M12 SAITENSCHWINGUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

<u>Grundbegriffe:</u> Stehende Wellen, Wellengleichung, Grund- und Oberschwingung, Eigenfunktionen und Eigenwerte, Fourieranalyse und -synthese.

<u>1. Saitenschwingung:</u> Unter einer Saite versteht man einen elastischen Körper, der in seinen Querabmessungen auf die unmittelbare Umgebung der neutralen Faser reduziert ist, so dass er einer Biegung keinen Widerstand entgegensetzt. Experimentell realisiert man die Saite z.B. durch einen dünnen Metalldraht. Die Ruhelage eines Stabes ist aufgrund der elastischen Kräfte im Material räumlich fixiert, wenn er in einer Stelle eingespannt ist (vgl. Versuch M9). Dagegen ist die Ruhelage einer Saite erst definiert, wenn sie an beiden Enden fest eingespannt ist und eine axiale Normalspannung $\sigma = F_0 / A$ (F_0 = Zugkraft, A = Querschnitt) wirkt. Lenkt man eine Saite aus ihrer Ruhelage aus (durch Streichen oder Zupfen), so treten rücktreibende Kräfte auf, und die Saite kehrt in Form einer gedämpften longitudinalen und transversalen Schwingung in ihre Ruhelage zurück.

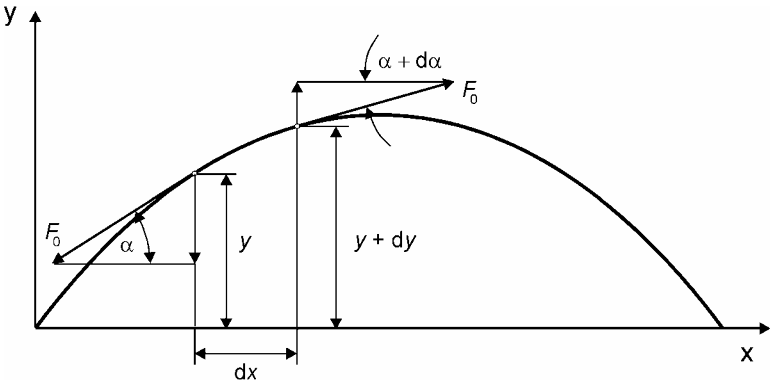

Abb. 1 ABLEITUNG DER WELLENGLEICHUNG

Im vorliegenden Versuch beobachtbar und für die Akustik der Saiteninstrumente interessant sind nur die transversalen Schwingungen.

<u>2. Differentialgleichung einer schwingenden Saite:</u> Zur Ableitung der Bewegungsgleichung einer ungedämpft schwingenden Saite wird vorausgesetzt, dass die Bewegung in der x-y-Ebene (Abb. 1) erfolgt und der Einfluss der Schwerkraft vernachlässigt werden kann. Eine Saite der Länge l, des Querschnittes A und der Massendichte ρ bzw. der linearen Massendichte $\mu = A \cdot \rho$ wird durch die Kraft F_0 gespannt.

Wird die Saite transversal ausgelenkt (Abb. 1), so wirkt auf das Saitenelement dx die rücktreibende resultierende Kraft

$$\mathrm{d}F = F_0 \sin(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - F_0 \sin\alpha \,. \tag{1}$$

Für kleine Auslenkungen der Saite gilt näherungsweise

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \sin(\alpha + \mathrm{d}\alpha) \approx \alpha + \mathrm{d}\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x \,,$$

und man erhält

$$\mathrm{d}F = F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x \,. \tag{2}$$

Diese Kraft führt zu einer Beschleunigung des Massenelementes $\mathrm{d}m = \rho A \mathrm{d}x = \mu \mathrm{d}x$ und es folgt mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F_o}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,. \tag{3}$$

Diese Differentialgleichung zeigt, dass die Transversalschwingungen nicht von der Elastizität sondern nur von der Spannkraft F_0 und der linearen Massendichte μ der Saite abhängen. Das Ergebnis war zu erwarten, da die mit der Auslenkung verbundene Längsdehnung von $\mathrm{d}x$ bei der Herleitung vernachlässigt wurde. Mit einer erweiterten Herleitung kann gezeigt werden, dass die Dehnung und damit die durch den Elastizitätsmodul E beschriebene Elastizität die Ursache für die immer auch auftretenden Longitudinalschwingungen ist, welche einer der Gl. (3) sehr ähnlichen Bewegungsgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,. \tag{4}$$

Die Größe ξ kennzeichnet hier die Auslenkung der Massenelemente in der x-Richtung.

3. Diskussion der Wellengleichung: Die Bewegungsgleichungen Gl. (3) und Gl. (4) der Saite sind Spezialfälle der allgemeinen eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{5}$$

Diese Wellengleichung wird gelöst durch alle Funktionen $u(x,t) = \mathrm{f}(x \pm ct)$, die zweimal nach x und t differenzierbar sind. Wählt man einen bestimmten Argumentwert $a_1 = x + ct = \mathrm{const}$ der Lösung u der Wellengleichung, so folgt nach Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x + ct) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + c\,,$$

d. h. der betrachtete Argumentwert a_1 breitet sich mit der Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -c$ in Richtung der negativen x-Achse aus. Das negative Vorzeichen im Lösungsansatz ergibt eine Ausbreitung in Richtung der positiven x-Achse. c ist nicht die Geschwindigkeit eines Körpers, sondern eines physikalischen Zustandes, d.h. des Argumentwertes a_1. Man bezeichnet $x \pm ct$ als die Phase und c als die Phasengeschwindigkeit der sich ausbreitenden Welle. Durch Koeffizientenvergleich (Gl. (3) bzw. Gl. (4)) erhält man für die Phasengeschwindigkeit der Transversal- bzw. Longitudinalwelle der schwingenden Saite

$$c^{\mathrm{trans}} = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \qquad \text{bzw.} \qquad c^{\mathrm{long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,. \tag{6}$$

4. Lösung für stehende Wellen: Um die Bewegung einer ungedämpft schwingenden Saite zu beschreiben, benötigt man eine Lösung der Wellengleichung (Gl. (5)), die auch die experimentell gegebenen Randbedingungen erfüllt. Die Randbedingungen aufgrund der Einspannung der Saite sind:

$$\text{für alle } t \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{7}$$

Die Anfangsbedingung ($t = 0$) sei so gewählt, dass die Saite durch die Ruhelage schwingt:

$$\text{für } t = 0 \qquad u(x,0) \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{du(x,0)}{dt} \neq 0 . \tag{8}$$

Betrachtet man in Richtung der x-Achse zwei sich entgegengesetzt ausbreitende harmonische Wellen $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$

$$u_1(x,t) = A\cos(\omega t - \omega \frac{x}{c}) \qquad u_2(x,t) = A\cos(\omega t + \omega \frac{x}{c}),$$

so erfüllen sie zwar beide die Wellengleichung, aber nicht die Rand- und Anfangsbedingung. Die Wellengleichung ist eine lineare Differentialgleichung, deshalb ist auch jede Linearkombination aus u_1 und u_2 eine Lösung der Wellengleichung, also auch

$$u = u_1 - u_2 = 2A\sin\omega t \cdot \sin\omega \frac{x}{c} . \tag{9}$$

Diese Lösung erfüllt die Anfangsbedingung $u(x,0) = 0.$ Die Randbedingungen

$$u(0,t) = 2A\sin\omega t \cdot \sin\omega \frac{0}{c} = 0$$

$$u(l,t) = 2A\sin\omega t \cdot \sin\omega \frac{l}{c} = 0$$

sind für die Kreisfrequenzen

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \frac{c}{2l} n \qquad n = 1,2,3..... \tag{10}$$

der schwingenden Saite erfüllt. Aufgrund dieses Lösungsansatzes kann man die Schwingungsform der Saite als die Superposition zweier entgegengesetzt laufender Wellen gleicher Frequenz auffassen, wobei aufgrund der Randbedingungen aber nicht mehr jede Kreisfrequenz, sondern nur noch eine diskrete Folge möglich ist (Gl. (10)). Für die Transversal- bzw. Longitudinalschwingung ergeben sich mit Gl. (6) die Frequenzen

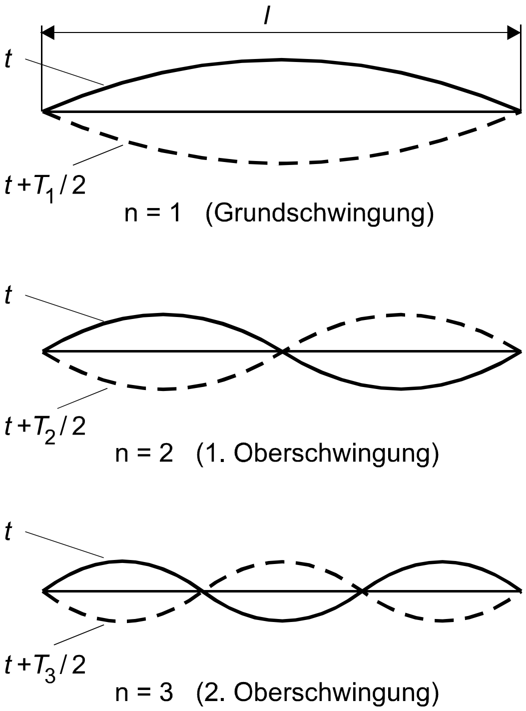

Abb. 2 AMPLITUDENVERTEILUNG FÜR VERSCHIEDENE n-WERTE

$$f_n^{trans} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \qquad \text{bzw.} \qquad f_n^{long} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad n = 1, 2, 3 ... \tag{11}$$

Setzt man die möglichen Kreisfrequenzen (Gl. (10)) in die Lösung (Gl. (9)) ein, so erhält man

$$u_n = A_n \sin(n\frac{\pi}{l} c\,t) \cdot \sin(n\frac{\pi}{l} x) . \tag{12}$$

Betrachtet man diese Lösung für ein festes n, so kann man sagen, dass alle Punkte der Saite phasengleich mit der Amplitude $A_n \sin(n\frac{\pi}{l} x)$ schwingen. Die Darstellung der Amplitudenverteilung (Abb. 2) zeigt den Schwingungszustand für einen Zeitpunkt t maximaler Saitenauslenkung (ausgezogene Linie) und die entgegengesetzte Auslenkung zum Zeitpunkt $t' = t + T_n / 2 = t + 1/2f_n$ (gestrichelt). Zwischen diesen beiden Zuständen schwingt die Saite mit den Frequenzen f_n und da die Nulldurchgänge (so genannte Schwingungsknoten) und die

Orte maximaler Auslenkung (Schwingungsbäuche) ihre räumliche Lage beibehalten, spricht man von einer **stehenden Welle**. An den Einspannstellen entstehen immer Knoten, d. h. die Wellen erleiden bei der Reflexion an den Einspannstellen einen Phasensprung von π. Die Wellenlänge der stehenden Welle ergibt sich wegen $c = \lambda_n f_n$ nach Gl. (10) zu

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \qquad \text{mit} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \,. \tag{13}$$

Wenn auch die Wellenlängen der Transversal- und Longitudinalwellen für die gleiche Eigenschwingung übereinstimmen, so sind doch ihre Frequenzen (Gl. (11)) sehr unterschiedlich. Wegen $E >> F_0 / A$ ist die Frequenz der Longitudinalwellen größer als die der Transversalwellen. Im Versuch können nur die Transversalwellen beobachtet werden.

Im Praktikumsversuch wird eine Saite durch eine harmonische Kraft zu erzwungenen Schwingungen angeregt, so dass bei schwacher Dämpfung der Saite Resonanzen auftreten, wenn mit einer der Eigenfrequenzen angeregt wird (vgl. Versuch M8); die auftretenden großen Amplituden bei Resonanz sind leicht beobachtbar.

<u>5. Lösung mit Eigenfunktionen</u>: Zur Lösung partieller Differentialgleichungen wird häufig die „Separation der Variablen“ gewählt, die hier, wegen ihrer häufigen Anwendung in der Physik (Quantenmechanik) ergänzend dargestellt wird. Nimmt man an, die Lösung der Wellengleichung $u\,(x,t)$ lässt sich als Produkt zweier Funktionen

$$u(x,t) = v(x)\, w(t) \tag{14}$$

darstellen, die jeweils nur von der Variablen x bzw. t abhängen, so wird aus der Wellengleichung

$$v(x) \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 w(t) \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{v(x)} \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{c^2 w(t)} \frac{d^2 w}{dt^2} \,.$$

Da in der letzten Gleichung die linke Seite nur eine Funktion von x und die rechte Seite nur eine Funktion von t ist, kann die Gleichung nur dann für alle t gelten, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten sind, die zweckmäßigerweise mit $-k^2$ bezeichnet wird. Aus der Wellengleichung (Gl. (5)), einer partiellen Differentialgleichung, werden damit zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -k^2\, v(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} = -k^2 c^2 w(t) \,. \tag{15}$$

Die Differentialgleichung für $v(x)$ wird für jedes k durch die Funktionen $\cos kx$ und $\sin kx$ gelöst, so wie auch durch jede Linearkombination aus ihnen. Die Lösung erfüllt aber die Randbedingungen $v(0) = v(l) = 0$ (Gl. (7)) nur für bestimmte, diskrete k-Werte. Wenn die Lösung die Form

$$v(x) = a_n \sin(k_n x)$$

hat, ergeben sich die möglichen k-Werte zu

$$k_n = n\frac{\pi}{l} \qquad \text{mit} \qquad n = 1,2,3,\ldots \,. \tag{16}$$

Diese durch die Randbedingung festgelegten k-Werte heißen **Eigenwerte** und die dazugehörigen Lösungen die **Eigenfunktionen** des Schwingungsproblems. Mit den möglichen k-Werten ergibt sich für die Differentialgleichung für $w(t)$ der Lösungsansatz

$$w(t) = C_n \cos(k_n ct) + D_n \sin(k_n ct),$$

woraus sich die **Eigenfrequenzen**

$$f_n = \frac{c}{2l} n \tag{17}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (10) ergeben. Mit dem Ansatz zur Separation der Variablen (Gl. (14)) können jetzt folgende Lösungen für die Wellengleichung angeben werden

$$u_1 = E_n \sin(k_n ct) \cdot \sin(k_n x) \quad \text{und} \quad u_2 = F_n \cos(k_n ct) \cdot \sin(k_n x).$$

Da die Wellengleichung linear ist, sind auch alle Linearkombinationen dieser Lösungen, also auch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)(a_n \sin(k_n ct) + b_n \cos(k_n ct)) \tag{18}$$

Lösungen der Wellengleichung, vorausgesetzt die unendliche Reihe konvergiert.
Für die betrachtete Anfangsbedingung (Gl. (8)) ergibt sich $b_n = 0$, so dass sich die allgemeine Lösung, wenn man noch die Phasenwinkel α_n einführt, in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(n\frac{\pi}{l} x) \sin(2\pi f_n t + \alpha_n) \tag{19}$$

schreiben lässt. Hieraus folgt der allgemeine Satz:

Jede beliebige periodische Funktion, die den gestellten Rand- und Anfangsbedingungen des Schwingungsproblems genügt, lässt sich als Linearkombination harmonischer Funktionen darstellen (Satz von Fourier, der die Fouriersynthese, aber auch die Umkehrung, die Fourieranalyse von Funktionen, erklärt).

Verschiedene Saiteninstrumente ergeben für die gleiche Grundfrequenz Töne unterschiedlicher Klangfarbe. Diese entsteht dadurch, dass die Amplituden A_n der Oberschwingungen je nach den Anfangsbedingungen unterschiedlich sind und das Verhältnis der Amplituden A_n die Klangfarbe eines Instrumentes bestimmt. Die Phasenkonstante α_n (Gl. (19)) hat keine akustische Bedeutung, weil das menschliche Ohr keine Phasenverschiebungen wahrnimmt.

AUFGABEN

1. Messung der Resonanzfrequenz f_n und Bestimmung der Lage der Schwingungsknoten für $n = 1$ bis 9 bei fester Saitenlänge ($l = 0{,}6\,\mathrm{m}$) und fester Zugspannung (Belastung mit $1\,\mathrm{kg}$ in 3. Kerbe des Lasthebels).
   Grafische Darstellung $f_n = f(n)$ (Gl. (11)) und Bestimmung des Anstiegs a (durch lineare Regression z.B. mit dem PC-Programm Geranull).
   Berechnung der linearen Massendichte μ der Saite aus a und Vergleich mit der Herstellerangabe $\mu = 0{,}78\,\mathrm{g/m}$.
   Berechnung der Phasengeschwindigkeit c^{trans} der Transversalwelle (Gl. (6)).

Überprüfung der Beziehung $\lambda_n = 2l/n$ (Gl. (13)) durch Auswertung der Lage der Schwingungsknoten für die Moden $n = 1$ bis 9.

2. Messung der Resonanzfrequenzen f_1(Grundfrequenzen) für 10 verschiedene Saitenlängen zwischen $l = 20\,\mathrm{cm}$ bis $l = 65\,\mathrm{cm}$ bei fester Zugspannung (Belastung mit $1\mathrm{kg}$ in 3. Kerbe des Lasthebels).
   Grafische Darstellung $f_1 = \mathrm{f}(1/l)$ (Gl. (17), Bestimmung des Anstiegs *a*, Berechnung von c^{trans} und Vergleich mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.
3. Messung der Resonanzfrequenzen f_1 für 10 verschiedene Zugspannungen F_0 bei fester Saitenlänge $l = 0{,}6\,\mathrm{m}$.
   Grafische Darstellung $f_1 = \mathrm{f}(\sqrt{F_0})$ (Gl. (11)), Bestimmung des Anstiegs a, der linearen Massendichte μ und Vergleich mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1 und der Herstellerangabe.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Eine Saite S ist zwischen den Einspannstellen Sp1 und Sp2 ausgespannt (Abb. 3). Ihre Länge l wird durch die verschiebbaren Reiter R1, R2 variiert und an einer Skale abgelesen.
Die Einspannstelle Sp2 ist um die Achse A schwenkbar, und durch Verändern der am Lasthebel L eingehängten Massenstücke M (bis 1 kg) kann die Zugkraft F_0 eingestellt werden. Das Übersetzungsverhältnis des Lasthebels bei horizontaler Lage des Lasthebels kann durch Wahl der entsprechenden Kerbe für das Einhängen der Massestücke ganzzahlig zwischen 1 und 5 gewählt

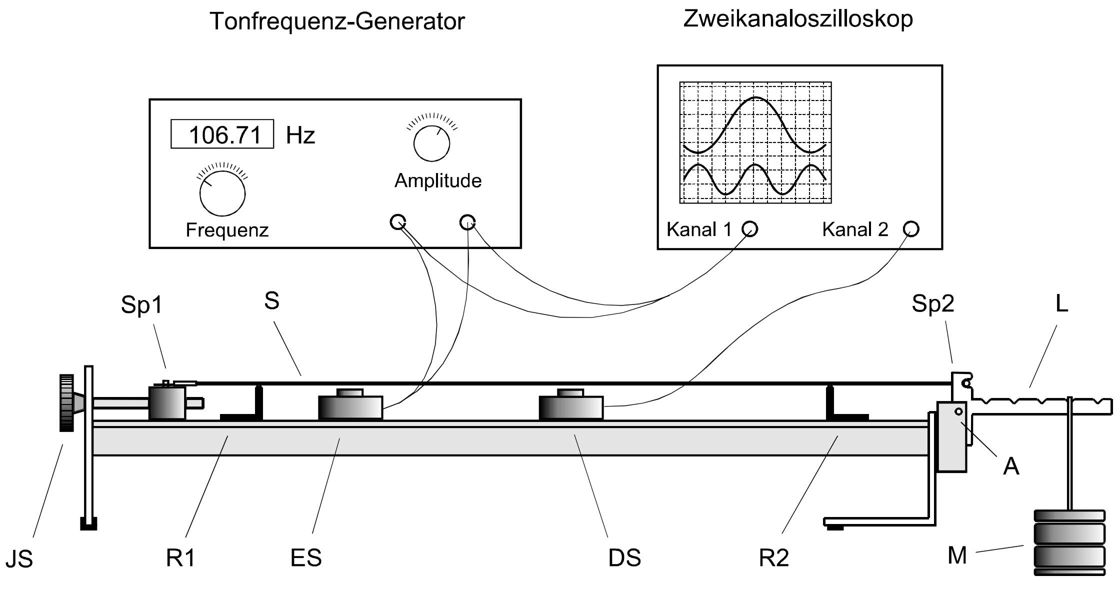

Abb.3 VERSUCHSANORDNUNG

werden. Die lastabhängige Dehnung der Saite muss durch Drehen an der Justierschraube JS derart ausgeglichen werden, dass der Lastarm bei allen Messungen die horizontale Lage beibehält. Bei der Berechnung der Zugkraft F_0 ist zu beachten, dass der Lasthebel allein infolge seines Eigengewichtes einen zusätzlichen Beitrag von 0,52 N liefert.

Die Saite wird durch eine auf einen Weicheisenkern gewickelte Spule ES magnetisch zu Schwingungen angeregt. Ein Tonfrequenzgenerator liefert den Strom für die Spule und erlaubt eine Änderung der Erregerfrequenz. Infolge der geringen Dämpfung der Saitenschwingung ist die Resonanz sehr scharf (vgl. Versuch M8), deshalb muss die Einstellung der Erregerfrequenzen für die Grund- und Oberschwingungen sehr sorgfältig erfolgen.
Das Generatorsignal wird parallel zur Erregerspule ES dem Kanal 1 des Zweikanaloszilloskops (Abb.3) zugeführt.
Infolge der Saitenschwingung wird in der Detektorspule DS, welche auf einen permanentmagnetischen Kern gewickelt ist, eine Wechselspannung erzeugt, welche dem Kanal 2 des Oszilloskops zugeführt wird.
Besondere Hinweise:

- Die Erregerspule ES wird zweckmäßig wenige Zentimeter (ausprobieren) rechts von Reiter R1 angeordnet.
- Die Detektorspule DS kann zum Erfassen der Knoten und Bäuche der Schwingungen zwischen Erregerspule und Reiter R2 verschoben werden. Dabei ist ein Mindestabstand zwischen DS und ES einzuhalten (durch Beobachtung der Signalform am Oszilloskop ausprobieren) um die direkte Wechselwirkung beider zu vermeiden.
- Werden die Kanäle an beiden Kanälen gleichzeitig angezeigt, dann beobachtet man im Resonanzfall an der Detektorspule (Kanal 2) gewöhnlich die doppelte Erregerfrequenz. (Überlegen Sie sich den Grund, siehe hierzu Frage 2 am Ende). Für die Auswertung maßgeblich ist also bei diesem Versuch immer die doppelte Erregerfrequenz.

FRAGEN

1. Erklären Sie die Entstehung des Signals an der Detektorspule DS.
2. Warum schwingt die Saite im Resonanzfall mit der doppelten Erregerfrequenz? (Hinweis: der Kern von ES ist weichmagnetisch)
3. Was versteht man unter der Phasengeschwindigkeit einer Welle?
4. Wie kann man stehende Wellen erzeugen?