Quantenfeldtheorie I **WS 14/15** **Prof. Jan Plefka**

Übungsblatt 3

Abgabe Mittwoch 19.11 nach der Vorlesung – Besprechung am Freitag 21.11

Aufgabe 3.1 – Quantisierung des freien komplexen Skalarfeldes (10 Punkte)

Die Theorie eines freien, komplexen Skalarfeldes $\phi = \phi(x)$ ist durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

definiert. Da ein komplexes Skalarfeld zwei Freiheitsgrade besitzt, können wir ϕ und ϕ^* als unabhängige Felder betrachten.

i) Finden Sie die konjugierten Impulse $\pi(\vec{x})$ und $\pi^*(\vec{x})$ zu $\phi(\vec{x})$ und $\phi^*(\vec{x})$ und die kanonischen Kommutatorrelationen. Hierbei wählen wir $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$.

ii) Wie lautet der Hamiltonoperator der Theorie?

iii) Führen Sie Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein um den Hamiltonoperator zu diagonalisieren.

iv) Zeigen Sie, dass die Theorie zwei Spezies von Teilchen mit der Masse m enthält.

v) Betrachten Sie die erhaltene Ladung

$$Q = \frac{i}{2} \int d^3x \, (\pi\, \phi - \phi^* \, \pi^*) \, .$$

Schreiben Sie diese um in die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und bestimmen Sie die Ladungen der beiden Teilchenspezies.

Aufgabe 3.2 – Dirac vs. Weyl Darstellung der Clifford Algebra (5 Punkte)

Mithilfe der Pauli Matrizen σ^i $(i = 1{,}2{,}3)$ lassen sich die verallgemeinerten Paulimatrizen

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

definieren. In der Vorlesung haben wir die Weyl-Darstellung der Gammamatrizen kennengelernt:

$$\gamma^\mu_W = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma^\mu := \{\mathbf{1},\vec{\sigma}\} , \quad \bar{\sigma}^\mu := \{\mathbf{1}, -\vec{\sigma}\} .$$

Eine alternative Darstellung ist die Dirac-Darstellung der Gammamatrizen,

$$\gamma_D^0 = \sigma^0 \otimes \sigma^3 \,, \qquad \gamma_D^i = \sigma^i \otimes i\sigma^2 \,,$$

die mithilfe des Tensorproduktes zweier 2×2 Matrizen definiert sind, dass als 4×4 Matrix in 2×2 Blockform die Gestalt

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} B_{11}\, A & B_{12}\, A \\ B_{21}\, A & B_{22}\, A \end{pmatrix}$$

annimmt. Zeigen Sie, dass

i) $(A \otimes B)\,(C \otimes D) = (A\,C) \otimes (B\,D)$ gilt.

ii) Beide Darstellungen der Cliffordalgebra genügen.

iii) Beide Darstellungen äquivalent sind, d.h. $\gamma_W^\mu = T\,\gamma_D^\mu\,T^{-1}$ gilt, für eine geeignete Matrix T.

Tip: Es mag hilfreich sein auch γ_W^μ als Tensorprodukt von Pauli-Matrizen zu schreiben.

Aufgabe 3.3 – Spinsummenrelationen (5 Punkte)

Leiten Sie die in der Vorlesung verwendeten Spinsummenrelationen

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\,\bar{u}^s(p) = \gamma \cdot p + m \qquad \sum_{s=1,2} v^s(p)\,\bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m$$

her, wobei wir die Spinoren $u^s(p)$ und $v^s(p)$ in der Lösung der Diracgleichung als

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix} \qquad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}\,\eta^s \end{pmatrix}$$

identifiziert hatten und wir eine orthonormale Basis für die zweikomponentigen Weylspinoren ξ^s und η^s verwenden wollen.