Quantenfeldtheorie I **WS 14/15** **Prof. Jan Plefka**

Übungsblatt 4

Abgabe Mittwoch 10.12 nach der Vorlesung – Besprechung am Freitag 12.12

Aufgabe 4.1 – Ladungsoperator des Diracfeldes (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich der Operator der elektromagnetischen Ladung des Diracfeldes

$$Q := \int d^3x \; : \psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{x}) :$$

in Erzeugern und Vernichtern wie

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \sum_{s=1,2} (\, a_{\vec{p}}^{s\,\dagger}\, a_{\vec{p}}^{s} - b_{\vec{p}}^{s\,\dagger}\, b_{\vec{p}}^{s}\,)$$

schreiben lässt. Was folgt für den Kommutator $[Q, \psi(\vec{x})]$?

Aufgabe 4.2 – Majoranaspinoren (10 Punkte)

Ungeachtet unserer Beobachtung in der Vorlesung, dass sich für einen chiralen Diracspinor ψ_L alleine kein relativistisch invarianter Massenterm anschreiben läßt, gibt es dennoch eine Möglichkeit massive, zweikomponentige Weylspinoren einzuführen. Hierzu betrachten wir den Weylspinor χ_α (mit $\alpha = 1{,}2$), der wir ein linkshändiger Diracspinor transformieren soll

$$\chi \to e^{-\frac{1}{2}(\vec{\beta}+i\vec{\theta})\,\vec{\sigma}}\,\chi$$

mit dem Rotationsvektor $\vec{\beta}$ und dem Boostvektor $\vec{\sigma}$ (vergl. Vorlesung).

a) Zeigen Sie nun, dass sich $i\sigma^2\,\chi^*$ wie ein rechtshändiger Diracspinor ψ_R transformiert. (Tip: Zeigen Sie zunächst, dass $\sigma^{i\,*} = -\sigma^2\,\sigma^i\,\sigma^2$ ist)

b) Ein Majoranaspinor ist dann ein Diracspinor, der sich aus χ mittels dieser Konstruktion ergibt:

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \chi \\ i\,\sigma^2\,\chi^* \end{pmatrix}$$

Leiten Sie die relativistisch invariante Bewegungsgleichung für χ ab, indem Sie die Diracgleichung für ψ_M in links- und rechtshändige Komponenten zerlegen. Sie sollten zwei zu

$$i(\partial_0 - \vec{\sigma}\,\vec{\nabla})\chi - im\,\sigma^2\,\chi^* = 0 \qquad (1)$$

äquivalente Gleichungen erhalten. Argumentieren Sie, warum die obere Gleichung relativistisch kovariant ist.

c) Leiten Sie nun aus Ihrer Kenntnis der Diracwirkung[1] die Lagrangedichte eines Majoranafermions ab:

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = 2i\,\chi^\dagger\,\bar{\sigma}\cdot\partial\chi + im(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*)$$

Ist $S = \int d^4x\,\mathcal{L}_{\text{Majorana}}$ reell? Überzeugen Sie sich ferner, dass der obige Massenterm nur Sinn macht, falls χ_α Werte in einer Grassmannalgebra einnimmt, d.h. das χ_α antikommutierende c-Zahlen darstellt.

d) Wie lautet die allgemeine Lösung des Majoranafeldes? Gehen Sie hierfür von der allgemeinsten Lösung für ein linkshändiges Diracfeld ψ_L aus und implementieren Sie die Bedingung $\psi_R = i\sigma^2\psi_L^*$.

e) Ist $\chi \to e^{i\alpha}\chi$ eine Symmetrie der massiven Majoranawirkung? Diskutieren Sie die Konsequenz ihrer Erkenntnis für die elektromagnetische Ladung eines Majoranafermions.

Aufgabe 4.3 – P,T und C Transformationen (5 Punkte)

Wie lauten die Transformationseigenschaften unter Parität (P), Zeitumkehr (T) und Ladungskonjugation (C) der bilinearen Ausdrücke

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\,?$$

Verwenden Sie hier die Transformationseigenschaften

$$P\psi(t,\vec{x})P = \gamma^0\psi(t,-\vec{x}) \qquad T\psi(t,\vec{x})T = -\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\vec{x}) \qquad C\psi(t,\vec{x})C = -i(\bar{\psi}(t,\vec{x})\gamma^0\gamma^2)^T$$

wobei zu beachten ist, dass T ein anti-linearer Operator im Sinne von

$$T\,(\text{c-Zahl}) = (\text{c-Zahl})^*\,T$$

ist.

[1] Wir hatten $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi$.