Exkurs

Spezielle Relativitätstheorie

Robert Riemann, Thomas Murach

Institut für Physik
Humboldt-Universität zu Berlin

30. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

Gliederung

Vorbemerkung

- Die Sprache der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, ist die Mathematik.
- Oft wurde die Mathematik aus Notwendigkeit für die Physik weiterentwickelt.
- Ein Beispiel hierfür wäre das Ableiten von Funktionen, dass maßgeblich von Isaac Newton entwickelt wurde.
- So braucht man sich nicht zu wundern, dass ein tieferer Einblick in die Physik einen ebenso tiefen in die Mathematik erfordert.

Erweiterung der Reellen Zahlen

Die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden folgendermaßen erweitert:

Menge der Komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R}\} \text{ , mit } i = \sqrt{-1} \text{ bzw. } i^2 = -1 \quad (1)$$

Komplexe Zahlen kommen in der Natur *nicht* vor! Physikalisch messbare Größen (z.B. Stromstärke, Zeit, etc.) sind reel.

Beispiele für Komplexe Zahlen:

- $z = 23 + i \cdot 29$
- $z = \frac{12 - i \cdot 6}{1 + i}$
- $z = \frac{1}{i} = -i$

Motivation

Doch wozu braucht man die Komplexen Zahlen?

Einige Vorteile:

- Die Wurzel einer beliebigen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist nun definiert.
  $\sqrt{-5} = \sqrt{i^2 \cdot 5} = i \cdot \sqrt{5}$
- Ein Polynom P n-ten Grades hat genau n Nullstellen, die unter Umständen komplex sein können.
  $P(x) = x^2 + 1$ ist Polynom 2-ten Grades: Nullstellen $x_{1,2} = \pm i$

Motivation

Bilde die Ableitung für folgende Funktion: $f(x,c) = -c \cdot \ln\cos x$.

Motivation

Bilde die Ableitung für folgende Funktion: $f(x,c) = -c \cdot \ln\cos x$.

Bilde die Ableitung von $R = \frac{U}{I}$.

Motivation

Bilde die Ableitung für folgende Funktion: $f(x, c) = -c \cdot \ln \cos x$.

Bilde die Ableitung von $R = \frac{U}{I}$.

Problem

Die Ableitung ist nicht eindeutig definiert, wenn die Funktion von mehr als einer Variable abhängt.

Differentialoperator

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Differentialoperator

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\,, \quad f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f \tag{2}$$

Der Differentialoperator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ kann als eine weitere Schreibweise der Ableitung verstanden werden.

Konvention

Der Strich an einer Funktion steht für die Ableitung nach dem Ort, der Punkt auf der Funktion für die Ableitung nach der Zeit.

Motivation

Es lassen sich in der Physik nur wenige Probleme analytisch[1] lösen.

[1] Die Lösung eines Problems wird als analytisch bezeichnet, wenn sie – im Gegensatz zu numerischen Lösungen – in Form von bekannten Funktionen, Konstanten etc. angeschrieben werden kann. (wp)

Motivation

Es lassen sich in der Physik nur wenige Probleme analytisch[1] lösen.

Das bedeutem im konkreten Fall nach 2 Jahren Studium: 2

1. Die Bewegung eines an einer Feder aufgehängten Gewichtes (ohne Reibung).
2. Die Bewegung zweier sich anziehender (Himmels-)Körper (ohne Reibung).

Alle anderen Probleme müssen auf diese 2 Fälle zurückgeführt, oder durch Näherungen vereinfacht und mit dem PC ausgerechnet werden.

[1] Die Lösung eines Problems wird als analytisch bezeichnet, wenn sie – im Gegensatz zu numerischen Lösungen – in Form von bekannten Funktionen, Konstanten etc. angeschrieben werden kann. (wp)

Näherungen

Sprichwort

“Physik ist die Wissenschaft von der richtigen[2] Näherung an der richtigen Stelle.”

Mathematisches Hilfsmittel zur Näherung: Taylor-Entwicklung

Satz von Taylor / Taylor-Formel

$$\mathrm{T} : f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!} x^n \cdot f^{(n)}(0) + \mathcal{O}(x^{(n+1)}) \quad (3)$$

$$\approx f(0) + xf'(0) + \tfrac{1}{2}x^2 f''(0) + \tfrac{1}{6}x^3 f'''(0) + \ldots \quad (4)$$

[2] hier im Sinne von gültig

Beispiele

Wurzelterme

$$\mathrm{T}: f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2) \tag{5}$$

Brüche

$$\mathrm{T}: f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 + x \cdot \frac{-1}{(1+0)^2} = 1 - x + \mathcal{O}(x^2) \tag{6}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\mathrm{T}: f(x) = sin(x) = 0 + x \cdot \cos 0 = x + \mathcal{O}(x^2) \tag{7}$$

Gliederung

Konstante Lichtgeschwindigkeit

- Michelson-Morley-Interferometer: Lichtgeschwindigkeit überlagert sich nicht mit Erdgeschwindigkeit.
- Einige komplizierte Äther-Theorien später: Lichtgeschwindigkeit $c = const$.
- Ausbreitung einer Lichtwelle in 2 Koord.-Systemen $\sum$ und $\sum'$, wobei $c = c'$: $0 = \vec{x}^2 - c^2 \cdot t^2 = \vec{x}'^2 - c^2 \cdot t'^2$

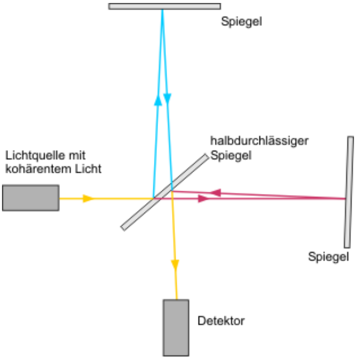

Abbildung: Michelson-Morley-Interferometer (wp)

Koordinatensysteme

Inertialsystem

Ein *Inertialystem* ist ein Koordinatensystem, welches bezüglich des Fixsternhimmels keine Beschleunigung erfährt.

Koordinatentransformation

Das Umrechnen von Koordinaten, die in System $\sum$ gemessen wurden, in Koordinaten, wie man sie in System $\sum'$ messen würde, heißt *Koordinatentransformation*.

Koordinatentransformation I

Suchen nun: $x' = x'(x,t)$ und $t' = t'(x,t)$

- Linearer Ansatz mit 4 Konstanten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$:
  $x' = a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot t$
  $t' = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot t$
- 4 Bedingungen:
  $\vec{x}^2 - c^2 \cdot t^2 = \vec{x}'^2 - c^2 \cdot t'^2$ ergibt nach Einsetzten 3 Bed.
  $x = v \cdot t + x'_0$ und $x'_0 = 0$ ergibt insgesamt 1 Bedingung
- Zusatzbedingung: mit $v = 0$ folgt $x = x'$ (Konsistenz-Check)

Koordinatentransformation II

Ergebnis

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x - vt) \quad \text{, mit } \beta = \frac{v}{c}\text{, } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8}$$

$$t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x - \frac{v}{c^2}) \tag{9}$$

"Spezielle Lorentz-Transformation" (H. A. Lorentz)

Längenkontraktion

Zur Herleitung betrachtet man die Endpunkte eines bewegten (Maß-)Stabes aus dem Ruhesystem[3] des Stabes sowie des Beobachters.

Längenkontraktion

$$\Delta x = \underbrace{\sqrt{1-\beta^2}}_{\leq 1} \Delta x' \tag{10}$$

Bewegte Maßstäbe erscheinen kürzer.

[3] in $\sum^{Ruhesystem} : v_{Stab} = 0$

Zeitdilatation

Einstein'sche Definition der Gleichzeitigkeit

“Zwei in den Punkten A und B in $\sum$ stattfindende Ereignisse sind gleichzeitig, wenn von ihnen ausgehende Lichtsignale sich im Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ treffen.”

Die Vorgehensweise bei der Herleitung ist ähnlich zu der der Längenkontraktion.

Zeitdilatation

$$\Delta t' = \underbrace{\sqrt{1-\beta^2}}_{\leq 1}\Delta t \,, \text{ bzw. } \Delta t = \underbrace{\gamma}_{\geq 1}\Delta t' \tag{11}$$

Bewegte Uhren gehen langsamer.

Gliederung

Beispiele

Länge eines mit Geschwindigkeit $v = 0,1c$ fahrenden Zuges

Für die Insassen ($\sum'$):
Geschwindigkeit $v' = 0$, Länge l'
Für den Bahnhofimbiss ($\sum$):
Geschwindigkeit $v = 0,1c$, Länge $l = \sqrt{1 - 0,1^2}l' \approx 0,99l'$

Beispiele

Länge eines mit Geschwindigkeit $v = 0,1c$ fahrenden Zuges

Für die Insassen ($\sum'$):
Geschwindigkeit $v' = 0$, Länge l'
Für den Bahnhofimbiss ($\sum$):
Geschwindigkeit $v = 0,1c$, Länge $l = \sqrt{1 - 0,1^2} l' \approx 0,99 l'$

Länge einer Werbeunterbrechung im Bord-Kino des Sternzerstörers mit Reisegeschwindigkeit $v = 0,5c$

Für die Insassen ($\sum'$):
Geschwindigkeit $v' = 0$, Dauer t'
Für den Fixsternhimmel ($\sum$):
Geschwindigkeit $v = 0,1c$, Dauer $t = \frac{1}{\sqrt{1-0,5^2}} t' \approx 1,16 t'$

Quellen, Lizenz

R. Riemann, T. Murach.
Computational Physics Serie 2, Humboldt-Universität SS09

(wp)
http://de.wikipedia.org