

# M2 TRÄGHEITSMOMENTE

## PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

**Grundbegriffe:** Drehmoment, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Trägheitsellipsoid, Dreh-schwingungen.

1. Definition des Trägheitsmomentes. Steinerscher Satz: Das Trägheitsmoment  $J_A$  eines Körpers bezüglich einer Drehachse A ist definiert durch (Abb. 1)

$$J_A = \int l^2 dm = \int l^2 \rho(\vec{r}) dV, \quad (1)$$

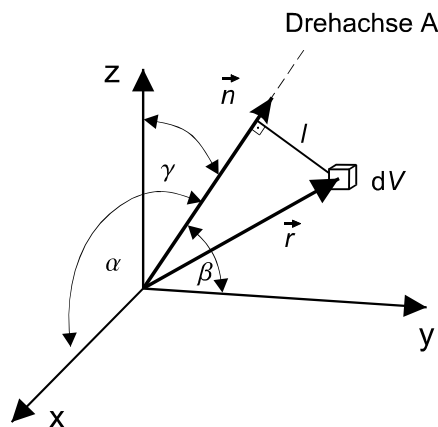


Abb. 1. TRÄGHEITSMOMENT

wobei  $l$  der Abstand des Massenelementes  $dm$  von der Drehachse A ist und unter Berücksichtigung der Dichteverteilung  $\rho(\vec{r})$  über das gesamte Körpervolumen integriert werden muss. Da für jeden Körper unendlich viele Rotationsachsen existieren, ist auch die Zahl der möglichen Trägheitsmomente eines Körpers unendlich. Mit Hilfe des Steinerschen Satzes reduziert sich aber die Zahl der Trägheitsmomente auf die durch den Schwerpunkt gehenden Achsen, wie folgende Betrachtung zeigt:

Für einen beliebig geformten Körper mit dem Schwer-

punkt S und der Gesamtmasse  $m$  soll das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse A, die parallel zu der Schwerpunktsachse S mit dem Trägheitsmoment  $J_S$  liegt, berechnet werden (Abb. 2). Für ein Massenelement  $dm$  mit dem Abstand  $l$  von der Achse A und dem Abstand  $l'$  von der dazu parallelen Schwerpunktschse gilt:

$$J_A = \int l^2 dm$$

$$J_A = \int (l'^2 + a^2 - 2al'\cos\gamma) dm$$

$$J_A = \int l'^2 dm + a^2 \int dm - 2a \int x dm$$

Aus  $\int x dm = 0$  entsprechend der Definition einer Schwerpunktschse folgt der Steinersche Satz:

$$J_A = J_S + ma^2. \quad (2)$$

2. Hauptträgheitsmomente: Bei der Rotation starrer Körper sind Drehimpuls  $\vec{L}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  analog zu  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  bei der Translation durch die Beziehung

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \quad (3)$$

miteinander verknüpft. Die Größe  $J$  liefert entsprechend der Masse  $m$  bei der Translation ein geeignetes Maß für das Beharrungsvermögen bei der Rotation. Da die vektoriellen Größen  $\vec{L}$

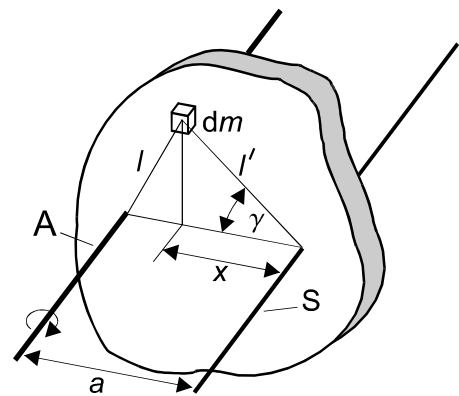


Abb. 2 STEINERSCHER SATZ

und  $\vec{\omega}$  nicht notwendig die gleiche Richtung haben müssen (vergl. Versuch M 10), ist  $\mathbf{J}$  im Unterschied zu  $m$  kein Skalar, sondern ein symmetrischer Tensor 2. Stufe, der so genannte **Trägheitstensor**, dessen 9 Elemente vom gewählten Koordinatensystem abhängen. Unter dem Trägheitstensor versteht man gewöhnlich den Tensor in einem Koordinatensystem, das seinen Ursprung im Schwerpunkt (Schwerpunktsystem) hat. Das Koordinatensystem kann bei festem Ursprung so orientiert werden (Hauptachsentransformation), dass der Tensor Diagonalf orm annimmt. Dieses spezielle Koordinatensystem heißt Hauptachsensystem. Die Gl. (3) lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Die zur Diagonalf orm gehörenden Koordinatenachsen heißen Hauptträgheitsachsen. Die Diagonalelemente sind die Trägheitsmomente bezüglich dieser Achsen. Man nennt sie die Hauptträgheitsmomente des starren Körpers.

3. Trägheitse l l i p s o i d i m H a u p t a c h s e n s y s t e m: Schließt die Drehachse wie in Abb. 1 mit den positiven Richtungen der Hauptträgheitsachsen die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ein, kann für das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse die folgende Beziehung hergeleitet werden:

$$J_{\vec{n}} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (5)$$

Die Richtung der Drehachse im Raum wird durch den Einheitsvektor  $\vec{n}$  festgelegt, dessen Komponenten die Kosinus der Winkel sind, die von der gegebenen Richtung und den positiven Richtungen der Koordinatenachsen gebildet werden (Richtungskosinus).

Definiert man einen Vektor

$$\vec{p} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{J_{\vec{n}}}}, \quad (6)$$

so kann die Gl. (5) umgeformt werden zu

$$J_x p_x^2 + J_y p_y^2 + J_z p_z^2 = 1. \quad (7)$$

Gl. (7) stellt in den Koordinaten  $(p_x, p_y, p_z)$  ein Ellipsoid (Normalf orm), das so genannte Trägheitse l l i p s o i d (Abb. 3), dar. Die Hauptträgheitsmomente geben die Achsenlängen des Ellipsoids an:

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_z}}. \quad (8)$$

Der Abstand  $\rho$  vom Drehpunkt zum Trägheitse l l i p s o i d ist gleich  $\rho = 1/\sqrt{J_{\vec{n}}}$ . Dies erlaubt das Trägheitsmoment  $J_{\vec{n}}$  sofort anzugeben, wenn das Trägheitse l l i p s o i d bekannt ist.

Wenn zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, ist das Trägheitse l l i p s o i d ein Rotationse l l i p s o i d und der starre Körper ein symmetrischer Kreisel. Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, handelt es sich um einen Kugelkreisel. Das Trägheitse l l i p s o i d ist dann eine Kugel.

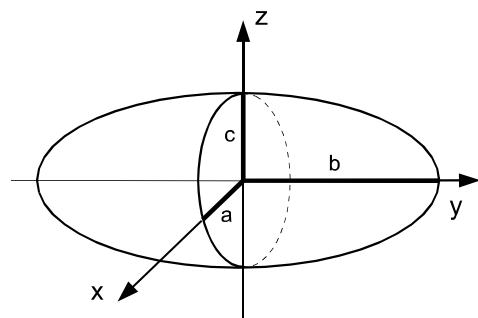


Abb. 3 TRÄGHEITSELLIPSOID

4. Experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten: Ein um eine senkrechte Achse A drehbar gelagerter Teller (Drehtisch Abb. 4a) kehrt nach Auslenkung von Hand infolge der elastischen Deformation der Schneckenfeder Sp in einer schwach gedämpften Drehschwingung in seine Ruhelage zurück. Die Lösung der Bewegungsgleichung bei Vernachlässigung der Dämpfung  $J_A \ddot{\varphi} + D\varphi = 0$  liefert die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{J_A / D}, \quad (9)$$

wobei  $J_A$  das Trägheitsmoment der Anordnung bezüglich A und  $D$  das Richtmoment der Feder ist. Durch definierte Änderung von  $J_A$  um Zusatzträgheitsmomente  $J_Z$  mittels einer radial

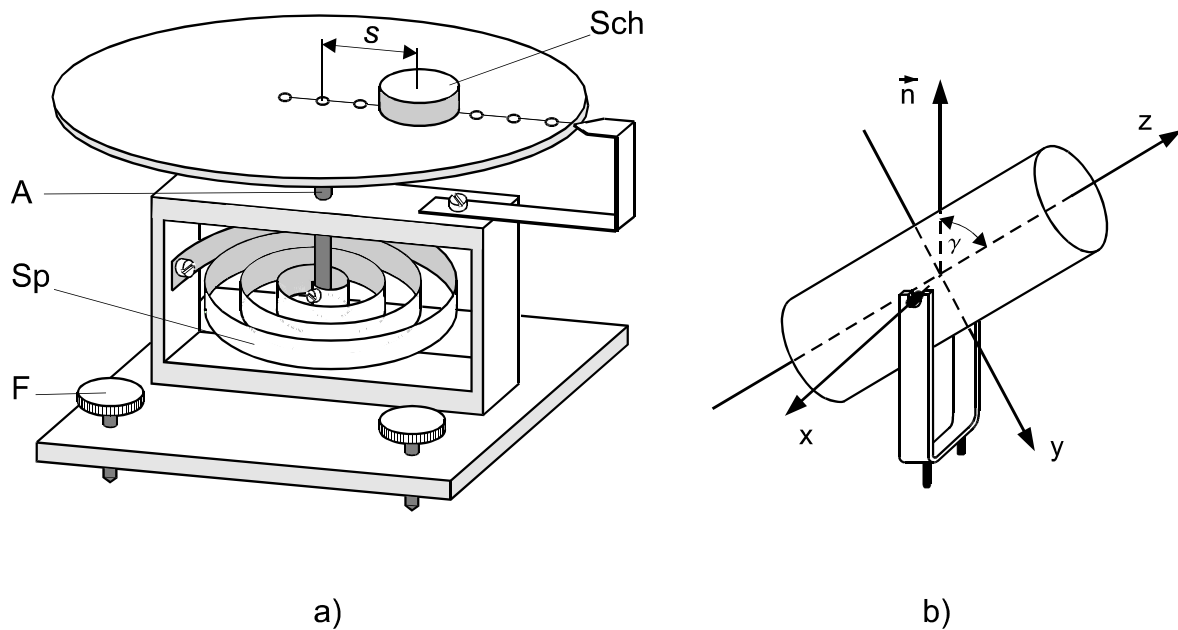


Abb. 4 DREHTISCH

auf dem Teller verschiebbaren Kreisscheibe Sch (Masse  $m$ , Radius  $R$ ) erhält man eine lineare Eichkurve  $T^2 = f(J_Z)$ , mit der man unbekannte Trägheitsmomente bestimmen kann. Mit dem bekannten Trägheitsmoment  $J_S = 1/2 \cdot mR^2$  für eine Scheibe bezüglich ihrer Symmetrieachse liefert der Steinersche Satz

$$J_Z = \frac{1}{2} mR^2 + ms^2, \quad (10)$$

wobei  $s$  der Abstand der Symmetrieachse der Scheibe Sch von der Drehachse A ist.

Wenn  $J_T$  das Trägheitsmoment des Drehtisches allein ist, erhält man mit Gl. (9) und Gl. (10) die lineare Eichkurve

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} J_Z + \frac{4\pi^2}{D} J_T, \quad (11)$$

welche die  $J_Z$ -Achse bei  $J_Z = -J_T$  schneidet.

## AUFGABEN

1. Messung der Periodendauer des Drehtisches ohne Scheibe und für 6 verschiedene Lagen der Scheibe relativ zur Drehachse.
2. Grafische Darstellung  $T^2 = f(J_Z)$  und Ermittlung des Trägheitsmomentes  $J_T$  des Drehtisches (Gl. (11)).
3. Messung der Trägheitsmomente eines Zylinders in Abhängigkeit vom Neigungswinkel  $\gamma$  zwischen Zylinderachse und Drehachse.
4. Überprüfung der Formel für das Trägheitsellipsoid (Gl. (7)) durch die grafische Darstellung  $J_\gamma = f(\sin^2 \gamma)$ .
5. Vergleich der experimentellen Werte der Hauptträgheitsmomente für  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 90^\circ$  mit den theoretischen Werten (Gl. (13)).

## VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Zur senkrechten Justierung des Drehtisches wird die Scheibe Sch an verschiedene Stellen des Tellerrandes gelegt und an den Fußschrauben F so lange nachgestellt, bis der Drehtisch bei allen Lagen der Scheibe in der Ruhelage verbleibt.

Für Aufgabe 1 wird zweimal die Zeit für 10 Schwingungen des Drehtisches allein und für die 6 möglichen Lagen der Scheibe auf dem Drehtisch gemessen.

Für Aufgabe 2 berechne man die Zusatzträgheitsmomente  $J_Z$  (Gl. (10)) und fertige die grafische Darstellung der Kalibrierungskurve  $T^2 = f(J_Z)$  an, aus der man das Trägheitsmoment  $J_T$  des Tisches ablesen kann.

Für Aufgabe 3 wird der schwenkbare Zylinder mit Halterung (Abb. 4b) zentral auf den Teller gesetzt. Dann soll für Winkelstellungen zwischen  $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$  zur Drehtischachse in Schritten von  $15^\circ$  je zweimal aus 10 Schwingungen die Periodendauer  $T$  bestimmt werden. Die zugehörigen Trägheitsmomente  $J_\gamma$  können aus der Eichkurve entnommen werden. Genauere Werte für  $J_\gamma$  und  $J_T$  (Aufgabe 2) als bei Benutzung der grafischen Auswertung erhält man bei Benutzung des PC-Programms GERA für die Berechnung des Anstiegs und des Schnittpunktes der Eichkurve mit der  $J_Z$ -Achse.

Für Aufgabe 4 beachte man, dass  $J_\gamma$  linear von  $\sin^2 \gamma$  abhängt. Mit dem Richtungskosinus der Drehachse (Abb. 1 und Abb. 4b)

$$\vec{n} = \left\{ 0, \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right), \cos\gamma \right\}$$

liefert Gl. (5) die Beziehung

$$J_\gamma = J_Z + (J_y - J_Z) \sin^2 \gamma. \quad (12)$$

Für Aufgabe 5 vergleiche man die für  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 90^\circ$  gemessenen Hauptträgheitsmomente (Aufgabe 3) mit den aus der grafischen Darstellung  $J_\gamma = f(\sin^2 \gamma)$  (Aufgabe 4) ermittelten Wer-

ten (Gl. (12)). Weiterhin berechne man aus den Parametern des Zylinders (Masse  $m$ , Radius  $R$  und Höhe  $h$ ) die Hauptträgheitsmomente nach

$$J_{\gamma=0^\circ} = \frac{1}{2} mR^2 \quad \text{und} \quad J_{\gamma=90^\circ} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2 \quad (13)$$

und vergleiche sie mit den experimentellen Werten.

### FRAGEN

1. Welche Abmessungen muss ein Zylinder haben, damit sein Trägheitsellipsoid eine Kugel wird?
2. In welcher Weise beeinflusst das vernachlässigte Trägheitsmoment der Halterung die Ergebnisse von Aufgabe 4?
3. Was sind freie Achsen? Was bedeutet das Auswuchten von rotierenden Maschinenteilen physikalisch?
4. Wie berechnet man das Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse?