M9 REVERSIONSPENDEL

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: ***Drehmoment, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Bewegungsgleichung, mathematisches und physikalisches Pendel.***

1. Physikalisches Pendel: Die Periodendauer eines **physikalischen Pendels** mit der Masse m und dem Trägheitsmoment J_A bezüglich der Drehachse A (Abb. 1) folgt aus der Lösung der Bewe-
gungsgleichung der Rotation des starren Körpers

$$J_A \ddot{\varphi} = M . \tag{1}$$

Das Drehmoment M entsteht bei Auslenkung um den Winkel φ und bei Vernachlässigung der Reibung nur durch die im Schwerpunkt S angreifende Schwerkraft $F_g = mg$:

$$M = -aF_g \sin\varphi = -a\,m\,g \sin\varphi , \tag{2}$$

wobei a der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt ist. Mit Hilfe des Satzes von Steiner kann die Berechnung von J_A bezüglich der Achse A auf die Berechnung von J_S bezüglich der zu A parallelen Achse durch S zurückgeführt werden

$$J_A = J_S + ma^2 . \tag{3}$$

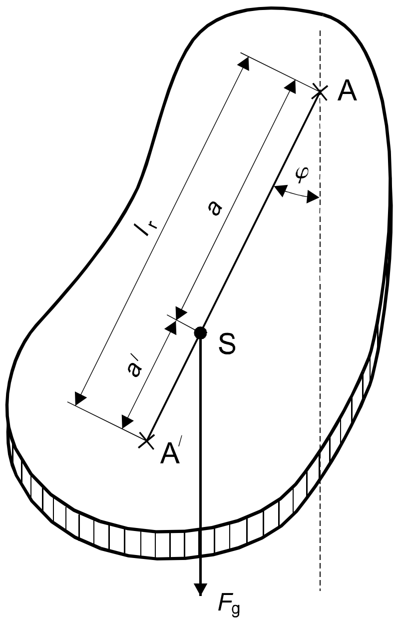

Abb.1 PHYSIKALISCHES PENDEL

Die Lösung der Bewegungsgleichung Gl. (1) mit M nach Gl. (2) bei Beschränkung auf kleine Winkel $(\sin\varphi \approx \varphi)$ und J_A nach Gl. (3) führt auf die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_S + ma^2}{mag}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} . \tag{4}$$

Die Lösung von Gl. (1) ohne Beschränkung auf kleine Winkel liefert die von der Amplitude φ_o abhängige Periodendauer

$$T(\varphi_o) = T(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_o}{2} + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 \sin^4\frac{\varphi_o}{2} + \ldots) . \tag{5}$$

Die so genannte **reduzierte Pendellänge** (Gl. (4))

$$l_r = \frac{J_S + ma^2}{ma} \tag{6}$$

ist die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Periodendauer T. Sie definiert im Abstand l_r von A auf der Geraden durch A und S den so genannten **Schwingungsmittelpunkt** A′ (Abb. 1). Die Periodendauer für die beiden parallelen Achsen durch A bzw. A′ ist gleich, wie folgende Überlegung zeigt: Die Lösung der für a quadratischen Gl. (6) führt auf

$$a_{1,2} = \frac{l_r}{2} \pm \sqrt{\frac{l_r^2}{4} - \frac{J_S}{m}}\,, \tag{7}$$

wobei gilt
$$a_1 + a_2 = l_r \tag{8}$$

und
$$a_1 \cdot a_2 = \frac{J_S}{m}. \tag{9}$$

Die Achsen gleicher Periodendauern liegen also danach auf zwei zum Schwerpunkt konzentrischen Zylindermänteln mit den Radien a_1 und a_2 (Abb. 2). Insbesondere sind die Periodendauern für parallele Achsen durch A und A' sowie für B und B' gleich. Der Vergleich mit den Bezeichnungen aus Abb. 1 liefert die Identität $a_1 = a'$ und $a_2 = a$.

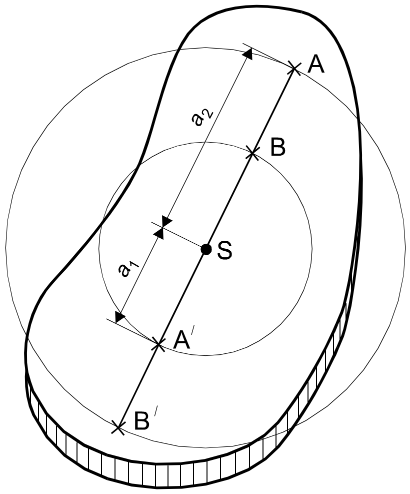

Abb. 2 ACHSEN GLEICHER PERIODENDAUER

2. Reversionspendel: Auf der Tatsache, dass sich auf einer durch den Schwerpunkt S gehenden Geraden jeweils zwei Punkte A und A' bzw. B und B' finden lassen, für die das physikalische Pendel die gleichen Periodendauern hat, basiert das Reversionspendel. Man verändert die Aufhängepunkte bzw. aus konstruktiven Gründen meist die Massenverteilung eines Pendels solange, bis sich für zwei Aufhängepunkte, die ungleichen Abstand von S haben, die gleiche Schwingdauer ergibt. Dann ist der Abstand der Punkte gleich der reduzierten Pendellänge, und die Fallbeschleunigung g kann durch eine Messung der Periodendauer ermittelt werden (Gl. (4)).

Die Fallbeschleunigung nach Gl.(4) kann hinsichtlich der erkennbaren systematischen Fehler infolge der endlichen Amplitude φ_0 der Pendelauslenkung und des Luftauftriebs (Dichte der Luft $\rho_L = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$ und Dichte des Pendels $\rho = 8000\ \mathrm{kg/m^3}$) korrigiert werden:

$$g_c = \left(\frac{2\pi}{T(\varphi_0)}\right)^2 l_r \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\rho_L}{\rho}\right). \tag{10}$$

Ein Spezialfall des Reversionspendels ist das so genannte Minimalpendel, bei dem die Radien der beiden Zylindermäntel gleich sind und nach Gl. (9) gilt $a_1 = a_2 = \sqrt{J_S / m}$. In dem Fall wird die reduzierte Pendellänge ein Minimum, d.h. die Periodendauer des Pendels ist gegen Lageänderungen der Aufhängung am unempfindlichsten.

AUFGABEN

1. Messung des Schneidenabstandes des Reversionspendels.
2. Messung der Periodendauer des Pendels als Funktion der Stellung der beweglichen Masse.

3. Präzisionsbestimmung der Periodendauer in der Umgebung der in Aufgabe 2 ermittelten Schnittpunkte und Bestimmung der Periodendauer $\overline{T}$ mit Hilfe des PC-Programms REVPEN.
4. Messung der Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer und Überprüfung der Gültigkeit von Gl. (5).
5. Berechnung der Fallbeschleunigung nach Gl. (4).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Das verwendete Reversionspendel (Abb. 3) ist eine ca. 1,5 m lange Eisenstange mit Schneiden in den Drehachsen P und P', die in eine Halterung H eingehängt werden. Es sind auf der Eisenstange unsymmetrisch die zwei Massenstücke M_1 (verschiebbar) und M_2 (fixiert) angebracht. Die Stellung von M_1 relativ zu den Schneiden kann an Ringmarken auf der Eisenstange abgelesen werden. M_1 ist zweigeteilt und kann auseinandergeschraubt werden. Das Einsetzen des Pendels in die Halterung muss mit großer Vorsicht erfolgen (vgl. Hinweise am Versuchsplatz). Das untere Ende des Reversionspendels bewegt sich beim Schwingen durch eine Lichtschranke, die einen elektronischen Zeitmesser schaltet, der die Zeit für eine vorwählbare Anzahl von Perioden misst. Für Aufgabe 1 wird der Schneidenabstand des Pendels auf einem Messtisch mit einem Normal definierter Länge verglichen und die Differenz zwischen Normal und Schneidenabstand mit einer Messuhr bestimmt. Der Schneidenabstand soll mehrfach gemessen und daraus Mittelwert und Messunsicherheit bestimmt werden. Für Aufgabe 2 wird das zusammengeschraubte Massenstück M_1 schrittweise um 2 Ringmarken verschoben und jeweils die Zeit für zwei Schwingungen gemessen. Die Zeitmessung erfolgt für beide Aufhängungen, wobei aber der Abstand x zwischen einer Schneide und M_1 immer von derselben Schneide (gleichgültig von welcher) aus zu zählen ist. Als Voraussetzung für die Korrigierbarkeit des systematischen Fehlers ist stets bei gleichen Amplituden zu messen (Gl. (5)). Die grafische Darstellung $T = \mathrm{f}(x)$ ergibt für beide Aufhängungen parabelähnliche Kurven mit einem Schnittpunkt bei x_1 und einem Schnittpunkt bei x_2. Die Periodendauern an den Schnittpunkten müssen gleich sein, weil die zugehörigen a_1 bzw. a_2 zwar wegen der verschiedenen J_S unterschiedlich sind (Gl. (7)), in beiden Fällen aber $l_\mathrm{r} = a_1 + a_2$ (Gl. (8)) mit dem Schneidenabstand übereinstimmen muss. Man fertige die grafische Darstellung $T = \mathrm{f}(x)$ gleich am Versuchsplatz an, um die Lage der für Aufgabe 3 benötigten x-Werte zu ermitteln.

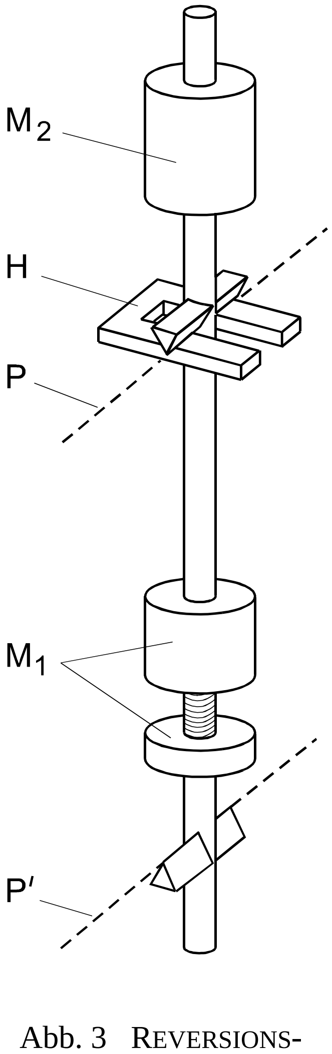

Abb. 3 REVERSIONSPENDEL

Für <u>Aufgabe 3</u> verwende man das PC-Programm REVPEN. Vor der Versuchsdurchführung sollte man sich mit den Möglichkeiten seiner Nutzung vertraut machen und zur Übung das Unterprogramm mit den fest eingegebenen Messwerten aufrufen. Für die Präzisionsmessung wird die Zeit für jeweils 10 Schwingungen bei 5 Ringmarken-Einstellungen von M_1 in der Umgebung von x_1 bzw. x_2 für beide Aufhängungen gemessen. Dann werden die 10 Messwertpaare in das PC-Programm REVPEN eingegeben. Der Rechner ermittelt $\overline{T}$ nach Bearbeitung mit den auf dem Bildschirm angebotenen Optionen.
Für <u>Aufgabe 4</u> messe man für die Lage x_1 oder x_2 des Massestücks M_1 die Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer T für 5 verschiedene Amplitudenwerte aus mindestens 10 Schwingungen. Anhand der grafischen Darstellung $T = f(\varphi_0^2)$ überprüfe man die Gültigkeit von Gl. (5).

<u>ALTERNATIVE für Aufgabe 3 bei Nichtbenutzung des PC-Programms:</u>
Aus der grafischen Darstellung (Aufg. 2) ist der Schnittpunkt auszuwählen, in dem sich die beiden Kurvenäste steiler schneiden (Lage x_0 des Massestückes M_1). Dann wird in der Umgebung von x_0 aus mindestens 10 Schwingungen die Periodendauer für das zusammengeschraubte und für das bis zum Anschlag auseinander geschraubte Massenstück M_1 erst für eine und danach in umgekehrter Reihenfolge für die andere Aufhängung bestimmt, wobei auf gleiche Amplituden geachtet werden muss. Aus den vier Messpunkten erhält man durch lineare grafische Interpolation aus dem Schnittpunkt der beiden Geraden den Wert der Periodendauer T, der zum gemessenen Schneidenabstand als reduzierter Pendellänge l_r gehört. Um eine möglichst hohe Genauigkeit zu erreichen, soll die Einstellung der Lage von M_1 in der unmittelbaren Umgebung von x_0 so erfolgen, dass der Geradenschnittpunkt innerhalb der 4 Messpunkte liegt.

<u>FRAGEN</u>

1. Besteht eine Korrespondenz zwischen den beiden Schnittpunkten in der grafischen Darstellung $T = f(x)$ (Aufgabe 3) und den Aufhängungen in A / A’ bzw. B / B’ (Abb.2)?
2. Leiten Sie die im Hinblick auf endliche Auslenkwinkel φ_0 und den Luftauftrieb korrigierte Formel (Gl.10) für die Fallbeschleunigung her.
3. Wie erhält man die Bedingung für das Minimalpendel $a_1 = a_2$?
4. Welche Periodendauer besitzt ein mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt an der Erdoberfläche und dessen Masse im Erdmittelpunkt liegt?