\,x(u) - f[x(u)]$$

wobei $x = x(u)$ aus der Invertierung von $u = \frac{df}{dx}$ folgt.

V.5 Routh'sche Funktion

Manchmal ist es zweckmäßig den Übergang von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_a$ zu den Impulsen p_a nicht in allen Variablen duchzuführen, sondern dies nur für einen Teil der $\dot{q}_a$ zu tun. Wir haben dann eine hybride Situation vorliegen, die sozusagen zwischen der Lagrange-Mechaniik und der Hamilton-Mechanik liegt und als Routh'sche Mechanik bekannt ist[5]. Der notationsmäßigen Einfachheit halber nehmen wir an, dass in unserem System nur zwei Freiheitsgrade vorhanden sind, beschrieben durch die verallgemeinerten Koordinaten q und ξ. Wir wollen nun eine Legendre-Transformation von $\{q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}\}$ nach $\{q, \xi, p, \dot{\xi}\}$ durchführen, d.h. ξ verbleibt im Konfigurationsraum aber (q, p) nicht.

Das Differential der Lagrange-Funktion $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ lautet (hier der Einfachheit halber als explizit zeitunabhängig angenommen):

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q}\,dq + \frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\,d\dot{\xi} \\ &= \dot{p}\,dq + p\,d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\,d\dot{\xi}\,, \end{aligned}$$

[5] (Edward John Routh, England, 1831-1907)

woraus sich ergibt

$$d(L - p\,\dot{q}) = \dot{p}\,dq - \dot{q}\,dp + \frac{\partial L}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\,d\dot{\xi}\,.$$

Einführung der *Routh'schen Funktion*

$$\boxed{R(q,p,\xi,\dot{\xi}) = p\,\dot{q}(q,p,\xi,\dot{\xi}) - L(q,\dot{q}(q,p,\xi,\dot{\xi}),\xi,\dot{\xi})} \tag{V.31}$$

wobei die Geschwindigkeit $\dot{q}$ durch p, $\dot{\xi}$, ξ und q mittels Auflösung von $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ nach $\dot{q}$ auszudrücken ist. Es folgen die Gleichungen

$$\boxed{\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}\,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q}\,,} \tag{V.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}\,.$$

Setzen wir die letzten beiden Gleichungen in die Lagrange Gleichungen für ξ ein, so folgt

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial \xi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}\right).} \tag{V.33}$$

D.h. die Routh'sche Funktion ist Hamiltonfunktion bezüglich q und p *sowie* Lagrangefunktion bezüglich ξ und $\dot{\xi}$. Die Verwendung der Routh'schen Funktion ist zweckmäßig, wenn zyklische Variable auftreten. Für eine zyklische Variable q ist der kanonisch konjugierte Impuls p eine Erhaltungsgröße und wir haben

$$R = R(p,\xi,\dot{\xi}) \qquad \text{mit} \quad p = \text{const.}$$

Dann sind in den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \xi} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}}$$

die zyklischen Variablen vollständig eliminiert.

V.6 Poisson'sche Klammern

Für eine beliebige Funktion $f(q,p,t)$ der Koordinaten, der Impulse und der Zeit ist die totale Zeitableitung gegeben durch

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{a=1}^{f}\left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\,\dot{q}_a + \frac{\partial f}{\partial p_a}\,\dot{p}_a\right)$$

Die Verwendung der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (V.23) liefert uns dann

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{a=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial p_a}\,\frac{\partial f}{\partial q_a} - \frac{\partial H}{\partial q_a}\,\frac{\partial f}{\partial p_a}\right)\,,$$

was wir unter Einführung der *Poissonklammern* zwischen zwei Phasenraumfunktionen $g = g(q_a,p_a;t)$ und $f = f(q_a,p_a;t)$ definiert als[6]

$$\boxed{\{g,f\} := \sum_{a=1}^{f}\left(\frac{\partial g}{\partial p_a}\,\frac{\partial f}{\partial q_a} - \frac{\partial g}{\partial q_a}\,\frac{\partial f}{\partial p_a}\right)} \tag{V.34}$$

[6] (Siméon Denis Poisson, Frankreich, 1781-1840)

elegant und kompakt schreiben können als

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}\,.} \tag{V.35}$$

Achtung: In der Literatur findet man kein einheitliches Vorzeichen in der Definition der Poissonklammern, so gibt es auch die alternative Version $\{g, f\}' := \sum_{a=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_a} \frac{\partial f}{\partial p_a} - \frac{\partial g}{\partial p_a} \frac{\partial f}{\partial q_a} \right) = -\{g, f\}$.

Für Erhaltungsgrößen $F(q, p, t)$ gilt demnach $\frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0$. Ist die Erhaltungsgröße explizit zeitunabhängig, so ist einfach

$$\{H, F\} = 0\,. \tag{V.36}$$

D.h. die Poissonklammer einer Erhaltungsgröße mir der Hamiltonfunktion verschwindet, wenn diese explizit zeitunabhägig ist. Man sagt auch, dass F mit H "poissonkommutiert". Letzteres, da die Poissonklammer vielerlei parallelen zu dem Kommutator zweier Matrizen aufweist.

Eigenschaften der Poissonklammern

i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (Anti-symmetrie)

ii) $\{c_1\, f_1 + c_2\, f_2\,,\, g\} = c_1\, \{f_1, g\} + c_2\, \{f_2, g\}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (Linearität)

iii) $\{f_1\, f_2\,,\, g\} = f_1\, \{f_2, g\} + \{f_1, g\}\, f_2$ (Produktregel)

iv) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (Jacobi-Identität)[7]

Diese Eigenschaften zeigt man durch explizites Ausrechnen unter Verwendung der Ableitungsregeln. Insbesondere ist die Jacobi-Identität eine sehr nützliche Relation, wie wir im Folgenden sehen werde. Wir bemerken nebenbei auch, dass diese Eigenschaften ebenso für den Kommutator von Matrizen gelten würden.

Ist nun eine der Funktionen in der Poissonklammer Ort oder Impuls, so reduzieren sich die Klammern auf die partielle Ableitungen:

$$\{f(p_b), q_a\} = \frac{\partial f(p_b)}{\partial p_a}\,, \qquad \{f(q_b), p_a\} = -\frac{\partial f(q_b)}{\partial q_a}\,.$$

Insbesondere gilt

$$\{q_a, q_b\} = 0 \qquad \{p_a, p_b\} = 0 \qquad \{p_a, q_b\} = \delta_{ab} \tag{V.37}$$

und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten einfach und kompakt

$$\boxed{\dot{p}_a = \{H, p_a\} \qquad \dot{q}_a = \{H, q_a\} \qquad a = 1, \ldots, f} \tag{V.38}$$

Vergleiche hierzu (V.35).

Poisson'sches Theorem

Die Poissonklammer zweier Erhaltungsgrößen ist wiederum eine Erhaltungsgröße:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{F} = 0 \\ \dot{G} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \{F, G\} = \text{const}\,.$$

Beweis: Sehr einfach für zeitunabhängige F & G: Aus $\{H, F\} = 0$ und $\{H, G\} = 0$ folgt mittels Jacobi-Identität

$$\{H, \{F, G\}\} = -\{F, \underbrace{\{G, H\}}_{=0}\} - \{G, \underbrace{\{H, F\}}_{=0}\} = 0$$

[7] (Carl Gustav Jacobi, Deutschland, 1804-1851)

und somit $\frac{d}{dt}\{F,G\} = 0$. Den allgemeinen, zeitabhängigen Fall überlassen wir den Übungen.

Die Anwendung des Poisson'schen Theorems liefert natürlich nicht immer eine neue Erhaltungsgröße (diese sind ja auch in der Zahl nach oben mit $2f-1$ beschränkt). Die Poissonklammer zweier Erhaltungsgrößen kann verschwinden oder auf eine bereits bekannte Erhaltungsgröße führen.

Ein Beispiel ist der Drehimpuls $L^i = \epsilon^{ijk} x_j p_k$ für den $\frac{d}{dt}L^i = 0$ gelten möge. Dann berechnet man

$$\begin{aligned}\{L^1, L^2\} &= \{x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3\} = \{x_2p_3, x_3p_1\} + \{x_3p_2, x_1p_3\} - \{x_3p_2, x_3p_1\} - \{x_2p_3, x_1p_3\} \\ &= x_2 \underbrace{\{p_3, x_3\}}_{=1} p_1 + p_2 \underbrace{\{x_3, p_3\}}_{=-1} x_1 - 0 - 0 = x_2\, p_1 - p_2\, x_1 = -L^3\end{aligned}$$

D.h. wir lernen: Die Erhaltung von L^1 und L^2 impliziert stets auch die Erhaltung auch von L^3! Es kann also entweder nur eine Komponente oder alle Komponenten des Drehimpulses erhalten sein.

$$\Rightarrow \qquad \{L^i, L^j\} = -\epsilon^{ijk}\, L^k\,.$$

V.7 Die Hamilton'schen Gleichungen als Variationsgleichungen

Die Hamilton'schen Gleichungen können ebenfalls aus der Extremalität der Wirkung S hergeleitet werden.

$$\text{Lagrange-Funktion} \qquad L = \sum_{a=1}^{f} p_a \frac{dq_a}{dt} - H$$

$$\text{Wirkung} \qquad \boxed{S = \int dt\, L = \int \Big\{ \sum_{a=1}^{f} p_a\, dq_a - H\, dt \Big\}} \tag{V.39}$$

Im Folgenden nehmen wir die Koordinaten und Impulse als unabhängige Größen und betrachten die Variation

$$\begin{aligned} q'_a(t) &= q_a(t) + \delta q_a(t) \qquad \text{mit} \quad \delta q_a(t_1) = 0 = \delta q_a(t_2) \\ p'_a(t) &= p_a(t) + \delta p_a(t) \end{aligned} \tag{V.40}$$

Es folgt für die Variation der Wirkung:

$$\delta S = S' - S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \{\, \delta p_a\, dq_a + p_a\, d(\delta q_a) - \frac{\partial H}{\partial q_a}\, \delta q_a\, dt - \frac{\partial H}{\partial p_a}\, \delta p_a\, dt \,\}$$

Eine partielle Integration im zweiten Term, $p_a\, d(\delta q_a) = d(p_a\, \delta q_a) - dp_a\, \delta q_a$, liefert dann

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \Big\{ (dq_a - \frac{\partial H}{\partial p_a} dt)\, \delta p_a + (-dp_a - \frac{\partial H}{\partial q_a} dt)\, \delta q_a \Big\} + \sum_a p_a\, \delta q_a \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Der letzte Term verschwindet aufgrund der Randbedingungen (V.40). Für ein Extremum von S muss nun wiederum gelten $\delta S = 0$. Da die Variationen $\delta q_a(t)$ und $\delta p_a(t)$ im Integrationsbereich $[t_1, t_2]$ beliebige Funktionen sind folgern wir

$$dq_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}\, dt\,, \qquad dp_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}\, dt\,.$$

Nach Division durch dt folgen die Hamilton-Gleichungen, die somit ebenso aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgen.

V.8 Kanonische Transformationen

Die Wahl der verallgemeinerten Koordinaten q_a ist durch keinerlei Bedingungen eingeschränkt. Hierin liegt die Stärke der Lagrange'schen Formulierung der Mechanik, die der Newton'schen Formulierung überlegen ist, da die Lagrange-Gleichungen forminvariant unter *beliebigen* Koordinatentransformationen (auch Punkttransformationen genannt) $q_a \to Q_a$ sind:

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \quad \Rightarrow \quad \text{“Punkttransformation”} \quad \boxed{Q_a = Q_a(q_1, \ldots, q_f, t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial Q_a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_a}$$

Natürlich behalten auch die Hamilton'schen Gleichungen unter einer solchen Punkttransformation ihre Form. Die Hamilton'sche Formulierung der Mechanik erlaubt jedoch eine wesentlich größere Klasse von Transformationen, die die verallgemeinerten Koordinaten q_a *und* die konjugierten Impulse p_a umfassen: Wir betrachten nun Transformationen auf dem Phasenraum.

$$\text{“Phasenraumtransformation”} \quad \boxed{Q_a = Q_a(q,p,t)\,, \qquad P_a = P_a(q,p,t)\,, \quad a = 1, \ldots, f\,.} \tag{V.41}$$

Diese sollten natürlich invertierbar sein, um eine eindeutige Abbildung zu haben. D.h wir nehmen an, dass (V.41) eindeutig auch die Rücktransformationen

$$q_a = q_a(Q,P,t)\,, \qquad p_a = p_a(Q,P,t)$$

bestimmt (wir schreiben wiederum kompakt $Q = \{Q_1, \ldots, Q_f\}$ usw.). Solche *beliebigen* Phasenraumtransformationen werden jedoch nicht immer die Hamilton-Gleichungen forminvariant lassen. Wir wollen deshalb verstehen, welche Bedingungen an die Phasenraumtransformationen zu stellen sind, um die Forminvarianz der Hamilton'schen Gleichungen zu garantieren.

Deshalb fordern wir nun, dass die Phasenraumtransformationen die Eigenschaft besitzen:

$$\begin{array}{ccc} \dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a} & & \dot{Q}_a = \frac{\partial H'}{\partial P_a} \\ & \Rightarrow \text{spez. Phasenraumtransformation} \Rightarrow & \\ \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} & & \dot{P}_a = -\frac{\partial H'}{\partial Q_a} \\ & H \Rightarrow H' & \end{array} \tag{V.42}$$

Phasenraumtransformationen, die dies erfüllen nennen wir *Kanonische Transformationen.*

Da die Hamilton-Gleichungen aus dem Extremalprinzip der Wirkung herrühren und sich die Lagrange-Gleichungen unter einer Punkttransformation lediglich um eine totale Zeitableitung ändern können, schliessen wir, dass für eine kanonische Transformation gelten sollte (vergleiche (V.39)):

$$\sum_{a=1}^{f} p_a\,\dot{q}_a - H = \sum_{a=1}^{f} P_a\,\dot{Q}_a - H' + \frac{dF}{dt} \tag{V.43}$$

Jede kanonische Transformation ist somit durch eine Funktion F definiert, die wir *Erzeugende der Transformation* nennen. Für das Differential der Erzeugenden gilt dann

$$\boxed{dF = \sum_{a=1}^{f} p_a\,dq_a - \sum_{a=1}^{f} P_a\,dQ_a + (H' - H)\,dt} \tag{V.44}$$

Dies ist die zentrale Relation für die kanonischen Transformationen. Wir sehen aus (V.44), dass für die Wahl einer Erzeugenden F als Funktion der alten und der neuen Koordinaten sowie der Zeit,

$F = F_1(q, Q, t)$ sich aus (V.44) die Beziehungen ergiben

$$p_a = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_a}\,, \tag{V.45}$$

$$P_a = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_a}\,, \tag{V.46}$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,. \tag{V.47}$$

Ein sinnvolles $F_1(q, Q, t)$ erlaubt nun (V.45) nach Q_a aufzulösen, so dass wir die Transformation zu den neuen Koordinaten $Q_a = Q_a(q, p, t)$ erhalten. Weiterhin setzen wir dies in (V.46) ein und finden $P_a = P_q(q, p, t)$. Die neue Hamiltonfunktion H' schließlich folgt dann aus (V.47)

$$\boxed{H'(Q, P, t) = H[q(Q, P, t), p(Q, P, t), t] + \frac{\partial F_1[q(Q, P, t), Q, t]}{\partial t}} \tag{V.48}$$

wobei die $q(Q, P, t)$ und $p(Q, P, t)$ aus der Invertierung der Transformation stammen.

Beispiel:

Sei $F_1(q, Q) = \sum_a q_a\, Q_a$, dann ergibt sich aus (V.45), (V.46) und (V.47)

$$p_a = Q_a\,, \qquad P_a = -q_a\,, \qquad H' = H\,.$$

D.h. wir haben eine Vertauschung von Impulsen und Koordinaten!

$$\text{z.B.} \qquad H = \frac{p^2}{2m} - mg\,q$$
$$H' = \frac{Q^2}{2m} + mg\,P$$

Wir sehen, dass unter kanonischen Transformationen die ursprüngliche Bedeutung der Begriffe der Koordinate und des Impuls aufgelöst wird, beide sind nun völlig ebenbürtig. So muss insbesondere ein Q_a gar nichts mehr mit einer Position im physikalischen Raum zu tun haben!

Es gibt weitere Wahlmöglichkeiten für die erzeugende Funktion. Wollen wir diese als Funktion von q_a, P_a und t vorgeben, so schreiben wir das zentrale Differential (V.44) mittels einer Legendre-Transformation um als

$$d(F + \sum_a P_a\, Q_a) = \sum_a p_a\, dq_a + \sum_a Q_a\, dP_a + (H - H')\, dt$$

Definieren wir nun $F_2(q, P, t) := F + \sum_a P_a\, Q_a$ so folgt

$$\boxed{p_a = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_a}\,, \qquad Q_a = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_a}\,, \qquad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}} \tag{V.49}$$

Wiederum stellen wir die erste Beziehung um, um $P_a = P_a(q, p, t)$ zu etablieren. Einsetzen in die zweite Relation liefert dann $Q_a = Q_a(q, P(q, p, t), t)$ und schließlich $H' = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$.

Dieses Schema lässt sich für die weiteren möglichen erzeugenden Funktionen $F_3(p,Q,t)$ und $F_4(p,P,t)$ wiederholen. Dann findet man

$$q_a = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p_a}\,, \quad P_a = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q_a}\,, \tag{V.50}$$

bzw.

$$q_a = -\frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_a}\,, \quad Q_a = \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_a}\,, \tag{V.51}$$

$$\text{und stets} \qquad H' = H + \frac{\partial F_{3/4}}{\partial t}\,. \tag{V.52}$$

Beispiel:

i) <u>Identische Transformation:</u> Wir wählen $F_2(q,P,t) = \sum_a q_a\,P_a$ und finden

$$p_a = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_a} = P_a \qquad Q_a = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial p_a} = q_a \qquad H' = H$$

ii) <u>Infintitesimale Transformation:</u> Nun nehmen wir $F_2(q,P,t) = \sum_a q_a\,P_a + \epsilon\,G(q,P,t)$ woraus folgt

$$p_a = P_a + \epsilon\,\frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q_a} \qquad Q_a = q_a + \epsilon\,\frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P_a} \qquad H' = H + \epsilon\,\frac{\partial G(q,P,t)}{\partial t}\,.$$

Unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung ϵ^2 ergibt sich hieraus

$$Q_a = q_a + \epsilon\,\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_a}\,, \qquad P_a = p_a - \epsilon\,\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q_a}\,, \quad H' = H + \epsilon\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial t}\,.$$

Die <u>infinitesimale kanonische Transformationen</u> lassen sich dann mithilfe der Poissonklammern elegant schreiben als

$$\boxed{\delta q_a = Q_a - q_a = \epsilon\,\{G, q_a\}\,, \qquad \delta p_a = P_a - p_a = \epsilon\,\{G, p_a\}\,, \qquad \delta H = H' - H = \epsilon\,\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial t}\,,} \tag{V.53}$$

mit der Erzeugenden $G(q,p,t)$.

V.9 Hamilton-Jacobi-Theorie

Es gibt in der Tat noch eine weitere Möglichkeit die analytische Mechanik zu formulieren, die neben dem Lagrange-, Hamilton- und Routh-Formalismus existiert. Die nun vorzustellende Hamilton-Jacobi Theorie ist die vielleicht theoretisch versierteste: Sie nutzt die Macht der kanonischen Transformationen geschickt aus.

Idee:

Finde genau jene kanonische Transformation für die sich die Dynamik trivialisiert, dass heisst die *neue* Hamilton-Funktion soll verschwinden, $H' = 0$. Dann ist $Q_a = \text{const}$ und $P_a = \text{const}$ und somit das dynamische Bewegungsproblem gelöst. Wir verlagern also das Problem der Lösung der Bewegungsgleichungen auf das Auffinden einer sehr speziellen kanonischen Transformation.

Ansatz:

Wir wollen eine erzeugende Funktion $F_2(q, P, t)$ finden mit der Eigenschaft

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0\,. \tag{V.54}$$

Es gilt aber nach (V.49) gerade $p_a = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_a}$, $Q_a = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_a}$, so dass wir (V.54) auffassen müssen als

$$\boxed{H\Big(q_a, p_a = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_a}, t\Big) + \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t} = 0} \tag{V.55}$$

Da die P_a konstant sind, setzen wir $P_a = \alpha_a$ mit $a = 1, \ldots, f$. und schreiben

$$F_2 = S(q_1, \ldots, q_f; \alpha_1, \ldots, \alpha_f; t) + \alpha_{f+1}$$

Dann ergibt sich (V.55) zu

$$\boxed{H\left(q_a, \frac{\partial S}{\partial q_a}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \tag{V.56}$$

Dies ist die *Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung*: Eine partielle DGL erster Ordnung in den Variablen $\{q_a, t\}$. Löst man (V.56) für $S(q_1, \ldots, q_f, t; \alpha_1, \ldots, \alpha_f)$, so folgt aus der Konstanz der neuen Koordinaten Q_a, dass

$$\boxed{Q_a = \frac{\partial S(q_1, \ldots, q_f, t; \alpha_1, \ldots, \alpha_f)}{\partial \alpha_a} = \beta_a = \text{const} \qquad a = 1, \ldots, f\,.} \tag{V.57}$$

Die Auflösung dieser Relation nach q_a ergibt dann die gesuchte Bahnkurve

$$\text{(V.57)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_a = q_a(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_f, \beta_1, \ldots, \beta_f)}$$

die von insgesamt $2f$ Integrationskonstanten abhängt, wie es sein muss. D.h. das Bewegungsproblem ist gelöst!

Beispiel:

Das freie Teilchen: $H = \frac{p^2}{2m}$

- Hamilton-Jacobi-Gleichung: $\dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\partial S(q,t)}{\partial q}\right)^2 + \dfrac{\partial S(q,t)}{\partial t} = 0$
- Separationsansatz: $S(q,t) = W(q) - E\,t$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 = E \quad \Rightarrow \quad dW = \sqrt{2mE}\,dq \quad \Rightarrow \quad W(q) = \sqrt{2mE}\,q + \alpha_2$$

- Wir setzen $\alpha_1 = E$ und haben weiterhin:

$$\beta_1 = \frac{\partial S(q,t;\alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{2mE}{}q - E\,t\right) = \sqrt{\frac{m}{2E}}\,q - t$$

- Nach q aufgelöst folgt die (bekannte) Lösung einer gleichförmigen Bewegung

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,(t + \beta_1) = v_0\,t + q_0 \qquad \text{mit} \quad q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}\beta_1\,, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,.$$

Bemerkungen

- Der obige Seperationsansatz $S(q,t) = W(q) - E\,t$ funktioniert immer, wenn H nicht explizit zeitabhängig ist.
- In der Tat kann die Funktion $S(q,t)$ in der Hamilton-Jacobi-Gleichung mit der Wirkung identifiziert werden: Bilden wir die totale Zeitableitung dieser Größe so folgt

$$\frac{dS(q,t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial S}{\partial q_a}\,\dot{q}_a = -H + \sum_a p_a\,\dot{q}_a = L$$

  D.h. $S(q,t) = \int_0^t dt'\,L[q,t]$, wobei man S hier abhängig macht von der Konfiguration $q(t)$ and der Obergrenze des Integrals.

V.10 Invarianzeigenschaften

Für eine kanonische Transformation $p_a, q_a \to P_a, Q_a$ gelten die folgenden Invarianzeigenschaften:

i) Forminvarianz der Hamiltongleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q}_a &= \tfrac{\partial H}{\partial p_a} & & \dot{Q}_a = \tfrac{\partial H'}{\partial P_a} \\ & & \Rightarrow & \\ \dot{p}_a &= -\tfrac{\partial H}{\partial q_a} & & \dot{P}_a = -\tfrac{\partial H'}{\partial Q_a} \end{aligned}$$

$$H \Rightarrow H' \tag{V.58}$$

ii) Invarianz der Poissonklammern (ohne Beweis)

$$\{f,g\}_{p,q} = \{f,g\}_{P,Q}$$

$$\sum_a \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q_a} - \frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a} = \sum_a \frac{\partial f}{\partial P_a}\frac{\partial g}{\partial Q_a} - \frac{\partial f}{\partial Q_a}\frac{\partial g}{\partial P_a}$$

Insbesondere gilt

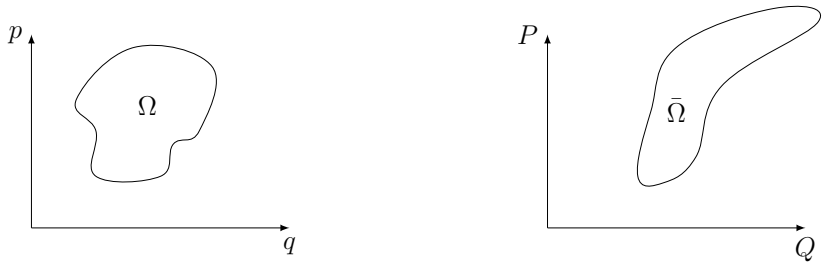
$$\boxed{\{p_a, q_b\}_{p,q} = \delta_{ab}\,, \qquad \{P_a, Q_b\}_{p,q} = \delta_{ab}\,,} \tag{V.59}$$

sowie

$$\{q_a, q_b\}_{p,q} = \{Q_a, Q_b\}_{p,q} = \{p_a, p_b\}_{p,q} = \{P_a, P_b\}_{p,q} = 0\,.$$

Erfüllt eine Transformation die Beziehungen (V.59), so lässt sich zeigen, dass es eine *kanonische Transformation* ist, d.h. (V.58) gilt und die Hamilton-Gleichungen sind forminvariant unter der Transformation.

iii) Liouville Theorem
Aussage: Das Phasenraumvolumen ist unter kanonischen Transformationen invariant.



$$\mathrm{Vol}\Omega = \mathrm{Vol}\bar{\Omega}$$

$$\int_{\Omega} \prod_a dp_a \, dq_a = \int_{\bar{\Omega}} \prod_a dP_a \, dQ_a \qquad \text{mit} \quad |D| = 1$$

Dies ist Ausgangspunkt statistischer Überlegungen: Für ein Ensemble von Teilchen, die einen Bereich der Phasenraums bevölkern, ändert sich das eingenommene Volumen unter der zeitlichen Entwicklung nicht, da die dynamische Entwicklung gemäß der Hamilton-Jacobi-Theorie als kanonische Transformation verstanden werden kann.

VI Die Spezielle Relativitätstheorie

Wir hatten in Kapitel 1 das Galilei'sche Prinzip kennengelernt:

Galilei'sches Prinzip

Das Newton'sche Gesetz nimmt in allen Inertialsystemen die gleiche Form an.

Inertialsysteme sind durch Galileitransformationen miteinander verbunden: $\Sigma \to \Sigma'$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}' &= \underline{A}\vec{x} + \vec{a} + \vec{v}t \\ t' &= t + \tau \end{aligned}} \qquad \text{mit } \underline{A}^T \cdot A = \mathbb{1}, \qquad \text{und} \quad \vec{a}, \vec{v}, \tau = \text{const}$$

Äquivalent zu der Aussage der Forminvarianz der Newton'schen Bewegungsgleichung ist die Feststellung, dass die Wirkung S invariant unter Galileitransformationen ist.

Bewegt sich in Σ ein Körper mit der Geschwindigkeit $\vec{V}$, so bewegt er sich in Σ' mit $\vec{V} + \vec{v}$.

Diese Aussage steht aber im *Widerspruch zum Experiment*: Licht breitet sich in allen Bezugssystem gleich schnell aus, die Lichtgeschwindigkeit c ist eine Naturkonstante. (Michelson-Morley[1]-Experiment, 1881 in Potsdam, Lichtgeschwindigkeit auf der Erde unabhängig von der Richtung.)

Auch aus Sicht der *theoretischen Physik* ist das inkonsistent: Maxwell-Gleichungen sind nicht invariant unter Galileitransformationen. Somit gilt das Galilei-Prinzip nicht! Einstein[2] erkannte dieses grundlegende Problem Anfang des letzten Jahrhunderts und postulierte 1905 die spezielle Relativitätstheorie (kurz: SRT), die wir nun diskutieren wollen.

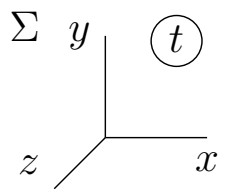
Grundpostulate

1. Spezielles Relativitätsprinzip:

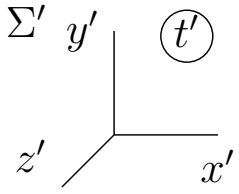
   Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich, es gibt kein ausgezeichnetes Inertialsystem. Inertialsysteme Σ, Σ' bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit.

2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist in *allen* Inertialsystemen gleich.

Folge: Es existiert keine universelle Zeit in der Natur, jede Zeit gehört jeweils zu genau einem Bezugssystem



$\{x, y, z, ct\}$



$\{x', y', z', ct'\}$

[1] (Albert Michelson, USA, 1852-1931; Edward Morley, USA, 1838-1923)
[2] (Albert Einstein, 1879-1955, Deutschland/Schweiz/USA)

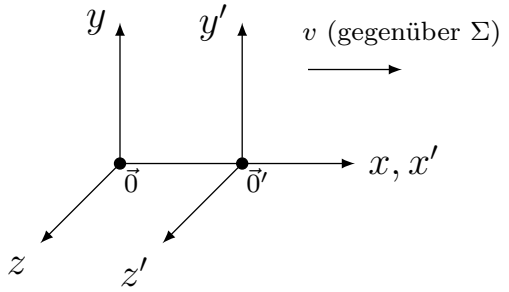
Wir müssen also unser Konzept eines Koordiantensystems um einen zusätzlichen Zeiteintrag ergänzen: Wir sprechen von nun an von den Raum-Zeit-Koordinaten. Eine Raum-Zeit-Koordinate ist physikalisch ein Ereignis, zusammengefasst als Vierervektor der Raumzeit

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad x'^\mu = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

oder auch geschrieben als $x^\mu = (ct, \vec{x})$, wobei auch der x^0 Eintrag die Dimension einer Länge hat.

VI.1 Lorentztransformation

Situation: Σ' bewegt sich relativ zu Σ mit Geschwindigkeit v in x-Richtung, für $t = 0 = t'$ fallen die Ursprünge der Systeme $\vec{0}$ und $\vec{0}'$ zusammen.



Gesucht: Lineare Transformation $\Sigma \to \Sigma'$

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}. \qquad \text{(VI.1)}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$: 4×4-Matrix.

Da (siehe Bild) in unserem Fall $y' = y$ und $z' = z$ ist, lautet (VI.1) lediglich

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \qquad \text{(VI.2)}$$

Die inverse Transformation ergibt sich durch Invertieren dieser Matrix zu

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1 - \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0} \begin{pmatrix} \Lambda^1{}_1 & -\Lambda^0{}_1 & 0 & 0 \\ -\Lambda^1{}_0 & \Lambda^0{}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} . \qquad \text{(VI.3)}$$

Die verbleibenden vier Matrixeinträge können nun aus vier physikalischen Bedingungen bestimmt werden.

I. Σ' bewegt sich mit Geschwindigkeit v bezüglich Σ nach rechts. Der Ursprung von Σ', also $x' = 0$, wird in Σ durch die Bahnkurve $x = vt$ beschrieben. Setzt man dies in die zweite Zeile von (VI.2) ein, dann ergibt sich

$$0 = \Lambda^1{}_0 ct + \Lambda^1{}_1 x = (\Lambda^1{}_0 c + \Lambda^1{}_1 v)t$$

also $\Lambda^1{}_0 = -\frac{v}{c}\Lambda^1{}_1$.

II. Σ bewegt sich mit Geschwindigkeit v bezüglich Σ' nach links. Der Ursprung von Σ, also $x = 0$, wird in Σ' durch die Bahnkurve $x' = -vt'$ beschrieben. Setzt man dies in die zweite Zeile von (VI.3)

ein, dann ergibt sich

$$0 = \frac{-\Lambda^1{}_0 ct' + \Lambda^0{}_0 x'}{\Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1 - \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0} = -\frac{\Lambda^1{}_0 c + \Lambda^0{}_0 v}{\Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1 - \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0}\, t'$$

also $\Lambda^0{}_0 = -\frac{c}{v}\Lambda^1{}_0 = \Lambda^1{}_1$.

III. Ein Lichtsignal hat in Σ und in Σ' die Geschwindigkeit c. Die Lorentztransformation muss also die Bahnkurve $x = ct$ auf die Bahnkurve $x' = ct'$ abbilden. Wegen $x' = ct'$ setzen wir die ersten beiden Zeilen von (VI.2) gleich

$$\Lambda^0{}_0 ct + \Lambda^0{}_1 x = \Lambda^1{}_0 ct + \Lambda^1{}_1 x\ ,$$

und verwenden $x = ct$ sowie die obigen Resultate, so dass

$$\begin{aligned} \Lambda^0{}_0 + \Lambda^0{}_1 &= \Lambda^1{}_0 + \Lambda^1{}_1\ , \\ \Lambda^1{}_1 + \Lambda^0{}_1 &= -\frac{v}{c}\Lambda^1{}_1 + \Lambda^1{}_1\ , \\ \Lambda^0{}_1 &= -\frac{v}{c}\Lambda^1{}_1\ , \end{aligned}$$

folgt.

Der aktuelle Zwischenstand ist nun

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda^1{}_1 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}\ , \tag{VI.4}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})\Lambda^1{}_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}\ . \tag{VI.5}$$

und die einzige verbleibende unbekannte Größe ist $\Lambda^1{}_1$. Wir können argumentieren, dass $\Lambda^1{}_1$ nur eine gerade Funktion der Relativgeschwindigkeit v seien kann. Dies sieht man wie folgt. Das Umkehren der Koordinatenachsen, $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$ und $\vec{x}' \mapsto -\vec{x}'$, bei gleichzeitiger Umkehrung der Relativgeschwindigkeit, $v \mapsto -v$, ändert die physikalische Situation nicht, darf also an der Transformation nichts ändern. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $\Lambda^1{}_1(-v) = \Lambda^1{}_1(v)$.

IV. Reziprozität. Welches der beiden Bezugssysteme als Σ und welches als Σ' bezeichnet wird ist willkürlich. Wenn wir die beiden Bezugssysteme austauschen ($\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$ und $t \leftrightarrow t'$) und dabei das Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit tauschen, darf sich an den Transformationsformeln wieder nichts ändern. Führen wir diese Ersetzungen in (VI.4) durch, so ergibt sich (VI.5) genau dann, wenn

$$\Lambda^1{}_1 = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})\Lambda^1{}_1}\ ,$$

wobei es wichtig war zu wissen, dass $\Lambda^1{}_1$ gerade ist. Durch Auflösen ergibt sich

$$\Lambda^1{}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ .$$

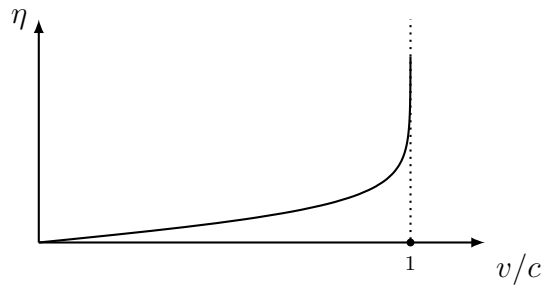
Das positive Vorzeichen beim Ziehen der Wurzel wurde gewählt, damit die Koordinatenachsen von Σ und Σ' dieselbe Orientierung haben.

Zusammenfassend haben wir nun gefunden, dass

$$\boxed{ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad,\quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = x'\quad,\quad y' = y\quad,\quad z' = z\,.} \tag{VI.6}$$

Eine praktische Parametrisierung der Lorentztransformation ergibt sich mit der Definition der Rapidität η durch

$$\tanh\eta = \frac{v}{c}\ .$$



Damit folgt, dass $\cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ und $\sinh\eta = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, so dass wir die Transformationsmatrix in (VI.1) und ihr Inverses schreiben können als

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Diese Matrizen sehen den Rotationsmatrizen sehr ähnlich, mit dem Unterschied, dass die trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische Funktionen ersetzt sind und die Vorzeichen anders verteilt sind. Deswegen gilt auch auch nicht die Beziehung $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$, die wir für Rotationsmatrizen kennen, sondern

$$\underline{\Lambda}^{-1} = \underline{\eta}\underline{\Lambda}^T\underline{\eta}\ ,$$

wo wir die "Metrik"[3]

$$\underline{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\eta}^{-1}$$

eingeführt haben. Diese Beziehung zwischen $\underline{\Lambda}$ und $\underline{\Lambda}^{-1}$ gilt auch für allgemeine Lorentztransformationen, d.h. für die Transformation zwischen zwei beliebig gegeneinander verdrehte und in beliebige Richtung gegeneinander bewegte Inertialsysteme, deren Urspung für $t = 0 = t'$ zusammenfallen. Etwas umgeschrieben, lautet die Beziehung

$$\boxed{\underline{\Lambda}^T\underline{\eta}\underline{\Lambda} = \underline{\eta} \quad \text{oder} \quad \Lambda^\mu{}_\rho\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\kappa = \eta_{\rho\kappa}\ .} \tag{VI.7}$$

Die Menge aller Matrizen, die dies erfüllen, bilden eine Gruppe SO(1,3), wobei die Notation $(1,3)$ die Signatur der Metrik reflektiert. Diese Matrizen erhalten nicht die euklidische Norm $(ct)^2+x^2+y^2+z^2$, sondern die <u>Pseudonorm</u>

$$x^2 := x^\mu\eta_{\mu\nu}x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2\ ,$$

d.h. es gilt

$$\boxed{x^\mu\eta_{\mu\nu}x^\nu = x'^\mu\eta_{\mu\nu}x'^\nu} \tag{VI.8}$$

für beliebige Lorentztransformationen.

[3]Diese Matrix hat nichts mit der Rapidität η zu tun.

Indexgymnastik

Eine Größe x^μ, die sich wie $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ transformiert, heißt kontravarianter Vierervektor. Ein linearer Raum mit Pseudometrik $\eta_{\mu\nu}$ heißt *Minkowski*[4]-Raum - im Gegensatz zum Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben $\mathbb{R}^{1,3}$.
Mit der Metrik $\eta_{\mu\nu}$ lassen sich Indizes „herunterziehen“

$$\begin{aligned} x_\mu &= \eta_{\mu\nu} x^\nu \qquad &&\text{„kovarianter 4-Vektor“} \\ x^\mu &= (ct, \vec{x}) \qquad &&x_\mu = (ct, -\vec{x}) \end{aligned}$$

Transformationsverhalten von x_μ:

$$x'_\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma .$$

Nun folgt aus (VI.7)

$$\begin{aligned} &\left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\kappa \Lambda^\mu_\rho \left(\eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma\right) = \eta_{\rho\sigma} \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\kappa \\ &\Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu \, \eta_{\rho\sigma} . \end{aligned}$$

Somit

$$x'_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu \, \eta_{\rho\sigma} x^\sigma = x_\rho \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu .$$

D.h. der kovariante Vektor transformiert mit der Inversen Λ^{-1}.

Die inverse Metrik $\eta^{\mu\nu}$ mit $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$ erlaubt das „Hochziehen“ von Indizes:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$$

Wir sehen weiterhin, dass $\left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \, \eta^{\sigma\rho}$ ist.

Infinitesimale Lorentztransformationen

Analog zur Diskussion der infinitesimalen Drehung in Kapitel 1 betrachten wir nun infinitesimale Lorentztransformationen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon \omega^\mu{}_\nu \qquad \epsilon \ll 1.$$

Aus (VI.7) folgt dann

$$\begin{aligned} &\left(\delta^\mu_\rho + \epsilon\, \omega^\mu{}_\rho\right) \left(\delta^\nu_\sigma + \epsilon\, \omega^\nu{}_\sigma\right) \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \\ &\eta_{\rho\sigma} + \epsilon \left(\omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma}\right) = \eta_{\rho\sigma} \\ &\Rightarrow \boxed{\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}} \end{aligned}$$

mit $\omega_{\sigma\rho} = \eta_{\sigma\nu}\omega^\nu_\rho$. D.h. $\omega_{\rho\sigma}$ ist eine antisymmetrische 4×4 Matrix $\rightarrow$ 6 Einträge.
$\Rightarrow$ Die Lorentzgruppe ist eine 6 parametrige, kontinuierliche nicht-abel'sche Gruppe

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{3 Parameter der Rotation} \\ \text{3 Parameter der „Boosts“} \end{array}} \Leftrightarrow \text{Rapiditäten } \eta_{x/y/z}.$$

Gemeinsam mit den 3+1 Translationen haben wir die *Poincaré Gruppe*[5]

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \, x^\nu + a^\mu} . \tag{VI.9}$$

[4] (Hermann Minkowski, Deutschland/Russland, 1864-1909)
[5] (Henri Poincaré, Frankreich, 1854-1912)

Spezielles Relativitätsprinzip

Naturgesetze ändern sich nicht, wenn sie in durch *Poincaré-Transformationen* verbundene Bezugssysteme formuliert werden.

VI.2 Relativistische Effekte

Relativität der Gleichzeitigkeit

Die Lorentztransformation zwischen Inetrialsystmen Σ und Σ' (und zurück), die sich mit v voneinander in x-Richtung fortbewegen, haben wir

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\,(t - \frac{v}{c^2}x) \quad , \quad x' = \gamma(x - vt) \\ t &= \gamma\,(t' + \frac{v}{c^2}x') \quad , \quad x = \gamma(x' + vt') \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{VI.10}$$

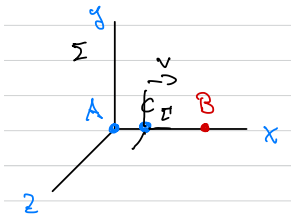
Da die Transformationen der Zeit vom Ort abängt, ist die *Gleichzeitigkeit* von Ereignissen bezugssystemabhängig: Finden die Ereignisse E_1 und E_2 in Σ zur gleichen Zeit t an unterschiedlichen Orten $x_1 \neq x_2$ statt, dann finden sie in Σ' zu den Zeiten

$$t_1' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_1) \quad \neq \quad t_2' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_2)$$

statt, also nicht gleichzeitig.

Zeitdilatation

Der Faktor γ in der Lorentz-Transformation impliziert, dass es zu einer Zeitdilatation beim Vergleich von Uhren in Σ und Σ' gibt.



Synchronisation von 2 Uhren in Σ. Dies erreicht man durch aussenden eines Lichtblitzes aus der Mitte des Abstands von A & B.

Nun bewegen wir eine Uhr C mit konstanter Geschwindigkeit v von A nach B. Die Uhr C ruht im System Σ'. Das Ereignis "C trifft A" liegt bei den Raum-Zeitkoordinaten

$$\Sigma: \qquad (t, x) = (0, 0) \qquad\qquad \Sigma': \qquad (t', x') = (0, 0)$$

wohingegen das Ereignis "C trifft B" bei

$$\Sigma: \qquad (t, x) = (\Delta t, v\,\Delta t) \qquad\qquad \Sigma': \qquad (t', x') = (\Delta t', 0)$$

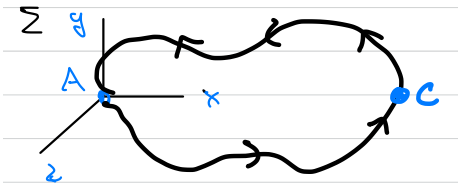
liegt (die Uhr liegt in Σ' stets in Ruhe im Ursprung). Aus der Lorentz-Transformation $t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$ folgt sodann

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + 0) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} < \Delta t} \qquad \text{da } \gamma > 1$$

Während in Σ die Zeit Δt vergeht, zeigt die bewegte Uhr die kürzere Zeit $\Delta t'$ an. "Bewegte Uhren gehen langsamer".

Zwillingsparadoxon

Was misst eine beschleunigt bewegte Uhr? Betrachten wir jierfür etwa eine geschlossene Bahnkurve $\vec{x}(t)$:



$$\vec{x}(t = t_1) = \vec{0} = \vec{x}(t = t_2)$$

Die Bewegung sei nun beliebig, d.h. $\dot{\vec{x}}(t) \neq \text{const}$.

IDEE: Wir transformieren jeweils in das *momentane Ruhesystem*. Für Zeitpunkt t bewegt sich C mit $\dot{\vec{x}}(t)$. Nutze nun ein Inertialsystem Σ', das sich mit $\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t)$ relativ zu Σ bewegt. In Σ' ruht die Uhr für einen infinitesimalen Moment:

$$dt' = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}(t)^2}{c^2}}dt =: d\tau$$

Die gesamt auf C verstrichene Zeit ergibt sich dann aus der Integration:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}(t)^2}{c^2}}dt \qquad \Delta\tau \text{ ist die “Eigenzeit” von } C \tag{VI.11}$$

Die Eigenzeit ist jene Zeit, die auf mitgeführten Uhren vergeht. Da $\dot{x}^2 \geq 0$ ist gilt $\Delta\tau \leq t_2 - t_1$, d.h. die resiende Uhr altert weniger als die zu Hause gebliebene (für beliebige Trajektorien $\vec{x}(t)$).

Beispiel: Kreisbahn

$$\vec{x}(t) = R(-1 + \cos\varphi(t), \sin\varphi(t)) \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \dot{\varphi}(t)R(-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t)) \qquad \dot{\vec{x}}^2 = \dot{\varphi}^2 R^2$$

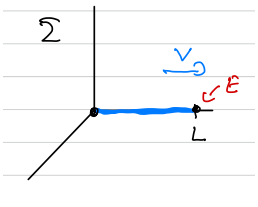
Dann folgt

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{\varphi}^2 R^2}{c^2}}dt$$

Nun nehmen wir eine konstante Winkelgeschwindigkeit an, d.h. $\varphi(t) = 2\pi\frac{t}{T}$. Dann ist $\Delta\tau = T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ mit $v = 2\pi R/T$. Realistischere Reisegeschwindigleiten sind auch möglich.

Längenkontraktion

Der Faktor γ in der Lorentz-Transformation des Ortes ($x' = \gamma(x - vt)$) impliziert, dass Längen von Objekten in Σ und Σ' gemessen unterschiedlich sind.



Ein starrer Stab bewege sich mit v relativ zu Σ. Der Stab hat eine feste Länge L' in seinem Ruhesystem Σ', wo er längs der x-Achse liegt. Zum Zeitpunkt $t = 0 = t'$ fallen Σ und Σ' zusammen.

Das Ereignis die Lage des Endpunktes des Stabes bei $t = 0$ hat die Raum-Zeitkoordinaten

$$(x, t) = (L, 0) \qquad (x', t') = (L', ..)$$

Aus $x' = \gamma(x - vt)$ folgt sodann $L' = \gamma L$ bzw.

$$\boxed{L = \frac{L'}{\gamma} < L'}$$

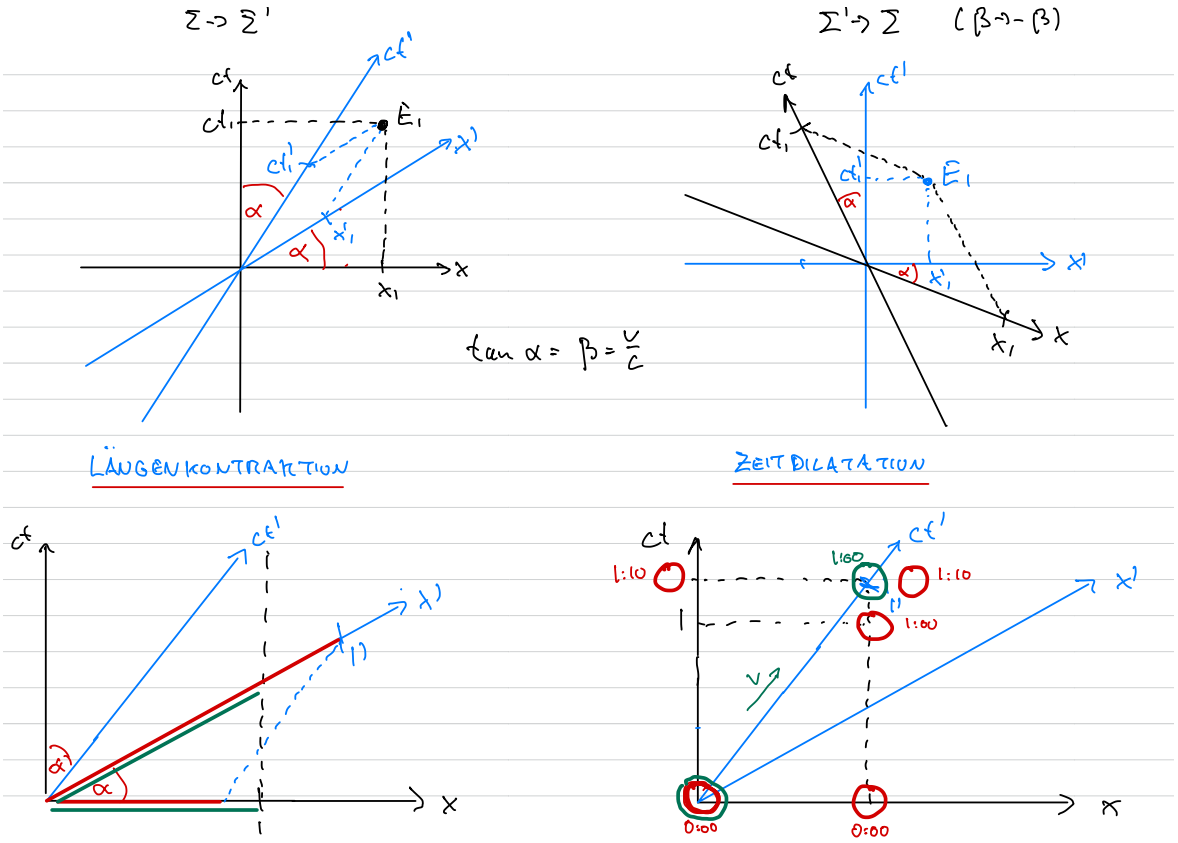
D.h. der bewegte Stab ist kürzer als der Ruhende.

Graphische Darstellung der Lorentz-Transformation: Minkowski-Diagramme

Für einen Boost in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v gilt mit $\beta := \frac{v}{c}$ und $\gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta\gamma \end{pmatrix} ct + \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} x\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,.$$

Diese Transformationen lassen sich in ein Minkowki-Diagramm übersetzen, bei dem für eine Transformation von $\Sigma \to \Sigma'$ die neuen Koordinaten (ct', x') schiefwinkling vorliegen, mit dem Winkel $\tan\alpha = \beta$. Dieser Winkel kann maximal 45 Grad einnehmen, für das dann $v = c$ ist (Grenzfall). Hier fallen ct'-Achse und x' Achse zusammen.



Pseudonorm

Wir sehen also, dass der Längenabstand $|\vec{x}_A - \vec{x}_B|$ und der Zeitabstand $|t_A - t_B|$ keine lorentzinvarianten Größen sind.

Welche Größen sind dann Lorentzinvarianten?

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta \\ \sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Soetwas wie eine Drehung im x-t Raum, Pseudonorm:

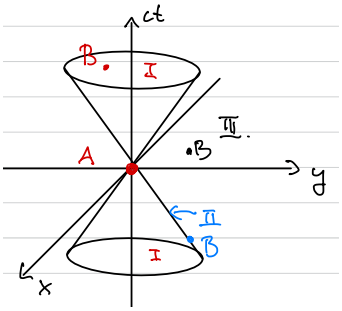
$$\begin{aligned}(ct')^2 - (x')^2 &= (\cosh\eta \cdot ct + \sinh\eta \cdot x)^2 - (\sinh\eta \cdot ct + \cosh\eta \cdot x)^2 \\ &= \underbrace{(\cosh^2\eta - \sinh^2\eta)}_{1}(ct)^2 + \underbrace{(\sinh^2\eta - \cosh^2\eta)}_{-1}x^2 + ct \cdot x(\cosh\eta\sinh\eta - \sinh\eta\cosh\eta) \\ &= (ct)^2 - x^2\end{aligned}$$

Invarianz der PSEUDONORM:

$$\boxed{c^2t^2 - \vec{x}^2 = c^2t'^2 - \vec{x}'^2}$$

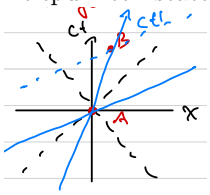
Lichtkegel

Pseudonorm erlaubt die Aufteilung von Raumzeitabständen in 3 Klassen.

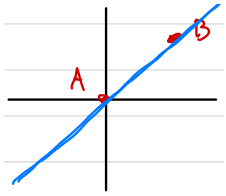


I: $c^2(t_A - t_B)^2 - (\vec{x}_A - \vec{x}_B)^2 > 0$
'zeitartiger' Abstand
II: $c^2(t_A - t_B)^2 - (\vec{x}_A - \vec{x}_B)^2 = 0$
'lichtartiger' Abstand
III: $c^2(t_A - t_B)^2 - (\vec{x}_A - \vec{x}_B)^2 < 0$
'raumartiger' Abstand

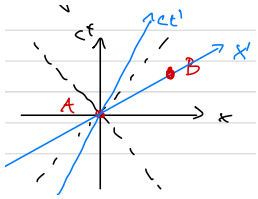
I) Es existiert ein Bezugssystem in dem Ereignis A & B am gleichen Ort an zwei unterschiedlichen Zeitpunkten stattfindet. Dies sieht man auch unmittelbar aus dem Minkoswki-Diagramm:



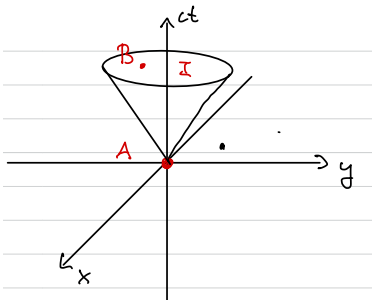
II) Alle Punkte auf II lassen sich durch Lichtstrahlen verbinden: Grenze der *Kausalität*



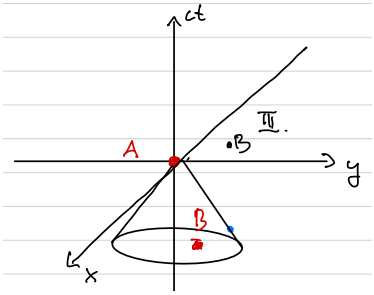
III) Es existiert ein Bezugssystem in dem A & B zur gleichen Zeit an unterschiedlichen Orten stattfinden.



Vorwärtslichtkegel



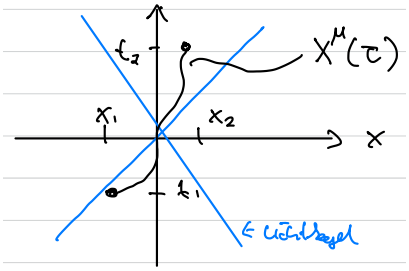
Ein Ereignis im Ursprung $\vec{O}$ kann nur im Inneren des Vorwärtslichtkegels weitere Ereignisse beeinflussen.



Ein Ereignis im Ursprung $\vec{O}$ kann nur durch Ereignisse im Rückwärtslichtkegel beeinflusst werden.

VI.3 Relativistische Mechanik

Beginnen wir mit einem freien, relativistischen Teilchen. Im vorherigen Kapitel haben wir erkannt, dass das Prinzip der kleinsten Wirkung die grundlegende Eigenschaft der Mechanik ist, die die Bewegungsgleichungen bestimmt. Dies verallgemeinern wir nun auch auf den relativistischen Fall (in der Tat gilt dieses Prinzip für die gesamte *klassische* Physik, d.h. Mechanik, Elektrodynamik, Gravitation, Hydrodynamik und allgemeiner klassischer Feldtheorie, im nicht-relativistischen und relativistischen Fall. Die Schlüsselfrage ist also: Wie lautet das Wirkungsfunktional eines freien, relativistischen Teilchens? Dieses ist zunächst in seiner Bewegung mittels einer Trajektorie in der Raumzeit zu beschreiben: $x^\mu(\tau)$ wobei τ ein (beliebiger) Bahnparamter ist, der die Bahnkurve parametrisiert.



$$S = \int \text{"}dt\text{"} \mathcal{L}(x^\mu)$$

Forderung:
Wirkungsintegral ist Lorentz-Invariante!

Infinitesimaler Raumzeit-Abstand:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{x}^2 \qquad \text{mit } \mathrm{d}s' = \mathrm{d}s$$

Ein natürlicher Ansatz für die Wirkung S ist dann:

$$S = -\alpha \int_A^B \mathrm{d}s \qquad \equiv \textbf{Länge der Weltlinie}$$

Integral ist längs einer Weltlinie $x^\mu(\tau)$, die A & B verbindet, zu nehmen. Setzen wir nun die Parametrisieurung ein $x^\mu(\tau) = (ct(\tau), \vec{x}(\tau))$ folgt

$$\mathrm{d}s = \sqrt{c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{S = -\alpha \int_A^B \mathrm{d}\tau \sqrt{c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}} \tag{VI.12}$$

mit $x^\mu(\tau_A) = x^\mu_A$ und $x^\mu(\tau_B) = x^\mu_B$. α ist eine noch unbestimmte Konstante.

Eigenschaften von S:

- S ist invariant unter Lorentz-Transformationen
- S ist invariant und Reparametrisierungen der Eigenzeit $\tau \to \tau'(\tau)$
  Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau'} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tau'}$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau'} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tau'}$$

$$S' = -\alpha \int_A^B \mathrm{d}\tau' \underbrace{\sqrt{c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau'}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau'}\right)^2}}_{\sqrt{c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tau'}} = S$$

- Nutze dies, um Wahl der Parametrisierung $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1$, also $t = \tau + \text{const.}$ zu machen.

Dann folgt für die Wirkung des freien, relativistischen Teilchens in dieser speziellen Parametrisierung

$$\boxed{S = -\alpha c \int_A^B \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{x}}^2}} \tag{VI.13}$$

Wir erkennen in dem Resultat das Integral der Eigenzeit einer mitgeführten Uhr auf der Trajektorie $\vec{x}(\tau)$ wieder (VI.11). D.h. die Wirkung ist proportional zur Eigenzeit, die extremalisierende Trajektorie ist die, die auf der mitgeführten Uhr den schnellstmöglichen Weg von A nach B (=minimale Zeit) realisiert. Ein sehr sinnvolles Ergebnis!

Forderung an S:

Im nichtrelativistischen Grenzfall $|\dot{\vec{x}}| \ll c$ muss sich die gefundene Wirkung (VI.13) auf den bekannten nichtrelativistischen Ausdruck

$$S_{\mathrm{NR}} = \int_A^B \mathrm{d}t \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

reduzieren. In diesem Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} S &\approx -\alpha c \int_A^B \mathrm{d}t (1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right)^2 + \dots) \\ &= \int_A^B \mathrm{d}t (-\alpha c + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}\dot{\vec{x}}^2 + \dots) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Wir sehen, dass wir $\alpha = mc$ setzen müssen, um konsistenten nicht-relativistischen Limes zu haben. So konnte die unbestimmte Konstante gefunden werden. Die Wirkung des freien, relativistischen Teilchens lautet sodann:

$$\boxed{S = -mc^2 \int_A^B \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{x}}^2}} \tag{VI.14}$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = p^i \quad \text{(relativistischer Impuls)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}\right) = 0$$

Lösung: $\dfrac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = a^i = const.$

quadrieren: $\Rightarrow \quad \dfrac{m^2\dot{\vec{x}}^2}{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} = \vec{a}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}^2 = const \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^i = const.$

$\boxed{x^i = v^i \cdot t + a}$ geradlinig gleichförmige Bewegung

Energie:

Aus Noethertheorem:

$$E = H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} + \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}(mc^2)$$

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}} \approx mc^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + ... \tag{VI.15}$$

$\rightarrow$ Das berühmte $E = mc^2$ ist nur eine Näherung, bzw. gilt für Teilchen in Ruhe.

Impuls:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}\dot{\vec{x}}}$$

Ruhemasse:

Aus Energie und Impuls lässt sich eine invariante, skalare Größe, die Ruhemasse, bilden.

$$\boxed{\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2}$$

oder $E = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \mathcal{O}(\vec{p}^4)$. Das ist auch sinnvoll im masselosen Fall $m = 0$, dann ist $E^2 = c^2\vec{p}^2$.

Viererimpuls:

Die Ruhemasserelation $m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$ legt nahe, dass E/c und $\vec{p}$ als Komponenten eines Vierervektors zu betrachten $\boxed{p^\mu = (E/c, \vec{p})}$ (Viererimpuls). $p^\mu p_\mu = m^2c^2$ ist LORENTZ-Invariante ((Ruhe)masse in allen Bezugssystemen gleich).

Vierergeschwindigkeit:

$u^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$ ist kovarianter Vierervektor, da $\mathrm{d}s$ invariant und $\mathrm{d}x^\mu$ kovariant ist.

$$u^\mu u_\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu\ \mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{u^2 = 1}.$$

Komponenten der Vierergeschwindigkeit:

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = \frac{c\mathrm{d}t}{c\mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^i}{c\mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v^i}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir sehen nun, dass

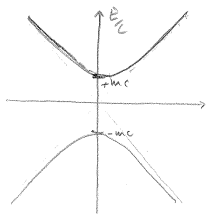
$$\frac{E}{c} = mcu^0 \qquad \text{und} \qquad \vec{p} = mc\vec{u}$$

ist. Deshalb ist $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ in der Tat ein kontravarianter Vierervektor.

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

Mögliche Energien und Impulse eines Teilchens liegen auf einem Hyperboloiden:



Da nur positive Energien möglich sein sollten, ist der obere Teil der Kurve realisiert.

Kovariante Form der Bewegungsgleichungen:

Wir betrachten $\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s}$ in seinen Komponenten:

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\frac{v^i}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

Aufgrund der Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{x}}^2\right) = 0$ sind diese Ausdrücke 0.

$$\Rightarrow \qquad \boxed{mc^2\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = 0} \tag{VI.16}$$

Relativistische Form der Bewegungsgleichung. Im nicht relativistischen Grenzfall geht dies in kräftefreie Newton-Gleichung über:

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}s} \overset{v/c\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}1 = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} \overset{v/c\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{x}^i}{c} = \frac{\ddot{x}^i}{c^2}$$
$$\Rightarrow \quad mc^2\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = 0 \overset{v/c\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 = 0 & \mu = 0 \\ m\ddot{\vec{x}} = 0 & \mu = i \end{cases}$$

Die kovariante Bewegungsgleichung (VI.16) lässt sich auch direkt aus dem Variationsprinzip erhalten:

$$S = -mc\int\int \mathrm{d}s = mc\int \mathrm{d}s\sqrt{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}}$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial L}{\partial u_\mu} = mc^2\frac{1}{\sqrt{u^\rho u_\rho}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u^\mu = \underline{mc^2\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = 0}$$

Nebenbedingung:

Zu beachten ist, dass wegen $u^\mu u_\mu = 1$ zu (VI.16) die Nebenbedingung

$$\boxed{u^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u_\mu = 0} \tag{VI.17}$$

gehört.

Äußere Kraft auf relativistisches Teilchen

Wirkt eine äußere Kraft K^μ, so werden wir analog zur NEWTON-Gleichung die kovariante Bewegungsgleichung

$$\boxed{mc^2 \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = K^\mu} \tag{VI.18}$$

Aufgrund der Nebenbedingung (VI.17) muss für $K^\mu(x^\mu, u^\mu)$ gelten:

$$\boxed{u_\mu K^\mu(x, u) = 0.} \tag{VI.19}$$

Eine einfache Möglichkeit (VI.19) zu erfüllen, ist ein K^μ der Form:

$$K^\mu = eF^{\mu\nu}u_\nu \quad \text{mit } F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

antisymmetrischer Tensor $F^{\mu\nu}$, da $F^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = 0$. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\boxed{mc^2 \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = eF^{\mu\nu}u_\nu.} \tag{VI.20}$$

In Komponenten

$$mc^2 \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = eF^{i0}u_0 + eF^{ij}u_j.$$

Nennen wir die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ als

$$\begin{aligned} & F^{i0} = E^i, \qquad F^{ij} = \epsilon^{ijk}B_k = F_{ij}, B_k = -B^k \\ \rightarrow \quad & -F^{23} = B^1, \qquad -F^{31} = B^2, -F^{12} = B^3 \\ & u^i = \frac{v^i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\frac{v^i}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \end{aligned}$$

so dass aus (VI.20) folgt:

$$\begin{aligned} & m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\left(E^i + \frac{1}{c}F^{ij}v_j\right) \\ \Rightarrow \quad & \boxed{m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{x}} \times \vec{B}\right)} \end{aligned} \tag{VI.21}$$

Entspricht im Limes $v/c \to 0$ der LORENTZ-Kraft.

$\Rightarrow$ Das legt nahe, das elektromagnetische Feld mit $F^{\mu\nu}$ zu identifizieren.

(VI.21) beschreibt Bewegung eines relativistischen Teilchens im elektromagnetischen Feld.

Die 0-Komponente von (VI.20) lautet

$$mc^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Das beschreibt die Änderung der kinetischen Energie $\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = T$ bei einer Bewegung im elektromagnetischen Feld. Wir sehen, dass das Magnetfeld $\vec{B}$ <u>keinen</u> Beitrag zu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T$ liefert.

VI.4 Relativistisches Teilchen im Hamilton-Formalismus

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Relation

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

folgt die Hamiltonfunktion ($E = H$) des freien relativistischen Teilchens:

$$\boxed{H = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}} \tag{VI.22}$$

Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p^i} &= \dot{x}^i 0 v^i = \frac{cp^i}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}} \\ \frac{\partial H}{\partial x^i} &= -\dot{p}^i = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{VI.23}$$

Aus (VI.23) folgt $c^2\vec{p}^2 = v^2(m^2c^2 + \vec{p}^2)$

$$\Rightarrow \qquad \vec{p}^2 = \frac{m^2v^2}{1 - v^2/c^2}$$

und somit $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ wie zuvor. Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (VI.23) sind natürlich äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gleichungen zuvor

Wir wollen nun durch Legendre-Transformation von H zur Lagrangefunktion L übergehen:

$$L = \vec{p} \cdot \vec{v} - H = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - c\,x\underbrace{\sqrt{m^2c^2 + \frac{m^2v^2}{1 - v^2/c^2}}}_{\frac{\sqrt{m^2v^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}.$$

Die entspricht genau (VI.14).

VI.5 Relativistische Kinematik und Teilchenzerfall

In der Elementarteilchenphysik ist die relativistische Mechanik von zentraler Bedeutung, da die Teilchen sich mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen und sich bis auf Streu- oder Zerfallsprozesse frei, d.h. ohne äußere Kräfte bewegen.

Die Erhaltung des Viererimpulses $p^\mu = mcu^\mu$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}s} = 0} \tag{VI.24}$$

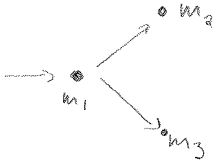
liefert wichtige Erkenntnisse über Zerfalls- und Streuprozesse. Wichtig ist es immer ein schlaues Intertialsystem zur Beschreibung zu suchen, wir wählen stets das Schwerpunktsystem.

Teilchenzerfall

Viererimpuls-Erhaltung

$$p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu$$

bzw. $E_1 = E_2 + E_3, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$



Im Ruhesystem des Teilchens 1 gilt:

$$p_1^\mu = (m_1 c^2, 0, 0, 0)$$

$$p_2^\mu = (E_2, \vec{p}) \quad \text{mit} \quad E_2 = \sqrt{m_2^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \tag{VI.25}$$

$$p_3^\mu = (E_3, -\vec{p}) \quad \text{mit} \quad E_3 = \sqrt{m_3^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \tag{VI.26}$$

Wegen

$$E_1 = m_1 c^2 = \sqrt{m_2^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} + \sqrt{m_3^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \geq m_2 c^2 + m_3 c^2$$

folgt $m_1 \geq m_2 + m_3$. D.h., ein Teilchen kann nur zerfallen, falls seine Masse größer als die seiner Zerfallsprodukte ist.

Frage: Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Zerfallsprodukte im Ruhesystem von Teilchen 1?

Hierzu bestimmen wir $E_{2/3} = \frac{m_{2/3} c^2}{\sqrt{1 - v_{2/3}^2/c^2}}$ und finden daraus $v_{2/3}$:

$$\text{(VI.25)}: \qquad p_1 \cdot p_2 = m_1 c^2 E_2, \quad p_1 \cdot p_3 = m_1 c^2 E_3$$

$$p_1 \cdot p_3 = (p_2 + p_3) \cdot p_2 = p_2^2 + p_2 \cdot p_3 = m_2^2 c^4 + p_2 \cdot p_3$$

Nun ist

$$\begin{aligned} p_1^2 &= (p_2 + p_3)^2 = p_2^2 + p_3^2 + 2 p_2 \cdot p_3 \\ &= m_2^2 c^4 + m_3^2 c^4 + 2 p_2 \cdot p_3 = m_1^2 c^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad p_2 \cdot p_3 = \frac{c^4}{2}(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2).$$

Und somit

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{c^4}{2}(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)$$

$$\Rightarrow \quad E_2 = \frac{c^2}{2} \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{m_1}$$

Analog ($2 \leftrightarrow 3$):

$$E_3 = \frac{c^2}{2} \frac{m_1^2 + m_3^2 - m_2^2}{m_1}$$

und es folgen

$$\gamma_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2 m_1 m_2}$$

$$\gamma_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v_3^2/c^2}} = \frac{m_1^2 + m_3^2 - m_2^2}{2 m_1 m_3}$$

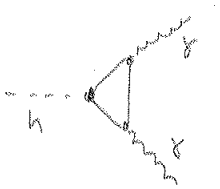
und daraus v_2 und v_3.

Beispiel: Higgs-Zerfall $m_h c^2 = 125$ GeV (LHC 2013)

Zerfällt vornehmlich in zwei Photonen (masselos)

$$\boxed{h \to \gamma\gamma}$$

$$p_h^\mu = p_\gamma^\mu + p_\gamma^{\mu\prime}$$



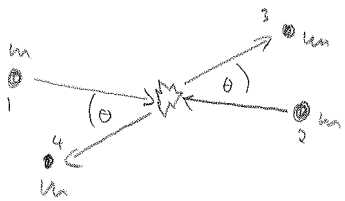
Im Ruhesystem:

$$\begin{aligned}
p_h^\mu &= (m_h c^2, 0, 0, 0) \\
p_\gamma^\mu &= \left(\frac{1}{2} m_h c^2, \vec{p}\right) \quad |\vec{p}| = \frac{1}{2} m_h c \\
p_\gamma^{\mu\prime} &= \left(-\frac{1}{2} m_h c^2, -\vec{p}\right)
\end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, das Higgsteilchen bewege sich und hat die Energie E_h, aus der Messung bestimmen wir die Photonenergie E_γ. Unter welchem Winkel wird das Photon emittiert?

$$\begin{aligned}
p_\gamma^{\mu\prime} &= p_h^\mu - p_\gamma^\mu \\
0 &= p_\gamma' \cdot p_\gamma' = (p_h - p_\gamma) \cdot (p_h - p_\gamma) = p_h^2 + p_\gamma^2 - 2 p_h \cdot p_\gamma \\
&= m_h^2 c^2 - 2 \frac{E_h E_\gamma}{c^2} + 2 \vec{p}_h \cdot \vec{p}_\gamma \\
&= m_h^2 c^2 - 2 \frac{E_h E_\gamma}{c^2} + 2 \frac{E_\gamma}{c} \sqrt{E_h^2/c^2 - m_h^2 c^2} \cdot \cos\theta \\
\Rightarrow \quad \cos\theta &= \frac{\frac{E_h}{c} - \frac{m^2 c^3}{2 E_\gamma}}{\sqrt{\frac{E_h^2}{c^2} - m_h^2 c^2}}
\end{aligned}$$

Teilchenkollision



Kollission zweier Teilchen der Masse m und Streuung in zwei Teilchen der Masse m im Schwerpunktsystem der Teilchen 1 und 2

$$p_1^\mu = (mc\gamma_v, mv\gamma_v, 0, 0) \qquad p_2^\mu = (mc\gamma_v, -mv\gamma_v, 0, 0)$$
$$p_3^\mu = (mc\gamma_v, mv\gamma_v \cos\theta, mv\gamma_v \sin\theta, 0) \qquad p_4^\mu = (mc\gamma_v, -mv\gamma_v \cos\theta, mv\gamma_v \sin\theta, 0)$$