Quantenfeldtheorie I **WS 14/15** **Prof. Jan Plefka**

Übungsblatt 2

Abgabe Mittwoch 5.11 nach der Vorlesung – Besprechung am Freitag 7.11

Aufgabe 2.1 – Massive Darstellung der Poincaré Gruppe (5 Punkte)

Die Ortsdarstellung der Poincaré Gruppe lautet

$$\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu \,, \qquad \hat{M}_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + S_{\mu\nu} \,,$$

wobei die $S_{\mu\nu}$ die $n \times n$ dimensionale Spinmatrizen sind, die der Lorentz Algebra SO(1,3) genügen. In der Übung 1.3 haben wir den Pauli-Lubanski Vektor $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa} M_{\nu\rho} P_\kappa$ kennengelernt.
Zeigen Sie, dass für Eigenzustände des Impulsoperators mit $P_\mu P^\mu = m^2 > 0$ der Eigenwert von $W_\mu W^\mu$ den Wert $-m^2\, s(s+1)$ annimmt, wobei s den aus der QM bekannten Spin $S^i := \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} S_{jk}$ darstellt. Demnach lassen sich massive Teilchen durch die Zustände $|p_\mu, s\rangle$ charakterisieren.

Aufgabe 2.2 – Allgemeine Koordinatentransformationen (5 Punkte)

Unter *allgemeinen* Koordinatentransformationen der Koordinaten $x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x)$ transformieren Skalare, kovariante und kontravariante Vektoren gemäß

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) \qquad V_\mu(x) \to V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} V_\rho(x) \qquad V^\mu(x) \to V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} V^\rho(x) \,.$$

Bestimmen Sie die infinitesimalen Transformationsgesetze der Felder für $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$, d.h.

$$\delta\phi(x) := \phi'(x) - \phi(x) \qquad \delta V_\mu(x) := V'_\mu(x) - V_\mu(x) \qquad \delta V^\mu(x) := V'^\mu(x) - V^\mu(x) \,.$$

Spezialisieren Sie diese auf den Fall von konstanten Translationen, i.e. $\xi^\mu = const.$.

Aufgabe 2.3 – Verallgemeinerte Diracmatrizen (5 Punkte)

Wir definieren die vollständig antisymmetrisierten verallgemeinerte Diracmatrizen als

$$\gamma^{\mu\nu} := \gamma^{[\mu}\,\gamma^{\nu]} = \frac{1}{2}\,(\gamma^\mu\,\gamma^\nu - \gamma^\nu\,\gamma^\mu)$$
$$\gamma^{\mu\nu\rho} := \gamma^{[\mu}\,\gamma^\nu\,\gamma^{\rho]} = \frac{1}{6}\,(\gamma^\mu\,\gamma^\nu\gamma^\rho \pm 5 \text{ Permutationen})$$
$$\gamma^{\mu\nu\rho\kappa} := \gamma^{[\mu}\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^{\kappa]}$$

Zeigen Sie die nützliche Identitäten

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad \gamma^{\mu\nu} \gamma^\rho = \gamma^{\mu\nu\rho} + \eta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu ,$$

die Ihnen im folgenden hilfreich sein können! Hierbei ist es hilfreich von der Tatsache Gebrauch zu machen, dass die Matrizen

$$1 \qquad \gamma^\mu \qquad \gamma^{\mu\nu} \qquad \gamma^{\mu\nu\rho} \qquad \gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$$

eine Basis der 4×4 Matrizen bilden und einen geeigneten Ansatz für die rechten Seiten der zu zeigenden Ausdrücke zu machen, der die Indexstruktur der jeweils linken Seite reflektiert.

Aufgabe 2.4 – Spinordarstellung der Lorentzalgebra (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $(\gamma^\mu)^\alpha_\beta$, die der Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ genügen, die Matrizen

$$S^{\mu\nu} := \frac{i}{4} [\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

eine Darstellung der Lorentzalgebra SO(1,3)

$$[S^{\mu\nu},S^{\rho\kappa}] = i\,\eta^{\nu\rho}\, S^{\mu\kappa} \pm 3 \text{ mehr}$$

bilden. Zeigen Sie weiterhin, die in der Vorlesung benutzte Relation

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu \qquad \text{mit} \qquad (J_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = i(\eta_{\nu\beta}\, \delta^\alpha_\mu - \eta_{\mu\beta}\, \delta^\alpha_\nu)$$

wobei $(J_{\mu\nu})$ die vierdimensionale Darstellung der Lorentzalgebra bildet, unter der Verktorfelder V^ν transformieren.