Quantenfeldtheorie I **WS 14/15** **Prof. Jan Plefka**

Besprechung am 24.10. in ZGW 6 2'21 bzw. 2'07

Aufgabe 1.1 – Klassische Elektrodynamik

Die Klassische Elektrodynamik folgt aus der Wirkung

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

1. Bestimmen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen und zeigen Sie, dass diese die Maxwellgleichungen bilden. Benutzen Sie hierzu

$$E^i = -F^{0i} \quad \text{und} \quad \epsilon^{ijk} B^k = -F^{ij}$$

2. Bestimmen Sie den Energie-Impulstensor $T_{\mu\nu}$ der Theorie. Dieser ist zunächst nicht symmetrisch, läßt sich aber durch Addition von $G^{\mu\nu} = \partial_\lambda (F^{\mu\lambda} A^\nu)$ symmetrisieren (ist zu überprüfen). Zeigen Sie, dass die Addition dieses Terms die Divergenzfreiheit des Energieimpulstensors erhält, also

$$0 = \partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(T^{\mu\nu} + G^{\mu\nu} \right)$$

gilt.

Aufgabe 1.2 – Matrixdarstellung der Lorentzgruppe

Zeigen Sie, dass

$$(L_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \lambda \left(\eta_{\nu\alpha} \, \delta_\mu^\beta - \eta_{\mu\alpha} \, \delta_\nu^\beta \right)$$

die Lorentzalgebra erfüllt. Fixieren Sie ferner den Parameter λ so, dass wir

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\kappa}] = i \, \eta_{\nu\rho} \, L_{\mu\kappa} + i \, \eta_{\mu\kappa} \, L_{\nu\rho} - i \, \eta_{\nu\kappa} \, L_{\mu\rho} - i \, \eta_{\mu\rho} \, L_{\nu\kappa}$$

in den Konventionen der Vorlesung erhalten.

Aufgabe 1.3 – Kasimiroperatoren der Poincaréalgebra

Zeigen Sie, dass die quadratischen Operatoren $P^2 := P^\mu P_\mu$ und $W^2 := W^\mu W_\mu$ mit allen Generatoren der Poincaréalgebra (P_μ, $L_{\mu\nu}$) vertauschen. Hierbei ist

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\kappa} L_{\nu\rho} P_\kappa$$

und wird als der Pauli-Lubanski Vektor bezeichnet.
Hinweis: Benutzen Sie, dass sich W_μ wie ein Vierervektor transformiert, d.h.

$$[W_\mu, L_{\rho\kappa}] = i \left(\eta_{\rho\mu} W_\kappa - \eta_{\kappa\mu} W_\rho \right)$$

Begründen Sie diese Aussage!