Quantenfeldtheorie I **WS 14/15** **Prof. Jan Plefka**

Übungsblatt 5

Abgabe Mittwoch 07.01 nach der Vorlesung – Besprechung am Freitag 09.01

Aufgabe 5.1 – Kopplungen in allgemeinen Dimensionen (5 Punkte)

Wir wollen die Dimensionalitäten von Feldern und Kopplungen in allgemeinen Raumzeitdimensionen untersuchen. Überlegen Sie sich hierzu zunächst welche Dimensionen ein Skalarfeld ϕ, ein Fermion ψ und ein Eichfeld A_μ in eine d dimensionalen Raumzeit besitzt. Hierzu geht man von der jeweils freien massenlosen Theorie aus:

$$\int d^dx\, \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\,, \qquad \int d^dx\, \bar{\psi}\partial_\mu\psi\,, \qquad -\tfrac{1}{4}\int d^dx\, (F_{\mu\nu})^2\,.$$

Bestimmen Sie nun die Dimensionalität der Kopplungskonstanten für die allgemeinen Wechselwirkungsterme

$$\mathcal{L}_{WW}^{(n,m)} = \mu_{n,m}\, (\bar{\psi}\psi)^n\, \phi^m$$

wobei $n,m = 0,1,2,3,\ldots$. Geben Sie nun explizit die Werte von n,m in einer Tabelle an für die diese Wechselwirkungen in $d = 2,3,5$ Dimensionen renormierbar sind. Können Sie Aussagen für allgemeines $d > 1$ machen?

Aufgabe 5.2 – Zweipunktsfunktion in der ϕ^4 Theorie (10 Punkte)

i) Geben Sie die Entwicklung der Zweipunktsfunktion $\langle\Omega|T\{\phi(x)\,\phi(y)\}|\Omega\rangle$ der ϕ^4 Theorie bis zur Ordnung λ^2 graphisch und explizit im Impulsraum an, ohne die Integrationen auszuführen. Bestimmen Sie ferner den Divergenzgrad der entstehenden Feynmangraphen.

   Hierbei verstehen wir unter dem Divergenzgrad die naive UV-Divergenz, die bei der Integration über den Impulsraum entsteht, z.B.

$$\int d^4p\, \frac{1}{p^2 - M_1^2} \sim \Lambda^2\,, \qquad \int d^4p\, \frac{1}{p^2 - M_1^2}\, \frac{1}{(p-q)^2 - M_2^2} \sim \log\Lambda$$

   Hier ist das erste Integral ist quadratisch divergent mit Divergenzgrad 2, das zweite logarithmisch mit Divergenzgrad 0. Λ bezeichnet eine per Hand eingefügte obere Impulsgrenze ("cutoff"). Negative Divergenzgrade bezeichnen konvergente Integrale.

ii) Malen sie weiterhin alle Feynmangraphen der Ordnung λ^3 auf und geben Sie die naiven Divergenzgrade an!

Aufgabe 5.3 – Exponentation der Vakuumgraphen in der ϕ^4 Theorie (5 Punkte)

In der Volesung wurde die Exponentiation der Vakuumgraphen behauptet, d.h. für V_i die verbundenen Vakuumgraphen soll gelten

$$(\text{Summe aller Vakuumgraphen}) = \sum_{n_i=1}^{\infty} (\prod_{i=1}^{n_i} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} = \exp[\sum_{i=1}^{\infty} V_i] \, .$$

Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit durch explizite Berechung in niederen Ordnungen. Können Sie einen allgemeinen Beweis angeben?

Wir wünschen Ihnen ein Frohes Weihnachtsfest und einen Guten Start ins Neue Jahr!