



Physikalisches Grundpraktikum

Versuchsprotokoll

M10 - Gyroskop

Versuchsort: NEW 14'212 Platz 4

Versuchsbetreuer: Dr. U. Preppernau

Robert Riemann (521085)

Versuchspartner: Thomas Murach (517771), Henry Kissler (517202)

18. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel	
2	Auswertung	
2.1	Bestimmung des Trägheitsmomentes der Figurenachse	2
2.1.1	Variation Drehmoment	2
2.1.2	Variation Kreiseldrehzahl	3
2.1.3	Gewichtetes Mittel	3
2.1.4	Theoretischer Wert	4
2.2	Bestimmung des Trägheitsmomentes von Achsen senkrecht zur Figurenachse	4
3	Diskussion der Ergebnisse	
3.1	Trägheitsmoment bei Drehung um die Figurenachse	5
3.2	Trägheitsmoment bei Drehung um Achsen senkrecht zur Figurenachse	5

Abbildungsverzeichnis

1	Periodendauer T_P in Abhängigkeit vom reziproken Drehmoment M	3
2	Periodendauer T_P in Abhängigkeit von der Kreiseldrehzahl n	3
3	Periodendauer T_N in Abhängigkeit von der reziproken Kreiseldrehzahl n	4
4	Messprotokoll Teil a	6
5	Messprotokoll Teil b	7
6	Schema des Versuchsaufbau	7

1 Versuchsziel

Das Ziel des Versuches "Gyroskop" ist die experimentelle Bestimmung der Hauptträgheitsmomente der Messapparatur, welche in (6) dargestellt ist. Anschließend erfolgt Vergleich Diskussion des Ergebnisses.

Weitere Information sind der Versuchsbeschreibung im [Skript] (S. 48 ff.) zu entnehmen.

2 Auswertung

2.1 Bestimmung des Trägheitsmomentes der Figurenachse

Laut Skript [Skript] (S. 51) besteht ein anti-proportionaler Zusammenhang zwischen der Periodendauer der Präzession T_P eines Kreisel und dem Drehmoment M , welches wiederum proportional zur Masse m (Abstand r vom Drehpunkt) sowie zur Gravitationsbeschleunigung g ist. Desweiteren ist die Periodendauer proportional zur Kreiseldrehzahl n .

$$T_P = 4\pi^2 J_x \frac{n}{M} = \frac{4\pi^2 J_x}{gr} \frac{n}{m} \quad (1)$$

Diese beiden Zusammenhänge lassen sich durch das Variieren und Festhalten bestimmter Größen untersuchen. Letztendlich kann hierdurch auch auf zwei verschiedene Arten das Trägheitsmoment J_x des Kreisels bei Drehung um seine Figurenachse quantitativ erfasst werden.

2.1.1 Variation des Drehmomentes

Die Variation der Masse führt zu einer definierten Änderung des Drehmomentes.

$$M = \sin \alpha m r g \quad (2)$$

Der Winkel α zwischen Figurenachse und Wirkenslinie der Gravitationsbeschleunigung wird konstant als 90° angenommen. Dies ist natürlich nur eine Näherung, welche sich verfälschend auf das Ergebnis auswirkt.

Um eine gewichtete lineare Regression durchführen zu können, an Hand derer der Anstieg a bestimmt werden kann, müssen die Fehler der Messwerte bekannt sein. So wurde die mehrfache Periodendauer hier dreifach gemessen. Anschließend wurde der Mittelwert der Periodendauer gebildet und der zufällige Fehler so abgeschätzt, dass alle drei Werte gerade im Intervall sind. Der systematische Fehler ist um Größenordnungen kleiner, so dass er hier vernachlässigt werden kann. Natürlich muss die mehrfache Periodendauer noch durch die Anzahl der gemessenen Perioden dividiert werden. Der Fehler für das Drehmoment M geht aus der Unsicherheit des Radius mit $\pm 0,05$ mm hervor. Die

Masse m , die Gravitationsbeschleunigung g wie auch der Winkel α werden als fehlerfrei angenommen.

$$u_{\frac{1}{M}} = \frac{1}{M} \left| \frac{u_r}{r} \right| \quad (3)$$

Die Kreiseldrehzahl n wurde aus beiden Intervallgrenzen heraus gemittelt. Die Unsicherheit ergibt sich aus der halben Intervallgröße. Die systematische Abweichung kann an dieser Stelle auf Grund der großen zufälligen Schwankung vernachlässigt werden.

$$n = (11,8 \pm 0,4) \text{ Hz} \quad (4)$$

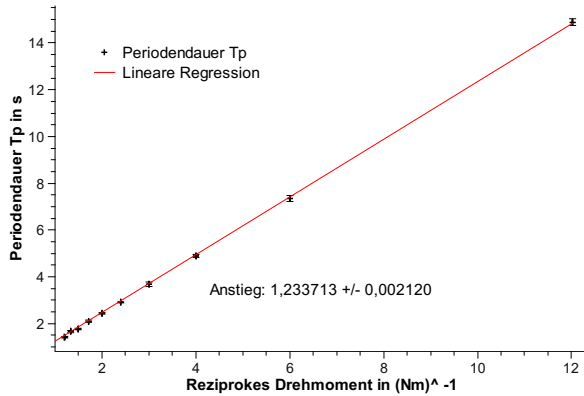


Abbildung 1: Periodendauer T_P in Abhängigkeit vom reziproken Drehmoment M

Nach (1) ergibt sich der Anstieg a nun zu $4\pi^2 J_x n$. Da bis auf J_x alle Größen mit Unsicherheit bekannt sind, kann nun J_x mit Unsicherheit berechnet werden.

$$u_{J_x} = J_x \sqrt{\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_n}{n}\right)^2} \quad (5)$$

$$J_{x,1} = (2,646 \pm 0,085) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (6)$$

2.1.2 Variation der Kreiseldrehzahl

Folgend wird J_x aus dem Anstieg a der linearen Regression des $T = f(n)$ Diagramms berechnet. Die Masse bleibt also konstant, in diesem Fall bei 0,2 kg. Somit ist auch das Drehmoment M insgesamt fixiert. Die Periodendauer T_P wurde zwei mal gemessen. Die Auswertung der Periodendauer innerhalb der Regression erfolgt äquivalent zum Vorgehen in 2.1.1.

Die Bestimmung der jeweiligen Kreiseldrehzahl n aus zwei Intervallgrenzen ist ebenso bereits in 2.1.1 erläutert worden. Jedoch wurde hier zur zufälligen Unsicherheit noch die Systematische Abweichung von 0,01 Hz pythagoräisch hinzuaddiert.

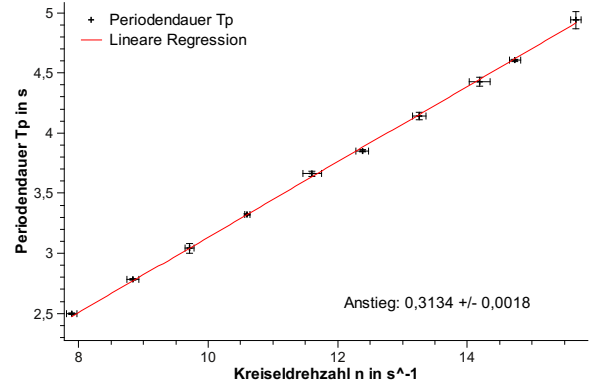


Abbildung 2: Periodendauer T_P in Abhängigkeit von der Kreiseldrehzahl n

Um aus dem Anstieg a , der sich nach (1) zu $4\pi^2 J_x M^{-1}$ ergibt, berechnen zu können, ist noch das Drehmoment M mit Unsicherheit zu berechnen. Nach (2) und (3) erhält man:

$$M = 0,33286(2) \text{ Nm} \quad (7)$$

Der Fehler für J_x ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung zu:

$$J_x = J_x \sqrt{\frac{u_M^2}{M^2} + \frac{u_a^2}{a^2}} \quad (8)$$

Somit erhält man als zweites Ergebnis:

$$J_{x,2} = (2,643 \pm 0,015) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (9)$$

2.1.3 Gewichtetes Mittel

Da sich $J_{x,1}$ und $J_{x,2}$ überschneiden kann nun ein gewichtetes Mittel berechnet werden. Die Vorgehensweise wird dem [MAD] (S. 47) entnommen.

$$J_x = (2,643 \pm 0,015) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (10)$$

Das Ergebnis gleicht bei der hier vorgenommenen Rundung gänzlich $J_{x,2}$. Dies begründet sich durch die unterschiedlich hohe Genauigkeit der Ergebnisse.

2.1.4 Theoretischer Wert

In die Berechnung von $J_{x,\text{th}}$ gehen alle Hohlzylinder ein, die mitrotieren. Dem [Skript] ist die Formel zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines Hohlzylinders der Höhe h mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 zu entnehmen. $d_{1/2}$ bezeichnen die entsprechenden Durchmesser.

$$J = \frac{\rho\pi}{2}h \left(\frac{d_2^4}{2} - \frac{d_1^4}{2} \right) \quad (11)$$

Der Zylinder kann nun, ausgehend von (6) zerlegt werden.

h in mm	d_2 in mm (außen)	d_1 in mm (innen)
14	119,1	91,2
7	24,5	12
6,3	119,1	12
7	42,5	12

Tabelle 1: Zerlegung in einzelne Hohlzylinder

Die Einzelnen Trägheitsmomente müssen anschließend aufsummiert werden. Man erhält:

$$J_{x,\text{th}} = 2,59 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (12)$$

Der Fehler hierfür könnte durch die Fehlerfortpflanzung berechnet werden. Allerdings spielen noch viele weitere Fehlerquellen eine Rolle (siehe 3.1), die in die Rechnung nicht eingingen, so dass eine aufwendige Fehlerrechnung nicht sinnvoll erscheint.

Jedoch kann man den Einfluß der Messgrößen an einem Beispiel untersuchen. Sollte die Drehscheibe keinen Außendurchmesser von 119,1 mm haben, sondern von 119,2 mm, so erhält man ein zusätzliches Trägheitsmoment von $0,01 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$. Dieser Wert entspricht also der Abweichung, wenn der Radius um nur 0,05 mm größer wäre.

Insgesamt muss die Unsicherheit von $J_{x,\text{th}}$ also recht hoch sein, jedoch noch in der selben Größenordnung, wie die Unsicherheit der experimentell ermittelten Werte liegen.

2.2 Bestimmung des Trägheitsmomentes von Achsen senkrecht zur Figurenachse

Dem [Skript] ist folgende Formel für die Periodendauer T_N der Nutation zu entnehmen, wobei J_S das Trägheitsmoment der Achsen senkrecht zur Figurenachse ist.

$$T_N = \frac{J_s}{J_x} \frac{1}{n} \quad (13)$$

Vorhergehend wurde nun schon J_x bestimmt und ist somit bekannt. Nun kann durch lineare Regression des Graphen $T_N = f(\frac{1}{n})$ der Anstieg a ermittelt und mit $a = \frac{J_s}{J_x}$ das gesuchte Trägheitsmoment J_s berechnet werden.

Die Berechnung von T_N und n sowie deren Unsicherheit geschieht analog zur vorhergehenden Vorgehensweise (Mittelwertbildung, Unsicherheit grade so groß, dass alle Werte genau im Intervall sind).

Der Fehler für $\frac{1}{n}$ berechnet sich nach Anwendung der Fehlerfortpflanzung folgendermaßen:

$$u_{\frac{1}{n}} = \frac{u_n}{n^2} \quad (14)$$

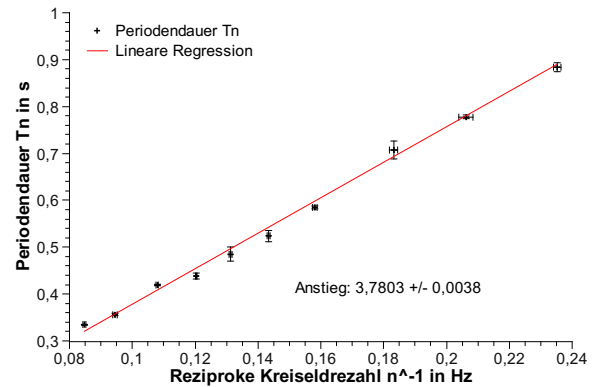


Abbildung 3: Periodendauer T_N in Abhängigkeit von der reziproken Kreiseldrehzahl n

Der Fehler für $J_s = a \cdot J_x$ berechnet sich aus:

$$u_{J_s} = J_s \sqrt{\left(\frac{u_a}{a} \right)^2 + \left(\frac{u_{J_x}}{J_x} \right)^2} \quad (15)$$

Als Ergebnis erhält man für das Trägheitsmoment J_s :

$$J_s = (9,99 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (16)$$

3 Diskussion der Ergebnisse

3.1 Trägheitsmoment bei Drehung um die Figurenachse

Methode	Ergebniss in 10^{-3} kg m^2
Variation M	$2,65 \pm 0,09$
Variation n	$2,64 \pm 0,02$
gew. Mittel	$2,64 \pm 0,02$
Theoriewert	2,59

Tabelle 2: Übersicht der Messergebnisse für J_x

Das die beiden experimentell ermittelten Werte sehr nahe beieinander liegen zeigt, dass die Unsicherheit der einzelnen Messgrößen möglicherweise zu groß abgeschätzt wurden. Es ist davon auszugehen, dass das Ergebnis tatsächlich eine geringe Unsicherheit in der Größenordnung von 10^{-6} besitzt.

Der Theoriewert fällt erwartungsgemäß zu klein aus. Das ist darauf zurückzuführen, dass nicht alle sich um die Figurenachse drehenden Komponenten des Gyroskops berücksichtigt wurden. So kommt beispielsweise der Gummi wie auch die Kappe hinzu, welche die Achse zur Kreiseleite hin verdeckt.

Natürlich sind auch die experimentell ermittelten Werte noch mit systematischen Fehlern behaftet. So führt zum Beispiel Luftreibung und Reibungsverluste in den Kugellagern dazu, dass die Periodendauer tendenziell länger wird. Dies führt zu einem größeren Anstieg in der linearen Regression und bedeutet letztendlich, dass die Werte für J_x als zu groß bestimmt wurden und ein wenig nach unten, in Richtung des Theoriewerts, korrigiert werden müssten. Dieses Problem kann in einem erweiterten Versuchsaufbau mit einer Vakuum-Glocke ein wenig umgangen werden.

Weiterhin wurde angenommen, dass der Winkel α zwischen \vec{M} und \vec{r} (siehe auch (2)) konstant 90° misst, was jedoch stark idealisiert ist.

Insgesamt sollten die experimentell bestimmten Werte also eine systematische Korrektur nach unten hin erfahren.

3.2 Trägheitsmoment bei Drehung um Achsen senkrecht zur Figurenachse

Methode	Ergebniss in 10^{-3} kg m^2
Variation n	$9,99 \pm 0,06$
Theoriewert	$9,7 \pm 0,5$

Tabelle 3: Übersicht der Messergebnisse für J_s

Auch hier fällt der gemessene Wert zu groß aus. Da J_s zu J_x proportional ist, muss bei einem zu großen J_x natürlich auch J_s zu groß ausfallen.

Hinzu kommen im Fall von J_s natürlich Komponenten, die für die theoretische Berechnung natürlich nicht erfassbar sind. So fehlt der Einbezug von Schraubenteilen sowie des Motors.

Insgesamt stellen also die Messwerte in Bezug auf ihre Referenzwerte keine Überraschung dar.

Literatur und Programme

- [Skript] Physikalisches Grundpraktikum, Optik und Elektrodynamik, Humboldt-Universität 2005
- [MAD] Physikalisches Grundpraktikum, Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik, Humboldt-Universität 2007
- [Paetec] Formeln und Tabellen. 9. Auflage. Paetec. Berlin 2001.
- [SDAV] SciDAVis Version 0.1.3, freie Daten-Analyse-Software, im Internet unter <http://scidavis.sourceforge.net>
- [Maple] Maple 11, Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2007.

18.6.08

Messprotokoll: M10- Gyroskop

Thomas Mauer, 572721
 Robert Riemann, 521085
 + Henry Krieger, 577502

Versuchsplatz 4

Messschieber: $\Delta l = \pm 0,05 \text{ mm}$

Drehzahlmesser: $\Delta n = \pm 0,01 \text{ s}^{-1}$

Digitale Stoppuhr: $\Delta t = \pm 0,01 \text{ s}$

Scheibenträge der Zusatzgewichte: $I = 25 \text{ mm}^2$

3.) Mutation:

Kreiseldrehzahl (Intervalle) in $[\text{s}^{-1}]$	Anzahl der Perioden	T_1 in $[\text{s}]$	T_2 in $[\text{s}]$
4,23 - 4,27	5	4,37	4,47
4,80 - 4,80	5	3,87	3,91
5,42 - 5,50	5	3,63	3,44
6,30 - 6,35	5	2,91	2,94
6,85 - 7,00	5	2,56	2,68
7,59 - 7,65	5	2,35	2,50
8,79 - 8,72	5	2,22	2,16
9,33 - 9,30	15	6,28	6,32
10,50 - 10,65	15	5,32	5,37
11,75 - 11,85	15	5,03	5,00

2.) Periodenhaut für 10 verschiedene Kreiseldrehzahlen

Anzahl der Perioden: 15

Messstück $m = 200 \text{ g}$

Kreiseldrehzahl (Intervalle) in $[\text{s}^{-1}]$	T_1 in $[\text{s}]$	T_2 in $[\text{s}]$
15,60 - 15,76	74,59	73,56
14,65 - 14,82	69,00	69,13
14,03 - 14,35	66,72	66,16
13,15 - 13,36	62,37	61,91
12,28 - 12,48	57,85	57,72
11,46 - 11,75	54,78	55,03
10,56 - 10,64	49,78	49,91
9,64 - 9,78	45,32	45,84
8,75 - 8,93	41,78	41,72
7,81 - 7,97	37,41	37,53

Abbildung 4: Messprotokoll Teil a

1.) Periodenlauf für 10 verschiedene Drehmomente
 Kieselbrechzahl (Intervall) in $[\text{s}^{-1}]$: 11,43 - 12,19

Masse in $[\text{g}]$	Anzahl der Perioden	t_1 in $[\text{s}]$	t_2 in $[\text{s}]$	t_3 in $[\text{s}]$
50	3	44,82	44,41	44,78
100	8	58,85	54,25	58,32
150	12	58,66	58,47	55,16
200	10	37,36	36,68	36,37
250	20	58,03	58,13	58,41
300	20	49,35	48,47	48,56
350	20	42,41	41,56	42,03
400	20	35,59	35,82	35,28
450	20	33,28	33,68	33,82
500	20	28,18	28,56	28,78

18.06.08
R.

Abbildung 5: Messprotokoll Teil b

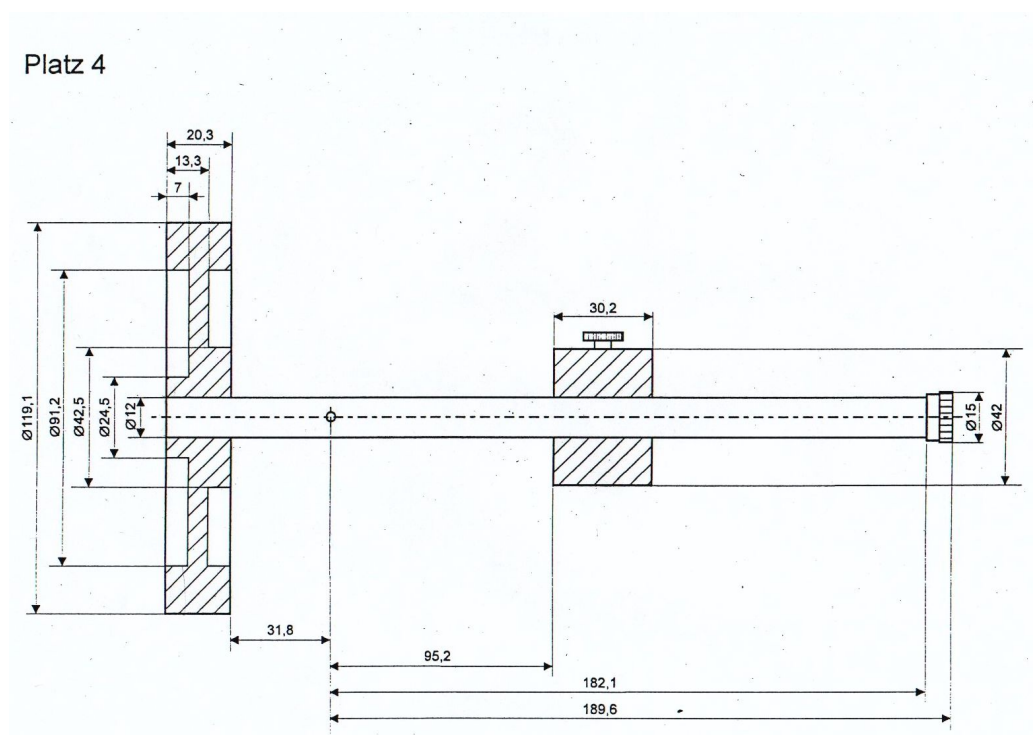


Abbildung 6: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus