

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Fakultät I**

Institut für Physik
Physikalisches Grundpraktikum



Physikalisches Grundpraktikum

Mechanik und Thermodynamik 2005

VORBEMERKUNG

Das physikalische Experiment besteht im Wesentlichen aus der Messung physikalischer Größen sowie der Auswertung und Bewertung der erhaltenen Messergebnisse. Die Durchführung eines Experiments setzt praktische Grundkenntnisse und Fähigkeiten voraus, wie Umgang mit Messgeräten, Beobachtungsgabe, experimentelles Geschick, Protokollführung und kritische Ergebnisbeurteilung. Diese Fähigkeiten kann man nur in der Praxis erlernen und üben.

Der hier vorliegende Teil der Anleitungen zum Physikalischen Grundpraktikum enthält Versuchsbeschreibungen überwiegend zu den Themengebieten Mechanik und Thermodynamik. Zu Beginn stehen aber einfache Mess- und Auswertemethoden sowie die Diskussion der auftretenden Messfehler und deren Auswirkung auf Versuchsergebnisse, die aus direkt gemessenen Größen berechnet werden, im Vordergrund.

Die kritische Ergebniseinschätzung ist ein wesentlicher Teil jeder Versuchsauswertung. Es sollen zu allen Ergebnissen auch Messunsicherheiten angegeben werden, die meist durch die Abschätzung der zufälligen und systematischen Fehler bestimmbar sind. Eine statistische Fehlerrechnung lohnt sich in den Fällen, wo genügend viele Einzelmessungen vorliegen und die Größenordnung ihrer Streuung mindestens die Größenordnung der abgeschätzten systematischen Fehler erreicht. Eine ausführliche Darstellung zur Fehlerstatistik bzw. -analyse und zur Berechnung der Messunsicherheiten der experimentellen Ergebnisse mit zahlreichen Rechenbeispielen ist im Praktikumsskript „Einführung“ enthalten.

Im vorliegenden Skript werden die physikalischen Grundlagen der Versuche nur soweit beschrieben, wie es zum Verständnis der Aufgabenstellung unbedingt nötig ist. Erfahrungsgemäß sind die in der Schule erworbenen physikalischen und mathematischen Kenntnisse meist nicht ausreichend für die Bearbeitung der Aufgaben, auch wird nur sehr selten ein entsprechender Vorlauf in den Vorlesungen gegeben sein. Zur angemessenen Vorbereitung ist daher ein intensives Selbststudium für jeden Versuch notwendig. Dafür sind die einschlägigen Lehrbücher eine wertvolle Hilfe. Als Orientierung können die allen Versuchsanleitungen vorangestellten Grundbegriffe bzw. Schlagwörter dienen. Aus der großen Fülle der vorhandenen Literatur zur Experimentalphysik und zum Praktikum können z.B. empfohlen werden:

W. Demtröder, *Experimentalphysik*, Springer-Verlag, Berlin u. a. (4 Bände)

C. Gerthsen, H. Kneser und H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin u. a.

E. Grimsehl, *Lehrbuch der Physik*, BSG B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (4 Bände)

L. Bergmann und C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Walter de Gruyter, Berlin und New York (4 Bände)

W. Ilberg, *Physikalisches Praktikum*, B.G. Teubner, Stuttgart

W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G. Teubner, Stuttgart

INHALTSVERZEICHNIS

Kurzbezeichnung*	Versuch	Seite
F1	Fehlerverteilung	1
F2	Volumenmessung	5
F5	Dichte fester Körper	9
F7	Statistik und Radioaktivität	12
A1	Photoeffekt	21
A2	Franck-Hertz-Versuch	27
M2	Trägheitsmomente	34
M3	Elastizität und Torsion	39
M9	Reversionspendel	44
M10	Gyroskop	48
M12	Saitenschwingung	54
M13	Ultraschall	61
T1	Wärmekapazität eines Kalorimeters	67
T4	Zustandsgleichung idealer Gase	71
T6	Thermoelement und Newtonsches Abkühlungsgesetz	76
T7	Spezifische Wärmekapazität idealer Gase	81

* Die Kurzbezeichnungen der Versuche sind historisch entstanden. Einige Versuche sind hier nicht enthalten.

F1 FEHLERVERTEILUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Systematische Fehler, zufällige Fehler, Standardabweichung, Häufigkeit, Normalverteilung, Summenhäufigkeit, Wahrscheinlichkeitspapier, Stichprobe, Grundgesamtheit (Einführungsskript, Abschnitt 3 und 4).

Alle Messungen physikalischer Größen sind mit Messfehlern behaftet. Sind systematische Fehler ausgeschlossen, dann streuen die Messwerte x_i ($i = 1 \dots n$) aufgrund der zufälligen Fehler symmetrisch um den Mittelwert \bar{x} . Berechnet man die scheinbaren Fehler

$$v_i = x_i - \bar{x} \quad (1)$$

einer Messreihe und stellt die absolute Häufigkeit $k(v_i)$ bzw. die relative Häufigkeit

$h(v_i) = k(v_i)/n$ grafisch als Funktion der Fehler v_i dar, dann erhält man eine treppenförmige Verteilungskurve (Abb. 1). Dazu werden die Fehler v_i in gleichgroßen Intervallen Δv (Klasseneinteilung) zusammengefasst. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ und Intervallbreite $\Delta v \rightarrow 0$ genügen die Fehler v einer Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

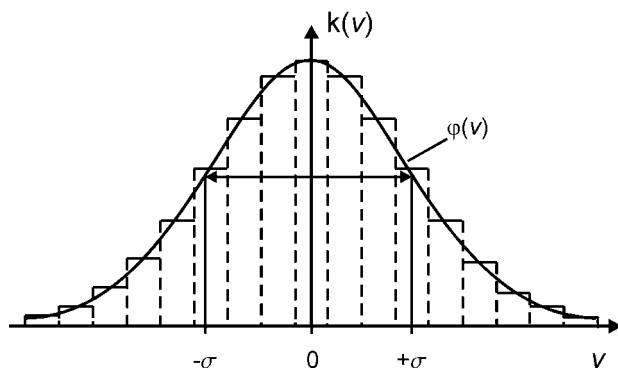


Abb.1 FEHLERVERTEILUNG

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2)$$

Die grafische Darstellung dieser Verteilung (ausgezogene Kurve in Abb. 1) zeigt folgende Eigenschaften:

- (1) Die Normalverteilung hat für $v=0$ ein Maximum, ist symmetrisch bezüglich dieses Maximums und strebt mit wachsendem v gegen Null.
- (2) Die Normalverteilung hat Wendepunkte bei $v = \pm\sigma$. Die Größe σ heißt Standardabweichung.
- (3) Die Breite der Normalverteilung wird durch den Parameter σ bestimmt. Eine schlanke Kurve, kleines σ , bedeutet eine geringe Streuung der Messergebnisse, eine große Genauigkeit der Messmethode. Eine breite Kurve, großes σ , bedeutet das Gegenteil.

Die Überprüfung, ob eine Messreihe (Stichprobe) einer Normalverteilung genügt, ist mit Hilfe bestimmter statistischer Verfahren möglich, von denen einige in diesem Versuch angewandt werden. Die statistische Analyse einer Messreihe setzt aber eine große Zahl von Messwerten voraus.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

(1) Wird der Versuch im Hörsaal durchgeführt, dann wird über einen Projektor eine Skale mit einer Marke projiziert. Die Lage dieser Marke schätzt jeder Student für sich auf 0,01 des Teilstrichabstandes und notiert sich im Messprotokoll den Wert x_i . Der wahre Wert der Stellung der Marke x_{wi} wurde vorher ausgemessen und wird nach der Schätzung vom Assistenten angesagt und im Messprotokoll ebenfalls notiert.

(2) Wird der Versuch im Praktikum durchgeführt, bekommt jede Versuchsgruppe eine Zentimeterskale mit beweglichem Schieber, der eine Marke trägt. Die Stellung der Marke zwischen den Teilstrichen der Zentimeterskale wird auf 0,01 des Teilstrichabstandes geschätzt (Werte x_i).

Auf der Rückseite des Schiebers befindet sich eine Millimeterskale mit Nonius, so dass die Stellung der Marke auf 0,01 cm abgelesen werden kann. Wegen der wesentlich größeren Ablesegenauigkeit auf der Rückseite im Vergleich zum Schätzwert kann ersterer als wahrer Wert x_{wi} angesehen werden. Der Versuch wird im Praktikum zu zweit durchgeführt. Ein Partner schätzt, der andere führt Protokoll und liest nach der Schätzung den wahren Wert auf der Rückseite der Skale ab. Jeder Student wertet nur seine eigenen Schätzwerte x_i aus. Um systematische Fehler zu vermeiden, muss auf gute Beleuchtung der Skale geachtet und der Schätzabstand konstant gehalten (ca. 1 m) werden.

AUFGABEN

1. Ermittlung der Stichprobe: 100 Schätzwerte x_i der Stellung einer Marke und die zugehörigen Werte x_{wi} werden notiert. Für das Messprotokoll empfiehlt sich folgendes Schema:

i	x_i	x_{wi}	v_i		
			+	0	-

2. Berechnung der scheinbaren Fehler $v_i = x_i - x_{wi}$.
3. Vorzeichentest: Man bestimme die Zahl n^+ der positiven und die Zahl n^- der negativen Fehler v_i . Da die Fehler v_i bei Annahme einer Normalverteilung symmetrisch zum Wert $v_i = 0$ liegen, müssen die Zahlen n^+ und n^- annähernd gleich groß sein. Wenn n die Zahl aller Messwerte ist, muss für den positiven Ausgang des Vorzeichentests

$$|n^+ - n^-| \leq \sqrt{n}$$

erfüllt sein; $\pm \sqrt{n}$ ist die zu erwartende statistische Schwankung bei einer Stichprobe vom Umfang n .

4. Für die weitere Auswertung der Messergebnisse empfiehlt sich eine Tabelle, in der die scheinbaren Fehler ihrer Größe nach geordnet werden, nach folgendem Schema:

v_j	v_j^2	Strichliste	$k(v_j)$	$k(v_j) \cdot v_j^2$	$h(v_j)$	$H(v_j)$
v_{iMin}						
.						
.						
.						
v_{iMax}						1,000
Kontrollen:			100	$\sum v_i^2 = \sum k(v_j) v_j^2$	1,000	-

In diese Tabelle werden die Messwerte von Aufgabe 1 übertragen, indem man sie der Reihe nach durchgeht und bei dem entsprechenden v_j in der Spalte „Strichliste“ durch einen Strich markiert. Die Zahl der Striche ergibt dann die absolute Häufigkeit $k(v_j)$.

5. Aus den Fehlern v_i wird die empirische Standardabweichung

$$s = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i v_i^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \sum_j k(v_j) v_j^2}$$

berechnet, die eine Näherung für die Standardabweichung σ der Normalverteilung (Gl. (2)) darstellt. Im Nenner tritt n anstelle von $(n-1)$ auf, weil bei diesem Versuch ausnahmsweise der wahre Wert der Messgröße bekannt ist.

6. Die ermittelten relativen Häufigkeiten $h(v_j) = k(v_j)/n$ der Fehler v_j werden grafisch als Funktion von v_j dargestellt. Durch die Punkte versuche man nach Augenmaß eine Normalverteilungskurve zu legen.

7. Mit den relativen Häufigkeiten aus Aufgabe 6 berechne man die Summenhäufigkeit

$$H(v_j) = \sum_{v_k \leq v_j} h(v_k)$$

und stelle diese Summenhäufigkeit $H(v_j)$ grafisch als Funktion von v_j auf Millimeterpapier dar.

8. Test mit Wahrscheinlichkeitspapier: Die Wertepaare der Summenhäufigkeitskurve (Aufgabe 7) übertrage man außerdem auf Wahrscheinlichkeitspapier (vgl. Einführungsskript, Abschnitt 4.8) und lege durch die Punkte im mittleren Bereich eine ausgleichende Gerade.

9. Man entnehme der Darstellung auf Wahrscheinlichkeitspapier (Aufgabe 8) bei den Werten $H(v') = 0,16$ (bzw. 16 %) und $H(v'') = 0,84$ (bzw. 84 %) die zugehörigen Werte v' und v'' und vergleiche $(v'' - v')/2$ mit dem Wert der empirischen Standardabweichung (Aufgabe 5).

FRAGEN

1. Welche Eigenschaften haben zufällige Fehler im Gegensatz zu systematischen Fehlern?
2. Warum werden bei Aufgabe 8 vorwiegend die Punkte im mittleren Bereich berücksichtigt?
3. Welcher Unterschied besteht zwischen der Standardabweichung und dem Vertrauensbereich?
4. Welche systematischen Fehler können beim Versuch vorliegen?

F2 VOLUMENMESSUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Masse, Gewichtskraft, Auftriebskraft. Zufälliger und systematischer Fehler, Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzungsgesetz, gewogener Mittelwert (Einführungsskript, Abschnitt 3).

In diesem Versuch werden drei Methoden unterschiedlicher Genauigkeit zur Bestimmung des Volumens eines Probekörpers verwendet mit dem Ziel, die Grundbegriffe der Fehlerrechnung anzuwenden.

1. Methode: Überlaufgefäß: Ein mit einem Überlauf versehener Glasbehälter wird bis zum Überlaufen mit Wasser gefüllt. Durch Eintauchen des Probekörpers, dessen Volumen V_1 bestimmt werden soll, wird Wasser verdrängt, das in einen Messzylinder fließt.

2. Methode: Geometrie des Körpers: Der Probekörper ist ein Zylinder und sein Volumen kann aus dem Durchmesser d und der Höhe h nach

$$V_2 = \frac{\pi}{4} d^2 h \quad (1)$$

berechnet werden.

3. Methode: Auftriebsmessung: Der Probekörper vom Volumen V_3 wird mit einer Laborwaage mit symmetrischem Waagebalken in Luft gewogen. Man benötigt für das Gleichgewicht die Massennormale m_1 zur Kompensation der Gewichtskraft $F_G = m_1 g$ des Probekörpers. Taucht man ihn in Wasser (Dichte ρ_w), dann erfährt er eine Auftriebskraft $F_A = \rho_w g V_3$ (g = Fallbeschleunigung). Um die Waage wieder ins Gleichgewicht zu bringen, benötigt man die Massennormale m_2 zur Kompensation der um die Auftriebskraft F_A verminderten Gewichtskraft F_G , d. h. $m_2 g = m_1 g - \rho_w g V_3$. Daraus folgt:

$$V_3 = \frac{m_1 - m_2}{\rho_w}. \quad (2)$$

Die zur Bestimmung der Massenwerte m_1 und m_2 verwendete Laborwaage trägt in der Mitte des Waagebalkens einen Zeiger, der über einer Skale schwingt. An seiner Stellung ist das Gleichgewicht der Waage ablesbar. Verschiebt sich durch eine einseitig wirkende Zusatzmasse $\Delta m'$ die Zeigerstellung um Δa , dann bezeichnet man den Quotienten

$$E = \frac{\Delta a}{\Delta m'} \quad (3)$$

als Empfindlichkeit der Waage; sie ist ein Maß für ihre Güte und gestattet die Abschätzung der Messfehler.

Systematische Fehler der drei Messmethoden:

1. Methode: Überlaufgefäß

- (I) Der Gerätefehler ΔV des Messzylinders beträgt bei einem Nenninhalt von $V_N = 50 \text{ ml}$ und einer Nenntemperatur von $t_N = 20^\circ\text{C}$ bis zu

$$\Delta V = \pm 0,5 \text{ ml.} \quad (4)$$

- (II) Die Richtung und die Größe des Volumenfehlers ΔV , wenn Messtemperatur t_M und Nenntemperatur t_N des Messzylinders voneinander abweichen, wird mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten des Glases abgeschätzt. Ist das Nennvolumen des als Glasrohr betrachteten Messzylinders V_N , dann ist bei der Messtemperatur t_M sein Volumen

$$V_M = V_N(1 + \gamma(t_M - t_N))$$

mit $\gamma = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ als kubischem thermischem Ausdehnungskoeffizienten des Glases.

Daraus ergibt sich der Volumenfehler zu

$$\Delta V = V\gamma(t_M - t_N). \quad (5)$$

2. Methode: Geometrie des Körpers

- (III) Die Fehlergrenzen Δl der Messgeräte sind, wenn l die gemessene Länge ist, von folgender Größe:

$$\text{Messschieber} \quad \Delta l = \pm (5 \cdot 10^{-5} \text{ m} + 1 \cdot 10^{-4} l), \quad (6)$$

$$\text{Bügelmessschraube} \quad \Delta l = \pm (5 \cdot 10^{-6} \text{ m} + 1 \cdot 10^{-5} l). \quad (7)$$

3. Methode: Auftriebsmessung

- (IV) Die Berücksichtigung des Auftriebs des Probekörpers und der Massennormale (Dichte $\rho_N = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) bei der Wägung in Luft (Dichte $\rho_L = 1,2 \text{ kg/m}^3$) ergibt (vgl. Gl. (2)):

$$V'_3 = \frac{m_1 - m_2}{\rho_w} \cdot \frac{1 - \rho_L / \rho_N}{1 - \rho_L / \rho_w} \approx V_3 \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_N} + \frac{\rho_L}{\rho_w} \right). \quad (8)$$

- (V) Die Berücksichtigung des Auftriebs des Aufhängedrahtes, von dem das Volumen ΔV im Wasser eintaucht, ergibt:

$$V''_3 = V'_3 - \Delta V. \quad (9)$$

AUFGABEN

1. Messung der einzelnen Messgrößen für jede der drei Methoden und Berechnung der Volumenwerte V_i .
2. Berechnung bzw. Abschätzung der zufälligen Fehler für die einzelnen Messgrößen.

3. Größenordnungsmäßige Abschätzung der systematischen Fehler der Methoden 1 - 3. Welche ergeben Korrekturen und welche bestimmen den systematischen Restfehler?
4. Übersichtliche Zusammenstellung der Messergebnisse, der zufälligen und der systematischen Fehleranteile sowie der Messunsicherheiten für die einzelnen Messgrößen.
5. Berechnung der Messunsicherheiten ΔV_i für die Volumenwerte nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.
6. Berechnung des gewogenen Mittelwertes einschließlich Fehler, wenn die Messunsicherheiten ΔV_i dies rechtfertigen.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Methode 1: Der Messzylinder wird vor dem Eintauchen mit etwas Wasser gefüllt und dieser Füllstand V_A als Bezugsgröße gewählt. Nach dem Einlaufen des verdrängten Wassers liest man den Füllstand V_E am Messzylinder ab, so dass sich als Volumen des Probekörpers

$$V_1 = V_E - V_A \quad (10)$$

ergibt. Die Messungen werden sechsmal durchgeführt und Bruchteile der Skalenteile geschätzt.

Methode 2: Die Höhe des Zylinders h wird sechsmal mit einem Messschieber und sein Durchmesser d wird zehnmal an verschiedenen Stellen mit einer Bügelmessschraube gemessen.

Methode 3: Jede Wägung wird zweimal ausgeführt und der Größtfehler aus der Empfindlichkeit der Waage (Gl. (3)) abgeschätzt. Als Größtfehler wird die Zusatzmasse $\Delta m'$ angegeben, die einen Zeigerausschlag $\Delta a = 1$ Skalenteil bewirkt. Die Dichte des Wassers ist temperaturabhängig und wird einer grafischen Darstellung am Versuchsplatz entnommen.

In Aufgabe 1 werden die einzelnen Messgrößen sowie die drei Volumenwerte V_i und in Aufgabe 2 die zufälligen Fehler der einzelnen Messgrößen ermittelt. In Aufgabe 3 sind die systematischen Fehler zu diskutieren, wobei zwischen den Korrekturen und den systematischen Restfehlern zu unterscheiden ist.

Für Aufgabe 4 müssen die zufälligen und die systematischen Fehler verglichen und die Messunsicherheiten ΔV_i für die drei Methoden festgelegt werden. Überlappen sich die Bereiche der Messunsicherheiten nicht, dann liegen grobe Messfehler vor oder es existieren noch weitere bisher nicht erfasste systematische Fehler. Überlappen sich die Bereiche der Messunsicherheiten, dann kann der gewogene Mittelwert und die zugehörige Messunsicherheit berechnet werden (vgl. Einführungsskript, Abschnitt 3.8).

FRAGEN

1. Warum soll bei Methode 1 bereits zu Beginn des Versuches etwas Wasser im Zylinder sein?

2. Die Gewichtungsfaktoren p_i für das gewogene Mittel werden umgekehrt proportional zum Quadrat der Messunsicherheit festgelegt. Wie begründet man, dass die Messunsicherheiten quadratisch und nicht linear eingesetzt werden?
3. Man leite die Korrekturformeln für die Auftriebsmethode (Gl. (8) und (9)) ab.
4. Unter welcher Voraussetzung darf aus Messwerten verschiedener Genauigkeit ein gewogenes Mittel bestimmt werden?

F5 DICHT FESTER KÖRPER

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Dichte, Auftriebskraft, Analysenwaage, Pyknometer, Messunsicherheit, Fehlerfortpflanzungsgesetz.*

Das Pyknometer ist ein Gerät zur Bestimmung der Dichte fester Körper. Es besteht aus einem Glasgefäß mit eingeschliffenem Stopfen, der eine kapillare Bohrung hat. Das Pyknometer kann reproduzierbar mit großer Genauigkeit mit Wasser gefüllt werden. Zur Dichtebestimmung mit dem Pyknometer sind drei Wägungen mit der Analysenwaage nötig, wobei der Auftrieb der zu wägenden Körper (Probe bzw. Pyknometer) in Luft (Dichte ρ_L) zu berücksichtigen ist.

1. Wägung der Probe in Luft: Für die Probe (Masse m_1 , Volumen V_1) wird die Gewichtskraft $F_1 = m_1 g$ durch die entgegengesetzt gerichtete Auftriebskraft $F_{A1} = V_1 \rho_L g$ vermindert, so dass im Gleichgewicht die Waage den Wert m_1' anzeigt. Es gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$m_1 - V_1 \rho_L = m_1'. \quad (1)$$

2. Wägung des wassergefüllten Pyknometers: Das mit Wasser gefüllte Pyknometer (Volumen V_p) hat die Gesamtmasse m_2 und erfährt die Auftriebskraft $V_p \rho_L g$. Im Gleichgewicht zeigt die Waage m_2' an, so dass gilt

$$m_2 - V_p \rho_L = m_2'. \quad (2)$$

3. Wägung des wassergefüllten Pyknometers mit Probe: Das mit Wasser und der Probe gefüllte Pyknometer hat die Gesamtmasse m_3 und erfährt die Auftriebskraft $V_p \rho_L g$. Im Gleichgewicht zeigt die Waage m_3' an, so dass gilt

$$m_3 - V_p \rho_L = m_3'. \quad (3)$$

Zwischen den Massen m_1 , m_2 und m_3 besteht der Zusammenhang

$$m_1 - V_1 \rho_W = m_3 - m_2 = m_3' - m_2'. \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Dichte ρ_1 der Probe kann man aus den Gleichungen (1) und (4) die Unbekannten m_1 und V_1 ermitteln und man erhält

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_1' \rho_W - (m_3' - m_2') \rho_L}{m_1' - (m_3' - m_2')}. \quad (5)$$

AUFGABEN

1. Bestimmung der Werte m_1' durch Wägung der drei Metallproben in Luft. Für jede Probe erfolgt die Wägung dreimal. Bestimmung der Mittelwerte.

- Bestimmung der Werte m_2' durch Wägung des mit Wasser gefüllten Pyknometers. Die Füllung und Wägung des Pyknometers erfolgt 10 mal, Bestimmung des Mittelwertes.
- Bestimmung der Werte m_3' durch Wägung des mit Wasser und Probe gefüllten Pyknometers. Die Füllung und Wägung des Pyknometers erfolgt für jede Probe sechsmal. Bestimmung der Mittelwerte.
- Berechnung der Dichte der drei Metallproben nach Gl. (5).
- Bestimmung der Messunsicherheit für die Messgrößen m_1' , m_2' und m_3' für Aluminium.
- Größtfehlerabschätzung für die Dichte von Aluminium.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Die Wägungen werden mit einer elektronischen Analysenwaage durchgeführt, bei der die aufgelegte Last (Abb. 1, oberer Pfeil) durch eine elektromagnetische Kraft kompensiert wird.

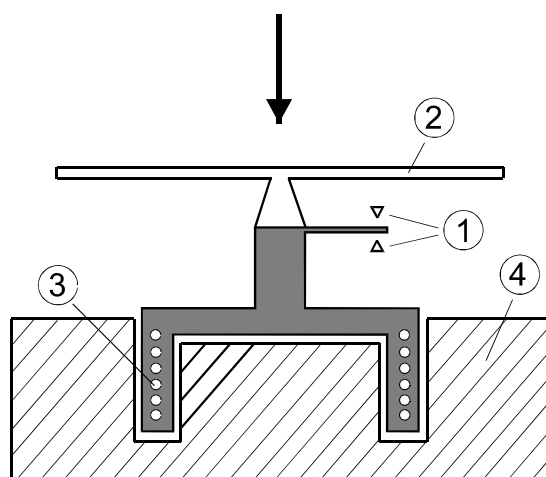


Abb.1 MESSPRINZIP

Mit einer optoelektronischen Abtastung (1) wird die Stellung der Waagschale (2) gemessen und mit diesem Signal der Kompensationsstrom in der Spule (3) gesteuert. Der Kompensationsstrom erzeugt zwischen Permanentmagnet (4) und Spule eine Kraft, so dass die Waagschale in die Null-Lage zurückgeführt wird; er ist der Last proportional. Zur Durchführung der Wägungen beachte man die Hinweise in der Platzanleitung. Für Aufgabe 2 wird das Pyknometer bis zum Rand mit destilliertem Wasser gefüllt, wobei die Bildung von Luftbläschen zu vermeiden ist. Verschließt man das Pyknometer mit dem angeschliffenen Stopfen, so läuft Wasser über, das

sorgfältig mit Filterpapier abzuwischen ist. Das Anfassen des Pyknometers muss vorsichtig erfolgen, um eine Erwärmung des Pyknometers zu vermeiden. Nach dem Abwischen wird mit Filterpapier der auf der Kapillare stehende Tropfen abgenommen, so dass die Kapillare bis oben mit Wasser gefüllt ist. Für die 10 durchzuführenden Wägungen ist das Pyknometer stets erneut zu füllen.

Für Aufgabe 3 wird der Probekörper in das Pyknometer gebracht und dann mit destilliertem Wasser aufgefüllt, wobei entsprechend wie bei Aufgabe 2 zu verfahren ist.

Für Aufgabe 4 sind zusätzlich zu den Werten m_1' , m_2' und m_3' der Luftdruck p sowie die Zimmer- und Wassertemperatur zu bestimmen. Die Temperaturen können als gleich vorausgesetzt werden, da das destillierte Wasser sich bereits sehr lange im Raum befindet. Die Dichte des

Wassers ρ_W entnehme man einer Tabelle am Versuchsplatz. Die Dichte der Luft ρ_L berechne man nach der Gleichung

$$\rho_L / \text{kgm}^{-3} = \rho_0 \frac{T_0}{T} \cdot \frac{p}{p_0} = 3,4851 \cdot 10^{-3} \frac{p/\text{Pa}}{T/\text{K}},$$

wobei $\rho_0 = 1,2928 \text{ kg/m}^3$ die Luftdichte unter Normalbedingungen ist, d. h. bei der Temperatur $T_0 = 273,15 \text{ K}$ und dem Luftdruck $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Für Aufgabe 5 sind die zufälligen und die systematischen Fehler der Wägungen zu ermitteln. Die Massenwerte m_1' , m_2' und m_3' werden alle mit der gleichen Analysenwaage ermittelt, für die vom Hersteller eine Garantiefehlergrenze (systematischer Restfehler) von $0,0002 \text{ g}$ angegeben wird. Diese Garantiefehlergrenze ist für alle drei Massenwerte als systematischer Fehler zu berücksichtigen. Für die Messwerte m_1' , m_2' und m_3' hängt es von der sorgfältigen Versuchsdurchführung (Abtupfen des Wassers, ...) ab, ob der zufällige und/oder der systematische Fehler die Messunsicherheit bestimmt.

Für Aufgabe 6 ist nur die Messunsicherheit der Massenwerte m_1' , m_2' und m_3' zu berücksichtigen. Die Werte für die Dichten von Luft und Wasser können als fehlerfrei angenommen werden.

FRAGEN

1. Welche Unterschiede bestehen zwischen Masse, Gewicht und Kraft?
2. Ist die Masse bzw. das Gewicht eines Körpers am Äquator, am Nordpol oder auf dem Mond gleich groß?

F7 STATISTIK UND RADIOAKTIVITÄT

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Häufigkeit, Summenhäufigkeit, Poisson- und Gaußverteilung, Geiger-Müller-Zählrohr, Zählrate, χ^2 -Test (Einführungsskript, Abschnitt 3.3; R. Storm "Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik ...", Leipzig 1986, S. 184 ff).

1. Poisson- und Gaußverteilung: Bei statistischen Prozessen, beispielsweise dem radioaktiven Zerfall, treten unterschiedliche Häufigkeitsverteilungen auf. Die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für das Eintreffen seltener Ereignisse - beim radioaktiven Zerfall ist die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines Atoms während der Messzeit sehr klein -

wird durch eine Poisson-Verteilung beschrieben

$$P(x) = \exp(-\bar{x}) \frac{(\bar{x})^x}{x!}. \quad (1)$$

Die zufällige Veränderliche x ist die während der Messzeit mit z.B. einem Geiger-Müller-Zählrohr registrierte Impulszahl. Die Impulszahl pro Zeiteinheit bezeichnet man als Impuls- oder Zählrate. Die Impulszahl x kann nur ganze positive Zahlen annehmen und ergibt eine Häufigkeitsverteilung, welche für kleine Mittelwerte \bar{x} unsymmetrisch zum Mittelwert \bar{x} ist und für größere Mittelwerte zunehmend symmetrischer wird (Abb.1). In numerischen Berechnungen verwendet man zweckmäßig die Rekursionsformeln

$$P(0) = \exp(-\bar{x}), \quad P(x) = P(x-1) \frac{\bar{x}}{x}. \quad (2)$$

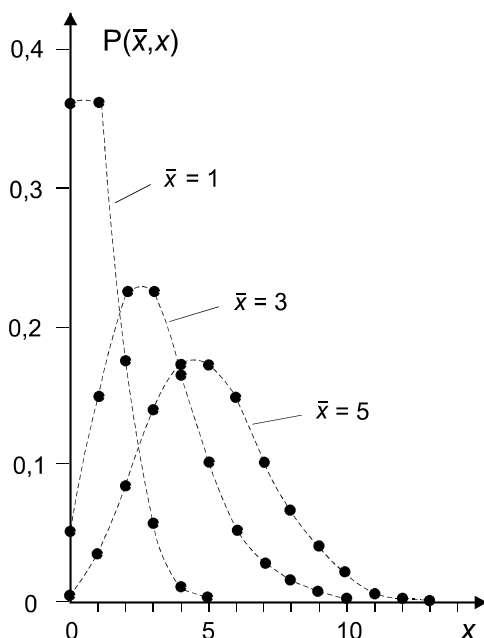


Abb. 1 POISSON-VERTEILUNG

Für die Standardabweichung einer Poisson-Verteilung gilt

$$s = \sqrt{\bar{x}}. \quad (3)$$

Für große \bar{x} , also wenn $|x - \bar{x}| \ll \bar{x}$ ist, geht die Poisson-Verteilung in eine spezielle Gaußsche Normalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

(mit $\sigma^2 = \bar{x}$) über, deren empirische Standardabweichung sich für eine Messreihe vom Umfang n nach

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (5)$$

berechnet. Die Poisson-Verteilung ist also bereits durch einen Anpassungsparameter, den Mittelwert, festgelegt, während für die Gaußsche Normalverteilung zwei Anpassungsparameter, Mittelwert und Standardabweichung, benötigt werden.

Überdecken die einzelnen Messwerte einen größeren Wertebereich von x_{\min} bis x_{\max} und ist der Umfang n der Messreihe groß, dann berechnet man Mittelwert und Standardabweichung nicht aus den Einzelwerten x_i sondern nimmt eine Klasseneinteilung wie folgt vor: Die sinnvolle Klassenzahl N und die Klassenbreite d legt man durch

$$N \approx 5 \lg n, \quad d \approx \frac{1}{N} (x_{\max} - x_{\min}) \quad (6)$$

fest. Man wählt die Klassengrenzen zweckmäßig so, dass keine Messwerte auf eine Klassengrenze fallen, da sonst eine Aufteilung ihrer Häufigkeiten je zur Hälfte auf die benachbarten Klassen erfolgen müsste, was die Behandlung unnötig erschweren würde. Anschließend ermittelt man die absoluten Häufigkeiten $k(x_j)$ der Messwerte in der j -ten Klasse mit der Klassenmitte x_j und berechnet für den arithmetischen Mittelwert \bar{x} bzw. die Standardabweichung s die Näherungswerte:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N x_j k(x_j), \quad s \approx \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2 k(x_j)}{n-1}}. \quad (7)$$

2. χ^2 -Test: Zum Vergleich einer gemessenen Häufigkeitsverteilung mit einer theoretischen Verteilung gibt es verschiedene Prüfverfahren. Bei der Darstellung auf Wahrscheinlichkeitspapier (vgl. Versuch F 1) wird mit der Normalverteilung verglichen. Ein weiteres Verfahren ist der χ^2 -Test, der für beliebige Verteilungen anwendbar ist und bei dem die Güte der Anpassung zwischen

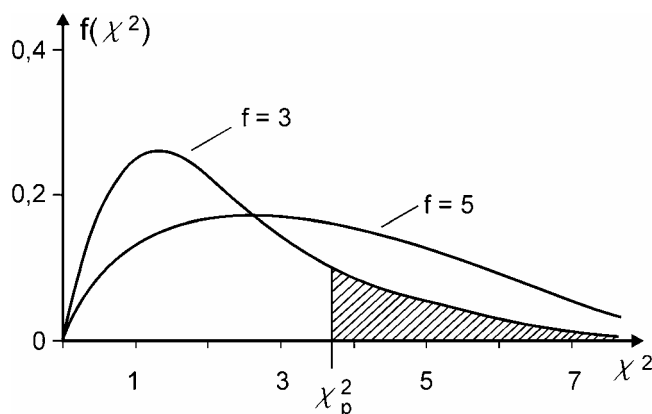


Abb. 2 χ^2 -VERTEILUNG

gemessener und theoretischer Verteilung durch eine Prüfgröße bewertet wird. Dazu bildet man die Quadrate der Abweichungen der gemessenen Häufigkeiten $k(x_j)$ von den theoretischen Häufigkeiten nP_j , normiert und addiert sie, so dass sich die Prüfgröße

$$\chi^2_p = \sum_{j=1}^N \frac{(k(x_j) - nP_j)^2}{nP_j} \quad (8)$$

ergibt. Liegt einer Messreihe ein Prozess zugrunde, der einer angenommenen theo-

retischen Verteilung entspricht, so werden bei Wiederholung der Messreihe aber unterschiedliche χ^2 -Werte auftreten, da die Streuung der gemessenen Werte $k(x_j)$ bezüglich der theoretisch zu erwartenden Werte nP_j zufällig ist. Die Häufigkeitsverteilung, d. h. die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(\chi^2)$ der χ^2 -Werte lässt sich berechnen (Abb. 2); sie ist

keitsdichtefunktion $f(\chi^2)$ der χ^2 -Werte lässt sich berechnen (Abb. 2); sie ist von einer natürlichen Zahl f , der so genannten Zahl der Freiheitsgrade

$$f = N - 1 - r \quad (9)$$

abhängig. Die Abhängigkeit der χ^2 -Verteilung von der Klassenzahl N ist verständlich, weil sie die Zahl der addierten Differenzen bestimmt (Gl. (8)). Da per Definition die Bedingung

$$\sum_{j=1}^N k(x_j) = n \quad (10)$$

gilt, sind die Summanden nicht voneinander unabhängig, und die Zahl der Freiheitsgrade wird um 1 reduziert. Die Zahl der Freiheitsgrade verringert sich weiter um die Zahl der Anpassungsparameter r der theoretischen Verteilung, da diese aus den Messwerten gebildet werden.

Um beurteilen zu können, ob die Hypothese einer bestimmten theoretischen Verteilung gerechtfertigt ist oder nicht, führt man in der Statistik die so genannte Irrtumswahrscheinlichkeit

$$\alpha = \int_{\chi_p^2}^{\infty} f(\chi^2) d\chi^2 \quad (11)$$

ein, die für einen vorgegebenen Freiheitsgrad f (Gl. (9)) einen bestimmten Zahlenwert ergibt. Sie ist nicht analytisch angebar, ihre Größe entspricht der schraffierten Fläche in Abb. 2 und kann aus Tab.1 entnommen werden. Je nach der Größe der Irrtumswahrscheinlichkeit kann man die Anpassung von Messreihe und theoretischer Verteilung klassifizieren:

gut: $\alpha \geq 0,5$ mäßig: $0,5 > \alpha \geq 0,2$
 schwach: $0,2 > \alpha \geq 0,06$ fehlend: $0,06 > \alpha$.

$\alpha \backslash f$	0,99	0,975	0,95	0,90	0,70	0,50	0,30	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	1,57(-4)	0,82(-4)	3,93(-3)	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	5,02	6,63	10,8
2	0,020	0,051	0,103	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	7,38	9,21	13,8
3	0,115	0,216	0,352	0,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	9,35	11,3	16,3
4	0,297	0,484	0,711	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	11,1	13,3	18,5
5	0,554	0,831	1,15	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	12,8	15,1	20,5
6	0,872	1,24	1,64	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	14,4	16,8	22,5
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	16,0	18,5	24,3
8	1,65	2,18	2,73	3,40	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	17,5	20,1	26,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	19,0	21,7	27,9
10	2,56	3,25	3,94	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	20,5	23,2	29,6
12	3,57	4,40	5,23	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	23,3	26,2	32,0
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,8	13,3	16,2	21,1	23,7	26,1	29,1	36,1
16	5,81	6,91	7,96	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	28,8	32,0	39,3
18	7,01	8,23	9,39	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	31,5	34,8	42,3
20	8,26	9,59	10,9	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	34,2	37,6	45,3

Tab.1 IRRTUMSWAHRSCHEINLICHKEIT α

Man erhält also beim χ^2 -Test keine Ja-Nein-Ausage sowie keine Angabe über die Sicherheit der gewählten Hypothese. Die angegebene Klassifizierung ist ein grobes Raster, das für viele Zwecke in der Praxis sinnvoll ist. In der Literatur werden manchmal die Grenzen schärfer oder wei-

ter gesetzt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt keine Ja-Nein-Aussage, vielmehr gibt sie an, wie man sich irrt, wenn die Hypothese verworfen wird. Ergibt sich beispielsweise $\alpha = 0,3$, dann wäre aufgrund der durchgeführten Messreihe eine Ablehnung der angenommenen Hypothese mit 30 prozentiger Wahrscheinlichkeit unberechtigt. Dies bedeutet, dass bei Auswertung von 10 analogen Messreihen etwa drei von ihnen den gleichen oder einen größeren χ^2 -Wert ergeben könnten.

Damit die berechnete Prüfgröße (Gl. (8)) näherungsweise eine χ^2 -Verteilung besitzt, müssen die theoretischen Häufigkeiten $nP_j \geq 5$ sein. Wenn dies nicht erfüllt ist, was an den Enden der Verteilungen häufig auftritt, dann müssen benachbarte Klassen an den Enden der Verteilung zusammengefasst werden, wodurch sich die Zahl der Freiheitsgrade verringert.

3. Absorption von γ -Strahlung: Trifft γ -Strahlung auf einen Stoff, so treten die γ -Quanten mit den Atomen des Stoffes in Wechselwirkung. Dabei nimmt die Intensität der γ -Strahlung nach Durchdringen der Schichtdicke dz um den Betrag dI ab, wobei

$$dI = -\mu I dz \quad (12)$$

ist. μ ist der lineare Schwächungskoeffizient, der vom Absorptionsmaterial und der Energie der γ -Strahlung abhängt. Durch Integration erhält man das Schwächungsgesetz in der Form

$$I = I_0 \exp(-\mu z). \quad (13)$$

Dabei ist I_0 die Anfangsintensität bei $z = 0$. Die Intensitätsgrößen I und I_0 sind den jeweiligen Impulsraten x_z und x_0 proportional, von denen der Nulleffekt mit der Impulsrate x_N abgezogen wurde.

Von praktischem Interesse ist oft die material- und energieabhängige Halbwertsdicke $z_{1/2}$, bei welcher die Anfangsintensität I_0 auf den halben Wert abgeschwächt wird. Aus Gl. (13) folgt

$$z_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \quad (14)$$

In der einschlägigen Literatur (z.B. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 3) findet man für ausgewählte Materialien und ausgedehnte Energiebereiche Angaben für μ bzw. den daraus mit der

Dichte ρ gebildeten Massenschwächungskoeffizienten μ/ρ (bevorzugte Einheit $\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$). Aus

praktischen Gründen wird anstelle der Schichtdicke z oft die Massenflächendichte $d = z \cdot \rho$

(bevorzugte Einheit $\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$) und die damit gebildete Halbwertsflächendichte

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} \rho \quad (15)$$

benutzt.

AUFGABEN

1. Es sind zwei Messreihen mit je 500 Messungen aufzunehmen:

Messreihe 1: Kleine Impulszahl mit Mittelwert 1-3.

Messreihe 2: Große Impulszahl mit Mittelwert größer als 60.

2. Mit Hilfe des PC-geführten χ^2 -Testes vergleiche man die Häufigkeitsverteilungen der Messreihen mit einer Poisson- und einer Gaußverteilung. Während des Programmablaufs werden Sie zur Anfertigung und Eingabe einer Klasseneinteilung aufgefordert. Dabei muss für Messreihe 2 eine Einteilung gemäß Gl. (6) vorgenommen werden.
3. Messung der Absorption von γ -Strahlung in Blei als Funktion der Schichtdicke z und grafische Darstellung von $I/I_0 = f(z)$ auf Exponentialpapier.
4. Bestimmung der Energie des γ -Strahlers.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Den Prinzipaufbau der Messanordnung zeigt Abb. 3. Wenn der gestrichelt umrandete PC am Versuchsplatz angeschlossen ist, muss der Funktionswahlschalter am Zählgerät auf REMOTE gestellt werden. Jetzt können alle Einstellungen am Zählgerät (Zählrohrspannung, Zeit- oder Impulsvorwahl, Stichprobenumfang sowie Start, Stop, Reset) mit der PC-Maus vorgenommen werden. Die hierzu angebotenen Menüs sind übersichtlich, im Bedarfsfall hilft Ihr Betreuer. Alle Messwertetabellen können ausgedruckt werden.

Das Programm wird mit C:\RAD\LABLINK.EXE aufgerufen. Das Zählgerät wird nach Aufforderung auf COM. 1 geschaltet.

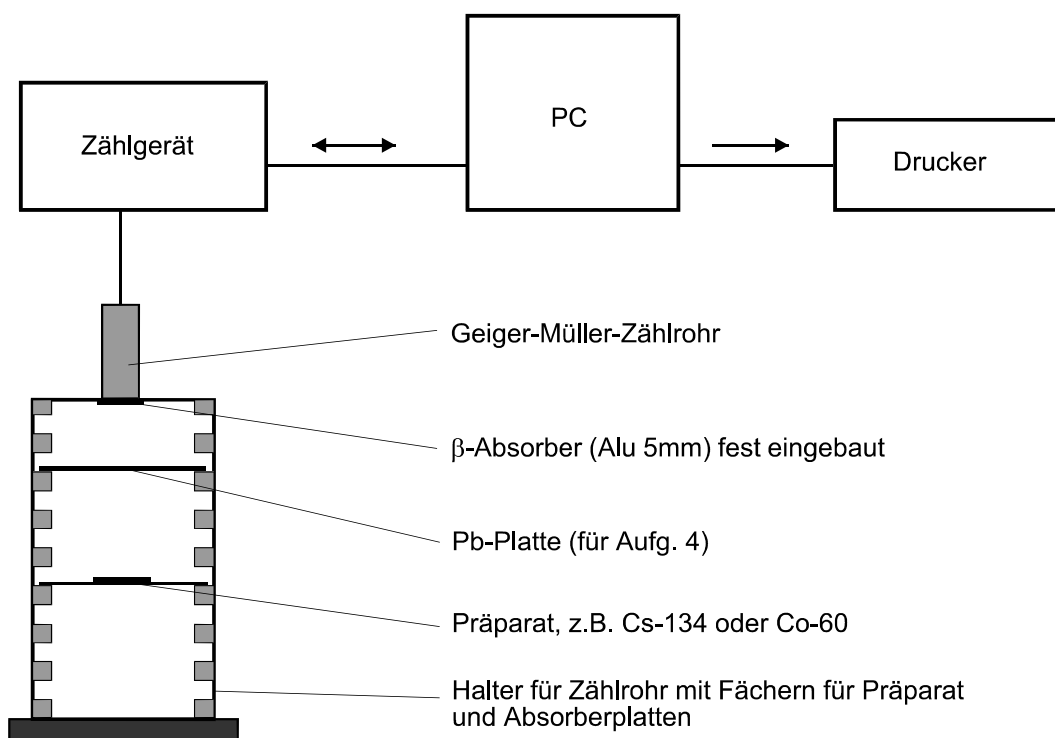


Abb. 3 PRINZIP DER MESSANORDNUNG

Bei einer Versuchsdurchführung ohne PC können alle Einstellungen am Zählgerät mit dem Funktionswahlschalter und dem UP- und DOWN-Taster vorgenommen werden. Alle Einstellungen werden auf dem Display angezeigt. Für START, STOP und RESET stehen in dem Fall gesonderte Tasten zur Verfügung.

Alle Messungen werden bei einer Zählrohrspannung von 900 V durchgeführt.

Für Aufgabe 1 werden 2 unterschiedliche Strahler benutzt. Für Messreihe 1 wird das Cs-137-Präparat in das etwa 3.Fach (ausprobieren!) von oben eingeführt und eine Messzeit von 1 s vorgewählt. Für Messreihe 2 wird das Co-60-Präparat in das 1. Fach von oben derart eingelegt, dass der Abstand zum Zählrohr möglichst klein ist, und eine Messzeit von ca. 2 s (ausprobieren!) ausgewählt. Nach Vorwahl von RUNS = 500 und Anklicken von COUNT erfolgen die Messungen einschließlich Ergebnisauflistung auf dem Bildschirm automatisch.

Am Ende jeder Messreihe müssen die Messdatenlisten für die anschließende PC-Auswertung jeweils unter einem unverwechselbaren Dateinamen abgespeichert werden: Wählen Sie zweckmäßig den Dateinamen XY.TSV. Hier ist X der Platzhalter für die ersten 5 Buchstaben Ihres Familiennamens (für Umlaute wie ä wird ae eingegeben). Y ist der Platzhalter für eine Ziffer zur Kennzeichnung der Messreihe.

Beispiel: Herr Müstermann speichert die Datenliste seiner Messreihe I unter MUEST1.TSV.

Für Aufgabe 2 steht zur Durchführung des χ^2 -Testes das Rechnerprogramm "CHI.EXE" zur Verfügung. Vom Programm werden verschiedene Eingabevarianten angeboten. Für die Auswertung nach Aufgabe 2 ist **Variante (2)** auszuwählen.

Nach dem Start von Variante (2) wird zur Eingabe des Namens der Messdatendatei aufgefordert. Danach erfolgt die automatische Datenübernahme und die Ausgabe von n , x_{\min} und x_{\max} mit der Aufforderung zur selbständigen Festlegung einer zweckmäßigen Klasseneinteilung (Gl.(6)). Nach Eingabe der Klasseneinteilung erfolgt der eigentliche χ^2 -Test.

Wichtig für die Klasseneinteilung: Es sind grundsätzlich nur halbzahlige Klassengrenzen zu wählen. Beispiel für Messreihe 1: Treten Impulszahlen zwischen $x_{\min} = 0$ und $x_{\max} = 7$ auf, dann wählt man für die erste Klasse die untere Grenze -0,5 und die obere Grenze 0,5. Für die letzte (die 8.) Klasse wählt man als untere Grenze 6,5 und als obere Grenze 7,5. Beispiel für Messreihe 2: Werden bei z.B. $x_{\min} = 54$ von Ihnen in der ersten Klasse die Impulszahlen 54 bis 56 zusammengefasst, dann wählt man als untere Grenze dieser Klasse 53,5 und als obere Grenze 56,5 usw.

Zur Übertragung ins Messprotokoll werden vom Rechner nach jedem Test angezeigt:

Mittelwert, Standardabweichung, Freiheitsgrad, die experimentellen Häufigkeiten $k(x_j)$, die theoretischen Häufigkeitswerte nP_j für die angepasste Poisson- bzw. Gaußverteilung sowie die χ^2 -Werte. Mit Hilfe der in Tabelle 1 aufgeführten Irrtumswahrscheinlichkeiten diskutierte man die Ergebnisse des χ^2 -Testes.

Die Eingabevarianten (4) und (5) sind für den Fall vorgesehen, dass keine Messdatendatei existiert. Die Variante (3) steht Ihnen fakultativ zur Selbstkontrolle nach Durchführung von Variante (2) zur Verfügung.

Zusatzangebot (Eingabevariante (1)): Unabhängig vom konkreten Versuch F7 kann zunächst das Verhalten statistischer Ensembles bei Parameterveränderungen und Wiederholungsmessungen untersucht werden. Es werden Zählraten-Stichproben nach einer Monte-Carlo-Methode ausgewürfelt. Stichprobenumfang und Mittelwert der Grundgesamtheit können in weiten Grenzen von Ihnen selbst vorgegeben werden. Im Anschluss können Sie den χ^2 -Test hierauf anwenden.

Für Aufgabe 3 werden die 5 Bleiplatten nacheinander in das 1. Fach und das Cs-137-Präparat in das 2. Fach von oben eingeführt. (Vergessen Sie nicht die I_0 -Messung ohne Bleiplatte!). Für alle Messungen wird eine Impulszahl von 1000 vorgewählt und die Messzeit registriert.

Zur Bestimmung des Nulleffekts (Impulsvorwahl 200) müssen alle Präparate genügend weit (mindestens 0,5 m) vom Zählrohr entfernt sein. Die Funktion $(x_z - x_N)/(x_0 - x_N) = f(z)$ wird grafisch auf Exponentialpapier dargestellt.

Beachten Sie, dass hier x_z, x_N und x_0 Impulsraten sind, also die vorgewählten Impulszahlen auf dieselbe Zeitbasis umzurechnen sind. Tragen Sie an allen Messpunkten einen Fehlerbalken (nur Ordinate berücksichtigen) ein.

Für Aufgabe 4 werden die grafischen Darstellungen $\mu/\rho = f(E)$ (Abb. 4) und $z_{1/2} = f(E)$ (Abb. 5) benutzt. Sie können aus Ihrer grafischen Darstellung $I/I_0 = f(z)$ (Aufg. 3) entweder μ aus dem Anstieg bestimmen und mit $\rho_{\text{Blei}} = 11,34 \text{ g/cm}^3$ rechnen oder $z_{1/2}$ direkt entnehmen.

FRAGEN

1. Welche Verfahren zur Prüfung statistischer Verteilungen kennen Sie?
2. Worauf schließt man, wenn man für die Anpassung einer Gaußverteilung $s = \sqrt{\bar{x}}$ findet?
3. Wie funktioniert ein Geiger-Müller-Zählrohr?

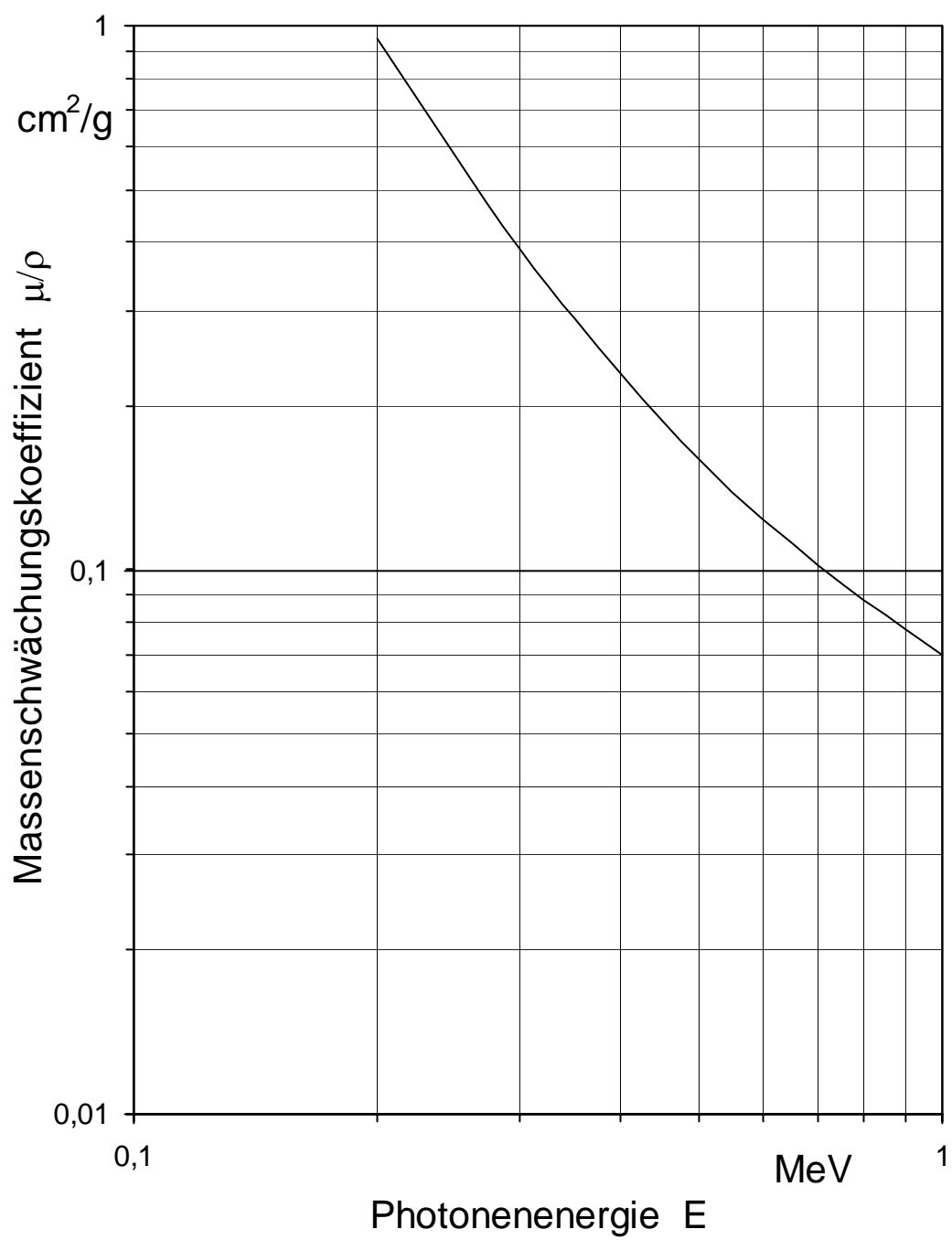


Abb. 4 MASSENSCHWÄCHUNGSKOEFFIZIENT

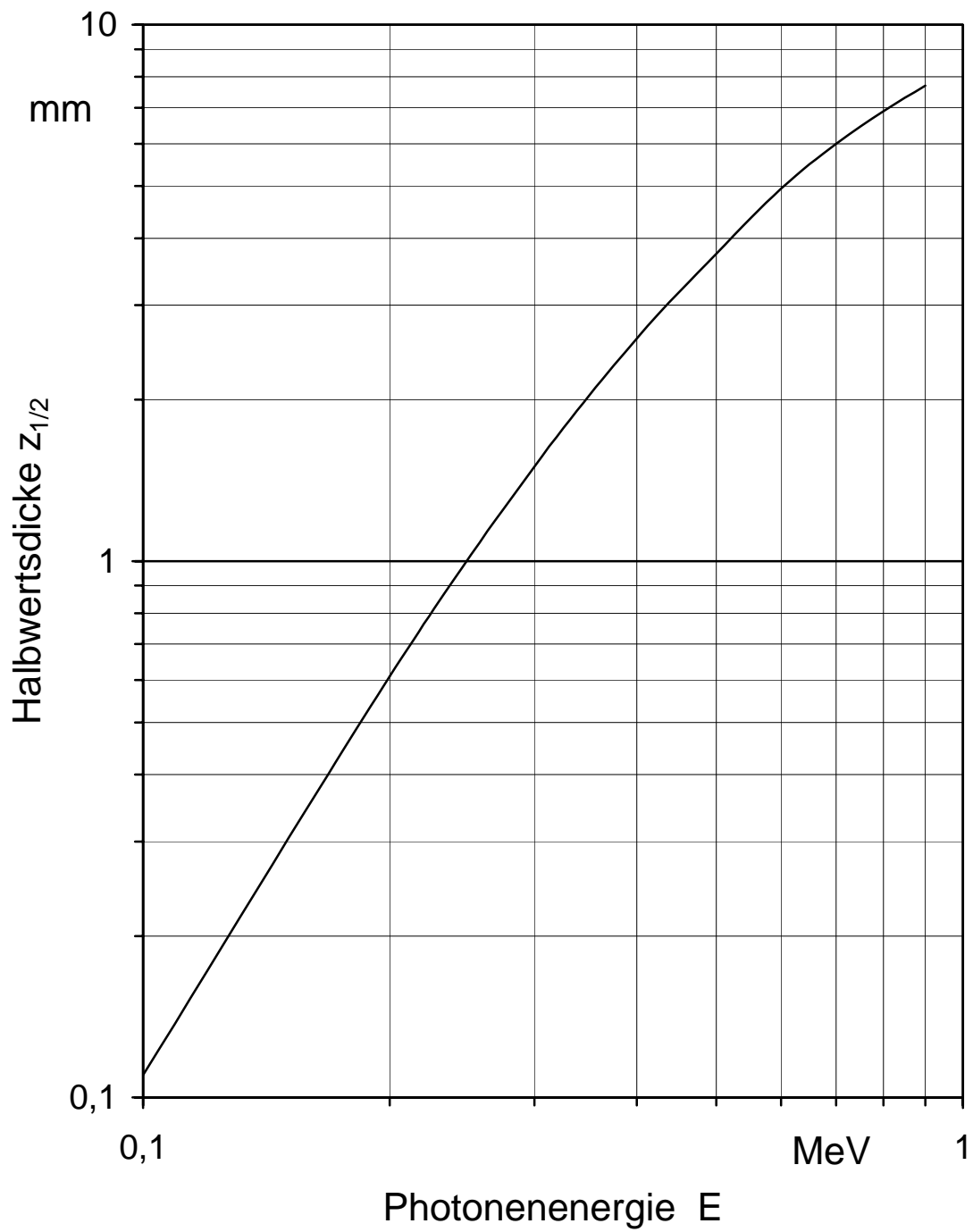


Abb.5 HALBWERTSDICKE

A1 PHOTOEFFEKT

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Welle-Teilchen-Dualismus, Photon, Photoelektron, Photozelle, Bändermodell, Austrittsarbeit, Plancksches Wirkungsquantum, Lichtspektrum.

Im Jahre 1887 beobachtete W. Hallwachs, dass eine isoliert aufgestellte Metallplatte bei Bestrahlung mit kurzwelligem Licht negative Ladungen abgibt und sich dabei positiv auflädt, solange die Lichtfrequenz eine bestimmte Grenze nicht unterschreitet. Von P. Lenard wurde gezeigt, dass es sich bei den negativen Ladungen um Elektronen (die sog. Photoelektronen) handelt. Die Deutung des Photoeffektes, welcher auf der Grundlage der damals anerkannten klassischen elektromagnetischen Lichttheorie nicht erklärt werden konnte, trug wesentlich zur Entstehung der Quantentheorie bei. Deshalb gehört dieser Versuch zu den Grundexperimenten der Physik.

Nach dem klassischen Wellenbild des Lichtes würden die freien Elektronen im Metall durch das elektrische Feld der Lichtwelle beschleunigt und damit zum Mitschwingen angeregt und dabei solange Energie aufnehmen, bis sie die normalerweise das Austreten aus dem Metall verhindernden Kräfte überwinden könnten. Hiernach müsste die nach dem Austritt noch vorhandene kinetische Energie der Elektronen mit wachsender Lichtintensität zunehmen. Auch müsste bei schwacher Strahlung die Auslösung umso später einsetzen, je schwächer die Strahlung ist, da eine gewisse Zeit benötigt wird, bis ein Elektron genügend Energie von der Strahlung aufgenommen hat. Die experimentellen Befunde stehen im Widerspruch zu diesem Wellenbild. Auch können hiermit die beobachtete Zunahme der kinetischen Energie der Photoelektronen mit steigender Lichtfrequenz ν sowie die untere Grenzfrequenz für die Auslösung der Elektronen nicht erklärt werden.

Die Erklärung des Problems gab A. Einstein 1905 mit seiner Formel der Energiebilanz des Photoeffektes

$$E_{\text{kin}} = h\nu - W_A \quad (1)$$

auf der Grundlage folgender Annahmen: Das Licht besteht aus einem Strom von einzelnen korpuskularen Lichtquanten (Photonen) mit der Energie $W = h\nu$ (h : Plancksches Wirkungsquantum). Diese Energie kann von einem Elektron absorbiert werden. Das Elektron wird ausgelöst, wenn die absorbierte Energie die Bindungsenergie, die sog. Austrittsarbeit W_A , übersteigt. Den Differenzbetrag behält das Elektron als kinetische Energie E_{kin} in Abhängigkeit von der Lichtfrequenz. Unterhalb der Grenzfrequenz ν_{gr} kann das Photon die Austrittsarbeit nicht aufbringen. Jedes Photoelektron erhält seine Energie von je einem Photon, da die Wahrscheinlichkeit für die Absorption von zwei Photonen durch ein Elektron sehr gering ist. Deshalb sind die Anzahl der Photoelektronen proportional zur Lichtintensität und ihre kinetische Energie nur abhängig von der Photonenenergie.

Zum besseren Verständnis des Photoeffektes kann man zunächst die Energieverteilung der Elektronen im Metall anhand des Bändermodells betrachten. Bei Metallen ist das Leitungsband L auch bei Temperaturen $T \approx 0$ K teilweise besetzt. Das oberste im Grundzustand ($T = 0$ K) besetzte Energieniveau des Leitungsbandes heißt Fermi-Niveau. Da die Leitungselektronen im

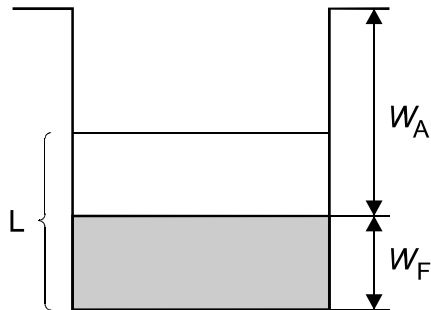


Abb.1 LEITUNGSELEKTRONEN IM POTENTIALTOPF

Metall frei beweglich sind, kann man das Metall vereinfachend durch einen rechteckigen Potentialtopf beschreiben, der bis zum Fermi-Niveau mit Elektronen gefüllt ist (Abb.1).

Wird ein Photon von einem Elektron absorbiert, so kann dieses den Potentialtopf (das Metall) verlassen, wenn mindestens die Austrittsarbeit W_A übertragen wurde. Da grundsätzlich aus allen besetzten Niveaus Elektronen ausgelöst werden können, besitzen die Photoelektronen eine Energieverteilung, die außer von der Lichtfrequenz auch von der Besetzungswahrscheinlichkeit der Energie-

zustände im Leitungsband abhängt. Bei Zimmertemperatur kann man näherungsweise annehmen, dass die Photoelektronen mit der maximalen kinetischen Energie aus dem Fermi-Niveau stammen, weil nur rel. wenige Elektronen höhere Energieniveaus $W > W_F$ besetzen. Diese thermische Anregung ist im Wesentlichen auf den Energiebereich $W - W_F \leq kT$ beschränkt (k : Boltzmann-Konstante). Bei Zimmertemperatur ist $kT \approx 25$ meV und damit gegen die Austrittsarbeit vernachlässigbar.

Die Untersuchung des Photoeffektes kann in einer sog. Photozelle erfolgen (Abb.2). In einer evakuierten Kammer befinden sich zwei Elektroden, die zylinderförmige Photokatode K und die stabförmige Anode A in der Achse des Kato-

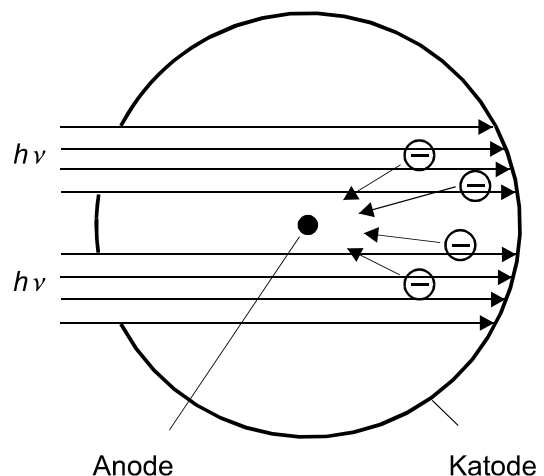


Abb.2 PRINZIP DER PHOTOZELLE

denzylinders. Elektronen, die durch Photonen aus der Katode ausgelöst werden, können zum Teil zur Anode gelangen und als Photostrom I_{ph} gemessen werden. Die Spannung U zwischen den Elektroden kann variiert werden. Die Abhängigkeit $I_{ph} = f(U)$ bezeichnet man als Kennlinie der Photozelle. Legt man eine „Bremsspannung“ U zwischen die Elektroden, so können nur solche Elektronen zur Anode gelangen, deren kinetische Energie mindestens eU (e : Elementarladung) beträgt. Erhöht man die Bremsspannung bis zu einem Wert U_0 , bei welchem der Photostrom gerade verschwindet, so gelangen nur noch die schnellsten Elektronen unmittelbar bis zur Anode. Ihre kinetische Energie (Gl.(1)) hat sich auf dem Weg von der Katode zur Anode vollständig in die potentielle Energie

$$eU_0 = h\nu - W_A \quad (2)$$

umgewandelt.

Trägt man die Bremsspannung U_0 als Funktion der Photonenfrequenz ν auf, so erhält man eine Gerade, aus deren Anstieg das Plancksche Wirkungsquantum h berechnet werden kann. Der Achsabschnitt W_A/e auf der U_0 -Achse liefert jedoch nicht, wie man zunächst denken könnte, die Austrittsarbeit aus der Katode. Das wäre nur der Fall, wenn Anode und Katode aus dem gleichen Material bestehen würden. Aus anwendungstechnischen Gründen verwendet man bei tech-

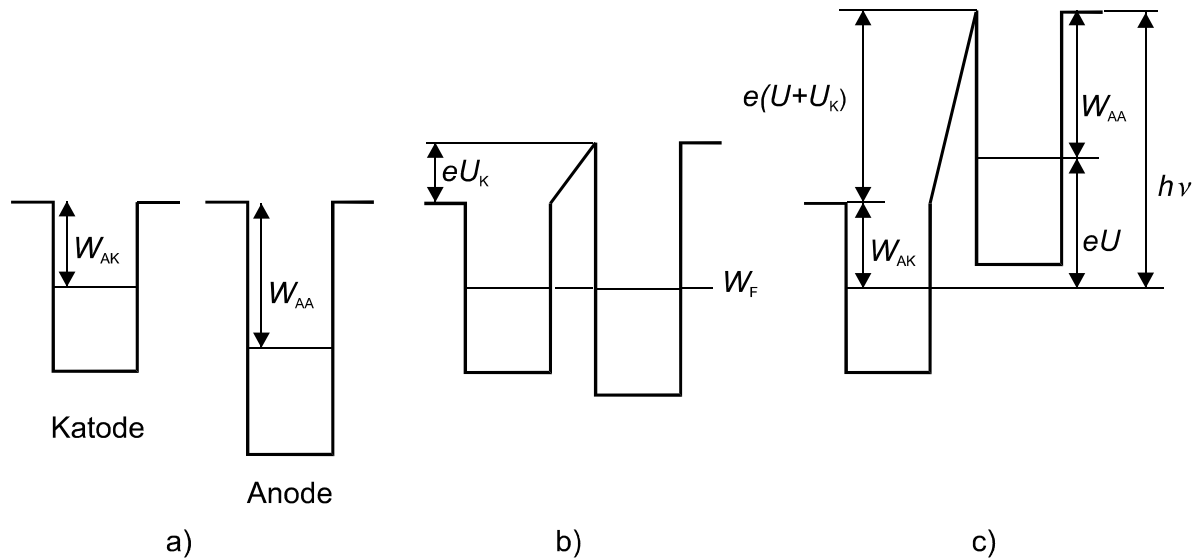


Abb.3 AUSTRITTSARBEIT UND KONTAKTPOTENTIAL

nisch genutzten Photozellen für die Katode ein Material mit möglichst niedriger Austrittsarbeit W_{AK} und für die Anode mit möglichst hoher Austrittsarbeit W_{AA} . Folglich besteht zwischen den Elektroden auch ohne äußere Spannung ein so genanntes Kontaktpotential U_K (siehe Abb.3): Wenn man zwei Metalle mit unterschiedlicher Austrittsarbeit (Abb.3a) miteinander leitend verbindet (Abb.3b), so fließen solange Elektronen vom Metall mit der niedrigeren Austrittsarbeit in das andere, bis die Fermi-Niveaus auf gleicher Höhe liegen. Das erste Metall wird dadurch rel. positiver und zwischen beiden entsteht eine Potentialdifferenz, die Kontaktpotential $U_K = (W_{AA} - W_{AK})/e$. Legt man jetzt eine Bremsspannung U zwischen Katode und Anode (Abb.3c), so beträgt die Gesamtarbeit, die die Elektronen auf dem Weg zur Anode verrichten müssen, $W_{AK} + e(U + U_K)$. Deshalb verschwindet der Photostrom, sofern diese Energie von je einem Photon aufgebracht wird, wenn gerade gilt

$$h\nu = W_{AK} + e(U_0 + U_K) \quad \text{bzw.} \quad eU_0 = h\nu - W_{AK} - eU_K = h\nu - W_{AA}.$$

Deshalb könnte die Austrittsarbeit aus der Katode grundsätzlich nur bei Kenntnis des Kontaktpotentials bestimmt werden. Aber hierzu ist der Photoeffekt mit einer gewöhnlichen Photozelle wenig geeignet, da Austrittsarbeiten aus Metallen sehr stark von Oberflächenverunreinigungen (z.B. durch Restgasatome) und von der Kristallorientierung abhängen.

AUFGABEN

1. Justierung der Messanordnung
2. Messung der Kennlinie $I_{ph} = f(U)$ einer Photozelle im Bereich der Anodenspannung von -15 V bis +60V für die gelbe (579,1 nm) Spektralfarbe einer Quecksilberhochdrucklampe, grafische Darstellung und Interpretation.
3. Messung der Bremsspannung U_0 , für welche der Photostrom verschwindet, für die Spektralfarben gelb (579,1 nm), grün (546,1 nm), blaugrün (491,6 nm), blau (435,8 nm), violett (404,7 nm) und ultraviolett (365,0 nm). U_0 wird jeweils 6 mal gemessen und daraus die Standardabweichung bestimmt.
4. Grafische Darstellung $U_0 = f(\nu)$ mit den Messwerten aus Aufgabe 3 und Eintragung von Fehlerbalken an den Messpunkten. Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums h aus dem Anstieg.
5. Abschätzung der Grenzfrequenz ν_{gr} für die Auslösung von Photoelektronen aus der grafischen Darstellung der Aufgabe 4.
6. Messung der Bremsspannung U_0 als Funktion der Lichtintensität für die Farben grün, blau und violett, grafische Darstellung der Ergebnisse und Interpretation.
7. Diskutieren Sie qualitativ mögliche Quellen für systematische Messfehler, ihre Auswirkung auf die Ergebnisse sowie Möglichkeiten zur Unterdrückung.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Das Prinzip des Versuchsaufbaus zeigt Abb.4 in der Draufsicht. Alle Bauteile sind verschiebbar auf einer optischen Bank angeordnet. Der Kondensor KO dient zur Sammlung des Lichtes aus der Quecksilberhochdrucklampe HgL und gleichmäßigen Ausleuchtung des Spaltes Sp.

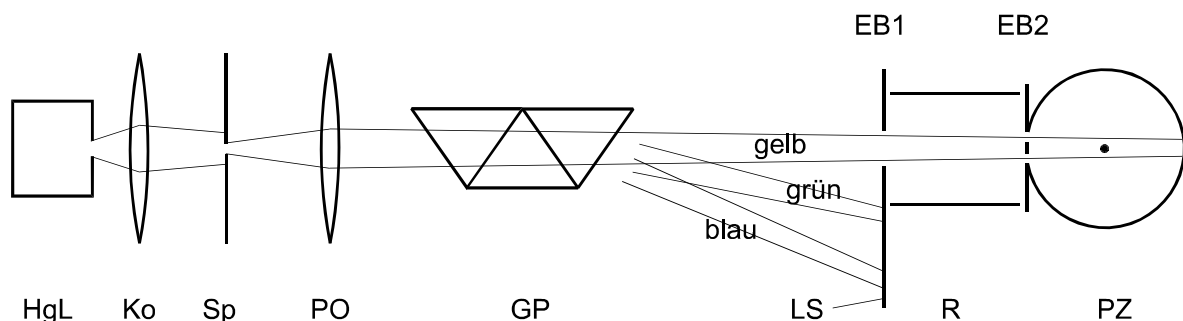
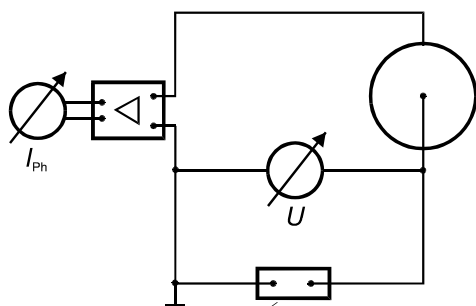


Abb.4 VERSUCHSAUFBAU

Mit dem Projektionsobjektiv PO wird der Spalt Sp auf die erste Eintrittsblende EB1 der Photozelle PZ abgebildet. Das dazwischen befindliche Geradsichtprisma GP bewirkt die Auffäche-

ung des Lichtes in seine Spektralfarben. Zum getrennten Einfangen der Spektralfarben mit der Eintrittsblende EB1 ist die Photozelle auf einem schwenkbaren Arm montiert. Außerdem kann durch leichtes Verdrehen der Photozelle um ihre senkrechte Achse erreicht werden, dass das Licht auch optimal durch die zweite Eintrittsblende EB2 hindurchtritt. Durch die Anordnung von zwei hintereinander liegenden Blenden mit einem dazwischen liegenden innen geschwärzten Rohr R erreicht man, dass nur rel. wenig störendes Streulicht in die Photozelle gelangt und der Raum nicht völlig abgedunkelt werden muss. Zur Erleichterung der Justierung ist die Eintrittsblende EB1 von einem fluoreszierenden Leuchtschirm LS umgeben, welcher auch eine rel. starke UV-Linie sichtbar werden lässt und somit für die



umpolbare Spannungsversorgung:
Anodenspannung 0 bis -15 V (Bremsspannung)
Anodenspannung 0 bis +60 V (Saugspannung)

Abb.5 ELEKTRISCHE SCHALTUNG

ke UV-Linie sichtbar werden lässt und somit für die Messung verfügbar macht.

Das Prinzip der elektrischen Messung zeigt Abb.5. Der Photostrom I_{ph} wird mit einem empfindlichen Picoamperemeter gemessen. Die einstellbare Anodenspannung U kann einem erdfreien Versorgungsgerät entnommen werden.

Die Justierung (Aufgabe 1) ist sehr sorgfältig vorzunehmen und erfordert einige Zeit. Die Justierung ist ausreichend, wenn die Farben auf dem Leuchtschirm LS, welcher die Eintrittsblende EB1 umgibt, soweit getrennt werden, dass sie die Blende ohne Überlage-

rung passieren können, und der Photostrom für gelbes Licht bei $U = 0$ wenigstens 5 nA beträgt. Das optimale Einfädeln des Lichtes durch EB1 und EB2 erreicht man iterativ durch abwechselndes Schwenken des Armes und Drehen der Photozelle. Zur guten Beobachtung von EB2 wird das Rohr zwischen den Eintrittsblenden vorübergehend herausgeklappt. Beachten Sie, dass häufiges Ein- und Ausschalten die Lebensdauer der Lampe verkürzt.

Die Kennlinien $I_{ph} = f(U)$ von Aufgabe 2 werden auf Millimeterpapier grafisch dargestellt. Es wird empfohlen, die Bereiche der positiven und negativen Anodenspannung getrennt mit unterschiedlichem Ordinatenmaßstab darzustellen.

Bei der Bestimmung der Bremsspannungen U_0 (Aufgaben 3 und 6) ist jeweils bis zum empfind-

Achtung:

Das Licht der Quecksilber-Hochdrucklampe ist stark UV-haltig. Sehen Sie deshalb niemals in den Strahlengang hinein und schützen Sie Ihre Augen und die anderer Anwesender durch geeignete Abschirmung vor Streulicht.

lichsten Messbereich des Picoamperemeters herunterzuschalten.

Für Aufgabe 4 folgt die Länge der Fehlerbalken aus den in Aufgabe 3 bestimmten Standardabweichungen.

Für Aufgabe 6 wird die Lichtintensität mit Hilfe eines gestuften Graufilters, welcher auf dem Leuchtschirm LS magnetisch haftet, variiert.

Für Aufgabe 7 kann man z.B. überlegen, ob bzw. warum auch eine „entgegengesetzte“ Komponente des Photostroms auftreten kann und ob noch andere Störströme mitgemessen werden könnten.

FRAGEN

1. Was versteht man unter dem Welle-Teilchen-Dualismus des Lichtes? Welche grundlegenden Experimente stützen die jeweilige Sicht?
2. Welche Anwendungen des äußeren Photoeffektes kennen Sie?
3. Was versteht man unter dem inneren Photoeffekt? Kennen Sie ein Beispiel für seine technische Nutzung?

A2 FRANCK-HERTZ-VERSUCH

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Atommodelle von Rutherford und Bohr, Spektrallinien, Elektronenstoßanregung, Stoßquerschnitte, Plancksches Wirkungsquantum, Kontaktpotential, Strom-Spannungskennlinie*

J. Franck und G. Hertz berichteten 1914 über ein Experiment, bei welchem Elektronen beim unelastischen Stoß mit Quecksilberatomen ihre Energie in diskreten Portionen an die Quecksilberatome abgeben. Die Hg-Atome emittierten dabei Lichtquanten mit einer Energie, welche gerade dem Energieverlust der stoßenden Elektronen entsprach. Dies wurde in den folgenden Jahren als ein experimenteller Beweis für das bereits 1913 von N. Bohr vorgeschlagene Atommodell gedeutet. Die Bohrschen Postulate über den Aufbau des Atoms stellen in der Physikgeschichte einen entscheidenden Schritt dar auf dem Weg zum heute anerkannten wellenmechanischen Modell, welches das theoretische Fundament der Quantenmechanik des Atoms bildet.

Bohrsches Atommodell: Den Ausgang bildet das Rutherfordsche Modell, nach dem ein Atom aus einem positiven geladenen Kern und einer Anzahl ihn umkreisender negativ geladener Elektronen besteht und nach außen neutral erscheint. Ein solches Atom kann aber nach den Geset-

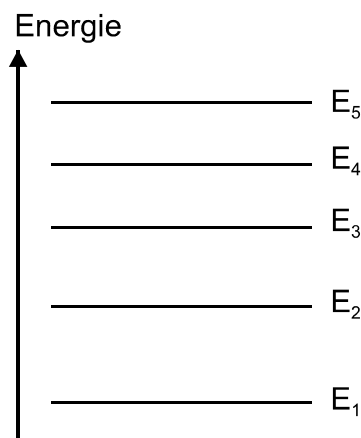


Abb.1 ERLAUBTE
ENERGIENIVEAUS

zen der klassischen Elektrodynamik nicht stabil sein: Auf einer geschlossenen Kreisbahn bewegt sich ein Elektron auch bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag fortwährend gleichmäßig beschleunigt, es müsste also ständig Energie in Form elektromagnetischer Strahlung abgegeben werden. Der Bahnradius würde immer kleiner und die Umlauffrequenz, die gleich der Frequenz ν des abgestrahlten Lichtes ist, würde stetig zunehmen. Tatsächlich aber sind Atome beliebig lange stabil und sie liefern kein kontinuierliches Spektrum sondern Spektren, die aus einzelnen Spektrallinien bestehen. Offensichtlich können die Gesetze der klassischen Physik inneratomare Vorgänge nicht hinreichend erklären.

Den Ausweg wies N. Bohr, indem er zunächst ad hoc zwei Forderungen, die sog. **Bohrschen Postulate** aufstellte, welche mit der klassischen Physik unvereinbar waren und später nach weiteren Verfeinerungen eine quantenmechanische Begründung fanden:

1. Bohrsche Quantenbedingung: Von allen möglichen kreisförmigen Elektronenbahnen sind nur diejenigen erlaubt, für die der Betrag des Drehimpulses l der Elektronen ein ganzzahliges Vielfaches des Planckschen Wirkungsquantums h , geteilt durch 2π , ist:

$$|l| = n \frac{h}{2\pi} . \quad (1)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ heißt Hauptquantenzahl, durch sie wird vom Kern aus zählend die jeweilige Kreisbahn bestimmt. Diesen Kreisbahnen entspricht eine diskrete Folge von Energiewerten E_1, E_2, E_3, \dots , Zwischenzustände existieren nicht (Abb.1):

2. Bohrsche Frequenzbedingung: Das Elektron kann bei Energieaufnahme z.B. durch Stoßanregung oder Energieabgabe durch Lichtstrahlung sog. Quantensprünge von einer Bahn auf eine andere ausführen. Bei einem Übergang von einem Zustand mit der Energie E_n in einen Zustand mit der rel. niedrigeren Energie E_m emittiert das Atom ein Lichtquant mit der Energie

$$h\nu = E_n - E_m . \quad (2)$$

Dieses Modell liefert das richtige Wasserstoffspektrum.

Der Franck-Hertz-Versuch mit Quecksilber: Den Prinzipaufbau der Apparatur zeigt Abb.2. In einer mit Quecksilberdampf gefüllten Glasröhre werden von einer Glühkatode K Elektronen emittiert.

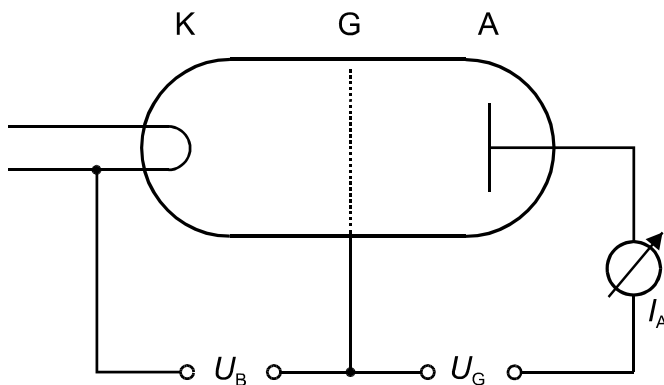


Abb.2 PRINZIP DES FRANCK-HERTZ-VERSUCHES

Sie werden in einem elektrischen Feld, welches durch Anlegen einer Spannung U_B zwischen Katode und Gitter G erzeugt wird, beschleunigt. Danach treten die Elektronen in ein Bremsfeld ein, welches durch die Gegenspannung U_G zwischen dem Gitter und dem dahinter befindlichen Auffänger A verursacht wird. Der Auffängerstrom I_A kann mit einem empfindlichen Amperemeter gemessen werden.

Es gelangen jedoch nur die Elektronen bis zum Auffänger, deren Geschwindigkeitskomponente v_z in Feldrichtung die Bedingung

$$\frac{m}{2} v_z^2 \geq eU_G \quad (3)$$

erfüllt (e = Elementarladung, m = Elektronenmasse). Der Rest fällt auf das Gitter zurück.

Im Beschleunigungsraum zwischen Katode und Gitter können bei genügend hohem Hg-Dampfdruck Elektronen und Quecksilberatome zusammenstoßen. Dabei kann es zur Anregung des Atoms kommen, wenn die Elektronenenergie einen Wert erreicht hat, welcher mindestens gleich ist der Differenz $\Delta E = E_{A1} - E_{Gr}$ zwischen dem ersten angeregten Zustand E_{A1} und dem Grundzustand E_{Gr} des Hg-Atoms. Genau diese Energie ΔE kann übertragen werden, das Atom befindet sich jetzt im ersten angeregten Zustand und die kinetische Energie des Elektrons

hat sich um dieses ΔE vermindert. Das Atom verweilt nur ca. 10^{-8} s im angeregten Zustand und kehrt danach unter Emission eines Lichtquants mit der Energie

$$h\nu = E_{A1} - E_{Gr} \quad (4)$$

in den Grundzustand zurück.

Die Anregung der Atome kann beobachtet werden, indem man den Auffängerstrom I_A in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung U_B misst. Erhöht man U_B von null beginnend, so werden immer mehr Elektronen aus der negativen Raumladungswolke um den Glühdraht in Richtung Gitter abgesaugt und beschleunigt. Dabei wird der Auffängerstrom I_A stark ansteigen, wenn U_B die fest eingestellte Gegenspannung U_G betragsmäßig übersteigt. Erreicht die Elektronenenergie bei weiterer Steigerung von U_B den notwendigen Betrag zur Erzeugung des ersten angeregten Zustandes, so kann es diese Energie infolge eines so genannten unelastischen Stoßes an das Atom abgeben und I_A wird steil absinken, weil die Elektronen nach der Energieübertragung nicht mehr gegen das Bremsfeld zum Auffänger gelangen können. Erst bei weiterer Erhöhung von U_B kann Energie für eine zweite, dritte usw. Energieübertragung aufgenommen werden, sofern die vom Hg-Dampfdruck abhängige Stoßwahrscheinlichkeit (siehe auch „Stoßquerschnitte“) und die Laufräumlänge bis zum Gitter dies zulassen. Dementsprechend gibt es eine Aufeinanderfolge von Maxima und Minima des Auffängerstromes I_A und aus dem Abstand ΔU_B aufeinander folgender Maxima in einer grafischen Darstellung $I_A = f(U_B)$ kann auf einfache Weise die erste Anregungsenergie

$$E_{A1} - E_{Gr} = e \Delta U_B \quad (5)$$

des Quecksilbers bestimmt werden. Die im UV-Bereich liegende emittierte Strahlung dieser Energie (Gl.(4)) kann spektroskopisch nachgewiesen werden.

Ergänzend muss auf einige Faktoren hingewiesen werden, welche einen Einfluss auf die zuvor beschriebene Strom-Spannungs-Kennlinie, die sog. Franck-Hertz-Kurve, haben:

Das Energiespektrum der Elektronen: Bisher wurde nicht erwähnt, dass die Elektronen bereits mit unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten aus der Glühkatode austreten. Der Grund besteht darin, dass die Leitungselektronen im Metall bereits ein Energiespektrum, die sog. Fermi-Dirac-Verteilung, aufweisen. Infolgedessen haben die Elektronen auch bei Durchlaufen desselben Beschleunigungsgefälles unterschiedliche Energien. Das führt zu einer Verbreiterung bzw. Abrundung der Maxima und Minima. Die gleiche Wirkung hat eine Aufspreizung der oben erwähnten z-Komponente der Elektronengeschwindigkeit infolge elastischer Stöße mit den Atomen. Der Massenunterschied der Stoßpartner erlaubt zwar praktisch keine nennenswerte Energieübertragung, aber umso mehr erhebliche Richtungsänderungen bis zu 180° .

Das Kontaktpotential: Die Franck-Hertz-Kurve ist auf der Abszisse um das Kontaktpotential zwischen Katode und Gitter verschoben, da diese Elektroden im Allgemeinen aus unterschiedlichen Materialien bestehen (siehe auch Versuch A1). Das Kontaktpotential ist als Differenz der Austrittsarbeiten beider Materialien definiert.

Die Gasdichte: Ist die Hg-Gasdichte und damit die Stoßwahrscheinlichkeit genügend groß, so wird praktisch jedes Elektron bei oder kurz nach Erreichen der ersten Anregungsenergie $E_{A1} - E_{Gr}$ einen unelastischen Stoß ausführen und somit keine wesentlich höhere Energie aufnehmen können. Deshalb können unter diesen Betriebsbedingungen keine höheren Anregungen wie etwa $E_{A2} - E_{Gr}$ auftreten. Höhere Anregungen lassen sich grundsätzlich durch eine entsprechende Absenkung der Gasdichte über die Röhrentemperatur erreichen und spektroskopisch als eine Vielzahl von Spektrallinien nachweisen. Der Nachweis anhand der Franck-Hertz-Kurve gelingt wegen der zuvor genannten Kurvenverbreiterung und der viel geringeren Wahrscheinlichkeiten für höhere Anregungen nur andeutungsweise bei erhöhtem experimentellem Aufwand im Vergleich zu unserer Praktikumsanordnung.

Der Franck-Hertz-Versuch mit Neon: Franck-Hertz-Röhren können auch mit anderen einatomigen Gasen wie z.B. Neon betrieben werden. Im Unterschied zum Hg gibt es beim Neon aber keine sog. Resonanzanregung, das heißt, es gibt keine Spektrallinie, deren Energie $h\nu$ der beim unelastischen Stoß vom Atom aufgenommenen Energie von ca. 19 eV entspricht. Dieser Übergang ist nach den nur quantenphysikalisch begründbaren sog. Auswahlregeln nicht erlaubt. Der Energiesatz wird aber dennoch erfüllt, weil die angeregten Atome mit Zwischenschritten über tiefere angeregte Zustände in den Grundzustand zurückkehren können. Im Einzelnen ergibt sich folgender Ablauf: Aus dem Grundzustand erfolgt die Anregung mit der größten Wahrscheinlichkeit in Zustände zwischen 18,3 und 19 eV gegenüber der Energie im Grundzustand. Die Abregung hingegen erfolgt zunächst in Zustände zwischen 16,5 und 16,8 eV und erst von dort weiter in den Grundzustand. Im Ergebnis wird neben sichtbarem Licht zwischen Rot und Gelb (ca. 2 bis 3 eV) UV-Licht im Bereich von 16,5 bis 17 eV emittiert.

AUFGABEN

1. Aufnahme der Franck-Hertz-Kurve mit Quecksilber und Bestimmung der ersten Anregungsenergie.
2. Aufnahme der Franck-Hertz-Kurve mit Neon und Bestimmung der ersten Anregungsenergie.
3. Beobachtung und Diskussion der an der Neon-Röhre sichtbaren Leuchterscheinung.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Die im Versuch verwendeten Franck-Hertz-Röhren für Hg und Neon enthalten im Unterschied zum in Abb.2 erläuterten Prinzip ein Vierelektrodensystem, bestehend aus der Katode K, den Gittern G1 und G2 und dem Auffänger A. Abb.3 zeigt den Aufbau und die Beschaltung im Prinzip. Beide Röhren werden über ein gemeinsames Betriebsgerät mit den notwendigen Spannungen versorgt. Am Betriebsgerät befinden sich auch die Buchsen zum Anschluss der Messgeräte für den Auffängerstrom. Im Versuch werden parallel ein X-Y-Schreiber und ein Oszilloskop einge-

setzt. Während die Ne-Röhre bei Zimmertemperatur betrieben wird, muss die Hg-Röhre, welche in einem Rohrofen steckt, zur Einstellung des erforderlichen Dampfdruckes hochgeheizt werden. Hierzu wird vom Betriebsgerät die Temperatur der Hg-Röhre ermittelt und die Röhrenheizung und damit der Sättigungsdampfdruck entsprechend der vorgewählten Solltemperatur nachgere-

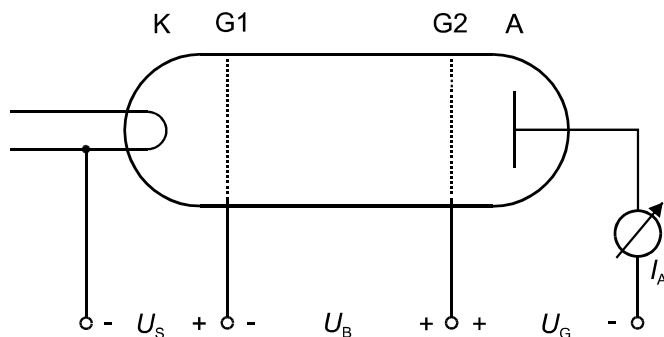


Abb.3 BESCHALTUNG DER HG- UND NE-RÖHREN

gelt. Im Versuch ist die Temperatur bereits auf 180 °C voreingestellt, da bei dieser Temperatur eine ausgeprägte Franck-Hertz-Kurve erhalten wird. Die Funktion der Röhren unterscheidet sich nur wenig vom bereits anhand von Abb.2 erläuterten Prinzip: Die aus einer indirekt geheizten Kathode emittierten Elektronen werden von der Saugspannung U_S zum Gitter G1

beschleunigt. Der durch G1 hindurchtretende Emissionsstrom ist von der Beschleunigungsspannung U_B zwischen G1 und G2 praktisch unabhängig (von einem geringen sog. Durchgriff wird dabei abgesehen). Zur Aufnahme der Franck-Hertz-Kurven wird bei fester Saugspannung U_S und Gegenspannung U_G die Beschleunigungsspannung U_B von null beginnend hochgefahren.

Die elektrische Schaltung wird entsprechend den ausführlichen Schaltbildern am Versuchsort aufgebaut. Für Aufgabe 1 ist zu kontrollieren, ob die Hg-Röhre vollständig im Kupferrohr zur Adaptierung an den Durchmesser des Rohrofens steckt und ob die Messspitze des Temperaturfühlers vollständig in das Sackloch im Kupferrohr eingeführt ist (Abb.4). Nach Einschalten des Betriebsgerätes signalisiert eine rote LED-Anzeige das Aufheizen des Ofens. Die Anzeige leuchtet grün bei Erreichen der Betriebstemperatur von 180°C. Jetzt wird zunächst das Oszilloskop zur Registrierung der Franck-Hertz-Kurve wie folgt an das Betriebsgerät angeschlossen: An den Y-Eingang wird eine zu I_A proportionale Spannung U_A und an den X-Eingang die Spannung $U_B/10$ gelegt und der Betriebsartenschalter auf „Sägezahn“ gestellt. Die Beschleunigungsspannung U_B wird automatisch mit einem Sägezahnverlauf auf jeweils ca. 30 V hochgefahren. Anschließend werden die Spannungen U_G und U_S auf etwa 1,5 V voreingestellt und bei Beobachtung des Bildschirms solange wechselseitig nachgeregelt, bis sich die typische Franck-Hertz-Kurve als stehendes Bild herausgebildet hat. Die Benutzung des Oszilloskops bietet den Vorteil, dass der Einfluss der Änderung von U_G und U_S unmittelbar verfolgt werden kann.

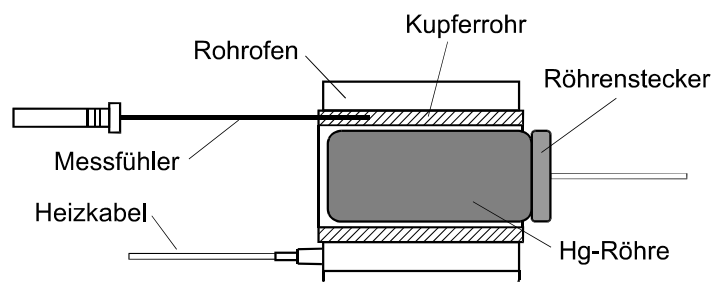


Abb.4 ROHROFEN MIT HG-RÖHRE UND MESSFÜHLER

Ist eine optimale Einstellung gefunden, wird parallel zum Oszilloskop ein X-Y-Schreiber angeschlossen. Eine ausführliche Beschreibung des Schreibers mit Betriebsanleitung liegt am Versuchsort aus. Zu Beginn muss der Schreiber geeignet einjustiert werden. Folgende Messbereichseinstellungen werden empfohlen:

Für U_B auf X-Achse: VAR, 1V/cm und

für I_A auf Y-Achse: gleichfalls VAR, 1V/cm.

Anschließend wird der Nullpunkt mit den dafür zuständigen Knöpfen ($\triangleleft \circ \triangleright$) jeweils etwa 1 cm vom linken bzw. unteren Anschlag eingestellt.

Im Unterschied zur Y-Achse muss die X-Achse in Volt geeicht werden. Hierzu wird die X-Empfindlichkeit am stufenlosen Einstellregler links neben dem X-Messbereichsschalter so eingestellt, dass bei $U_B = 30$ V der Ausschlag ca. 2 cm unter dem rechten Anschlag bleibt. Danach werden bei Beobachtung der U_B -Anzeige auf dem Betriebsgerät Punkte bei 0, 10, 20, und 30 V auf dem Papier markiert, nachdem dieses in der Schalterstellung „CHART“ elektrostatisch auf dem Schreiber fixiert und die Schreibfeder in der Schalterstellung „PEN“ abgesenkt wurde. Vertikale Markierungen lassen sich leicht durch Betätigung des Y-Nullpunktreglers anbringen.

Jetzt wird der Betriebsartenschalter am Betriebsgerät auf „Rampe“ gestellt (U_B wird automatisch in ca. 10 sec auf ca. 30 V hochgefahren) und die Franck-Hertz-Kurve geschrieben.

Eine optimale Einstellung des Y-Ausschlags erreicht man mit dem stufenlosen Empfindlichkeitsregler links neben dem Y-Messbereichsschalter derart, dass der Vollausschlag ca. 5 cm unter dem oberen Anschlag bleibt. Zur weitergehenden Optimierung der Kurve können die Spannungen U_S und U_G geringfügig nachgeregt werden. Um Papier zu sparen, sollten die Einstellarbeiten bei zunächst noch abgehobener Schreibfeder ausgeführt werden. Erst wenn alles stimmt, wird auf „PEN“ umgeschaltet. Die erste Anregungsenergie des Hg-Atoms kann aus dem Abstand der Maxima der Kurve bestimmt werden.

Für Aufgabe 2 wird die Ne-Röhre anstelle der Hg-Röhre am Betriebsgerät angeschlossen. Das Betriebsgerät erkennt die angeschlossene Röhre selbständig und schaltet automatisch auf den U_B -Bereich von 0 – 80 V um. Neu einzustellen sind für die Ne-Röhre die Spannungen $U_S \approx 3$ V und $U_G \approx 8$ V und entsprechend der höheren Spannung U_B die Messbereiche an Oszilloskop und Schreiber. Ansonsten wird sinngemäß wie bei Aufgabe 1 verfahren.

Für Aufgabe 3 wird bei abgedunkeltem Raum die mehr oder weniger ausgeprägte Schichtstruktur der rötlichen Leuchterscheinung in Abhängigkeit von U_B im Bereich zwischen den beiden Gittern beobachtet. Hierzu wird der Betriebsartenschalter auf „MAN.“ gestellt und U_B langsam von Hand verändert. Bei der Beobachtung bzw. Diskussion ist insbesondere auf den Zusammenhang zwischen dem Auftreten der Leuchterscheinungen und ihrer relativen Lage in der Beschleunigungszone einerseits und dem Verlauf der Franck-Hertz-Kurve andererseits einzugehen. Am besten lässt man den Schreiber bei abgehobener Feder mitlaufen und konzentriert sich darauf, was in der Umgebung der Minima der Kurve geschieht.

FRAGEN

1. Welche Aussagen macht das Bohrsche Atommodell, wie lauten die Bohrschen Postulate?
2. Was bedeuten die Begriffe Grundzustand, angeregter Zustand, Anregungsenergie, Resonanzanregung?
3. Welche unterschiedlichen Stoßprozesse finden in der Franck-Hertz-Röhre statt?
4. Welche Energie kann maximal beim elastischen bzw. unelastischen Stoß übertragen werden?
5. Was versteht man unter dem Begriff Kontaktspannung und wie wirkt sich diese auf die Franck-Hertz-Kurve aus?
6. Wie wirkt sich die Gasdichte auf die Franck-Hertz-Kurve aus?

M2 TRÄGHEITSMOMENTE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Drehmoment, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Trägheitsellipsoid, Dreh-schwingungen.

1. Definition des Trägheitsmomentes. Steinerscher Satz: Das Trägheitsmoment J_A eines Körpers bezüglich einer Drehachse A ist definiert durch (Abb. 1)

$$J_A = \int l^2 dm = \int l^2 \rho(\vec{r}) dV, \quad (1)$$

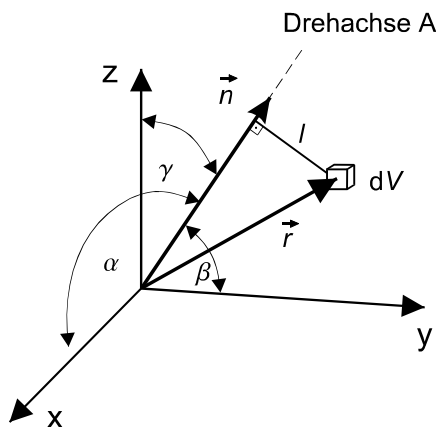


Abb. 1. TRÄGHEITSMOMENT

wobei l der Abstand des Massenelementes dm von der Drehachse A ist und unter Berücksichtigung der Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ über das gesamte Körpervolumen integriert werden muss. Da für jeden Körper unendlich viele Rotationsachsen existieren, ist auch die Zahl der möglichen Trägheitsmomente eines Körpers unendlich. Mit Hilfe des Steinerschen Satzes reduziert sich aber die Zahl der Trägheitsmomente auf die durch den Schwerpunkt gehenden Achsen, wie folgende Betrachtung zeigt:

Für einen beliebig geformten Körper mit dem Schwer-

punkt S und der Gesamtmasse m soll das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse A, die parallel zu der Schwerpunktsachse S mit dem Trägheitsmoment J_S liegt, berechnet werden (Abb. 2). Für ein Massenelement dm mit dem Abstand l von der Achse A und dem Abstand l' von der dazu parallelen Schwerpunktschse gilt:

$$J_A = \int l^2 dm$$

$$J_A = \int (l'^2 + a^2 - 2al'\cos\gamma) dm$$

$$J_A = \int l'^2 dm + a^2 \int dm - 2a \int x dm$$

Aus $\int x dm = 0$ entsprechend der Definition einer Schwerpunktschse folgt der Steinersche Satz:

$$J_A = J_S + ma^2. \quad (2)$$

2. Hauptträgheitsmomente: Bei der Rotation starrer Körper sind Drehimpuls \vec{L} und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ analog zu $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ bei der Translation durch die Beziehung

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \quad (3)$$

miteinander verknüpft. Die Größe J liefert entsprechend der Masse m bei der Translation ein geeignetes Maß für das Beharrungsvermögen bei der Rotation. Da die vektoriellen Größen \vec{L}

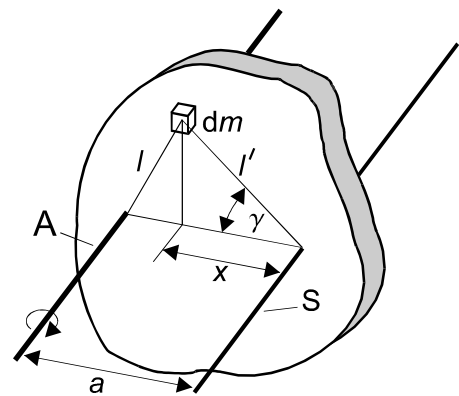


Abb. 2 STEINERSCHER SATZ

und $\vec{\omega}$ nicht notwendig die gleiche Richtung haben müssen (vergl. Versuch M 10), ist \mathbf{J} im Unterschied zu m kein Skalar, sondern ein symmetrischer Tensor 2. Stufe, der so genannte **Trägheitstensor**, dessen 9 Elemente vom gewählten Koordinatensystem abhängen. Unter dem Trägheitstensor versteht man gewöhnlich den Tensor in einem Koordinatensystem, das seinen Ursprung im Schwerpunkt (Schwerpunktsystem) hat. Das Koordinatensystem kann bei festem Ursprung so orientiert werden (Hauptachsentransformation), dass der Tensor Diagonalf orm annimmt. Dieses spezielle Koordinatensystem heißt Hauptachsensystem. Die Gl. (3) lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Die zur Diagonalf orm gehörenden Koordinatenachsen heißen Hauptträgheitsachsen. Die Diagonalelemente sind die Trägheitsmomente bezüglich dieser Achsen. Man nennt sie die Hauptträgheitsmomente des starren Körpers.

3. Trägheitse l lipsoid im Hauptachsensystem: Schließt die Drehachse wie in Abb. 1 mit den positiven Richtungen der Hauptträgheitsachsen die Winkel α , β und γ ein, kann für das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse die folgende Beziehung hergeleitet werden:

$$J_{\vec{n}} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (5)$$

Die Richtung der Drehachse im Raum wird durch den Einheitsvektor \vec{n} festgelegt, dessen Komponenten die Kosinus der Winkel sind, die von der gegebenen Richtung und den positiven Richtungen der Koordinatenachsen gebildet werden (Richtungskosinus).

Definiert man einen Vektor

$$\vec{p} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{J_{\vec{n}}}}, \quad (6)$$

so kann die Gl. (5) umgeformt werden zu

$$J_x p_x^2 + J_y p_y^2 + J_z p_z^2 = 1. \quad (7)$$

Gl. (7) stellt in den Koordinaten (p_x, p_y, p_z) ein Ellipsoid (Normalf orm), das so genannte Trägheitse l lipsoid (Abb. 3), dar.

Die Hauptträgheitsmomente geben die Achsenlängen des Ellipsoids an:

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_z}}. \quad (8)$$

Der Abstand ρ vom Drehpunkt zum Trägheitse l lipsoid ist gleich $\rho = 1/\sqrt{J_{\vec{n}}}$. Dies erlaubt das Trägheitsmoment $J_{\vec{n}}$ sofort anzugeben, wenn das Trägheitse l lipsoid bekannt ist.

Wenn zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, ist das Trägheitse l lipsoid ein Rotationse l lipsoid und der starre Körper ein symmetrischer Kreisel. Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, handelt es sich um einen Kugelkreisel. Das Trägheitse l lipsoid ist dann eine Kugel.

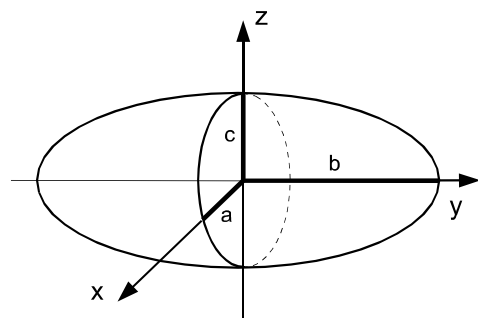


Abb. 3 TRÄGHEITSELLIPSOID

4. Experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten: Ein um eine senkrechte Achse A drehbar gelagerter Teller (Drehtisch Abb. 4a) kehrt nach Auslenkung von Hand infolge der elastischen Deformation der Schneckenfeder Sp in einer schwach gedämpften Drehschwingung in seine Ruhelage zurück. Die Lösung der Bewegungsgleichung bei Vernachlässigung der Dämpfung $J_A \ddot{\varphi} + D\varphi = 0$ liefert die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{J_A / D}, \quad (9)$$

wobei J_A das Trägheitsmoment der Anordnung bezüglich A und D das Richtmoment der Feder ist. Durch definierte Änderung von J_A um Zusatzträgheitsmomente J_Z mittels einer radial

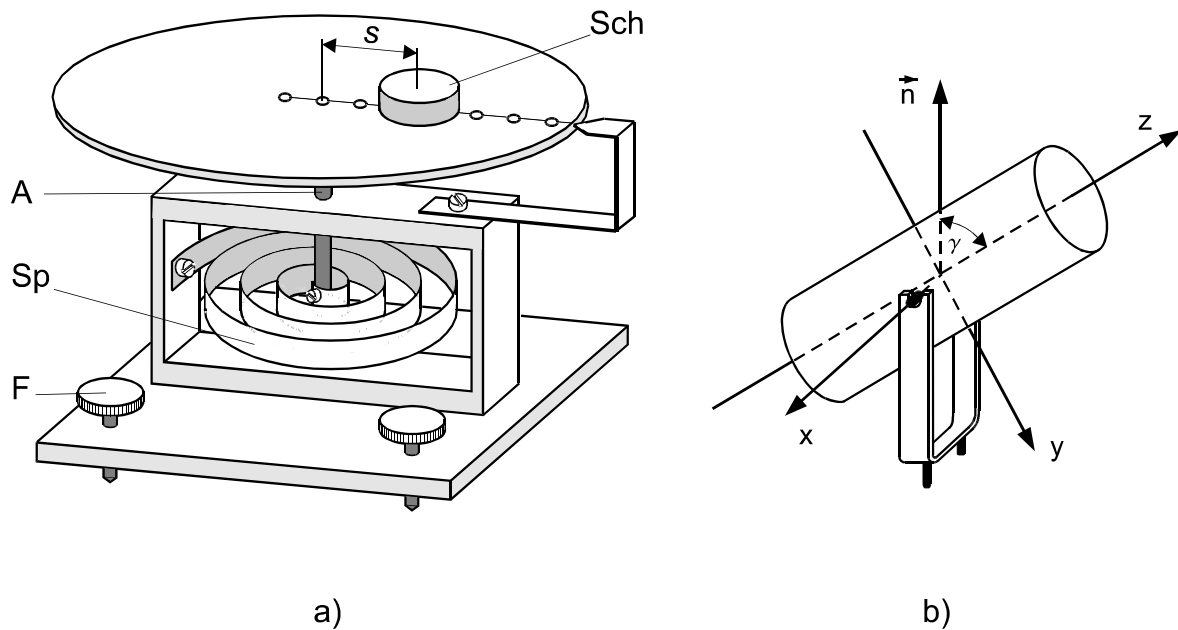


Abb. 4 DREHTISCH

auf dem Teller verschiebbaren Kreisscheibe Sch (Masse m , Radius R) erhält man eine lineare Eichkurve $T^2 = f(J_Z)$, mit der man unbekannte Trägheitsmomente bestimmen kann. Mit dem bekannten Trägheitsmoment $J_S = 1/2 \cdot mR^2$ für eine Scheibe bezüglich ihrer Symmetrieachse liefert der Steinersche Satz

$$J_Z = \frac{1}{2} mR^2 + ms^2, \quad (10)$$

wobei s der Abstand der Symmetrieachse der Scheibe Sch von der Drehachse A ist.

Wenn J_T das Trägheitsmoment des Drehtisches allein ist, erhält man mit Gl. (9) und Gl. (10) die lineare Eichkurve

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} J_Z + \frac{4\pi^2}{D} J_T, \quad (11)$$

welche die J_Z -Achse bei $J_Z = -J_T$ schneidet.

AUFGABEN

1. Messung der Periodendauer des Drehtisches ohne Scheibe und für 6 verschiedene Lagen der Scheibe relativ zur Drehachse.
2. Grafische Darstellung $T^2 = f(J_Z)$ und Ermittlung des Trägheitsmomentes J_T des Drehtisches (Gl. (11)).
3. Messung der Trägheitsmomente eines Zylinders in Abhängigkeit vom Neigungswinkel γ zwischen Zylinderachse und Drehachse.
4. Überprüfung der Formel für das Trägheitsellipsoid (Gl. (7)) durch die grafische Darstellung $J_\gamma = f(\sin^2 \gamma)$.
5. Vergleich der experimentellen Werte der Hauptträgheitsmomente für $\gamma = 0^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$ mit den theoretischen Werten (Gl. (13)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Zur senkrechten Justierung des Drehtisches wird die Scheibe Sch an verschiedene Stellen des Tellerrandes gelegt und an den Fußschrauben F so lange nachgestellt, bis der Drehtisch bei allen Lagen der Scheibe in der Ruhelage verbleibt.

Für Aufgabe 1 wird zweimal die Zeit für 10 Schwingungen des Drehtisches allein und für die 6 möglichen Lagen der Scheibe auf dem Drehtisch gemessen.

Für Aufgabe 2 berechne man die Zusatzträgheitsmomente J_Z (Gl. (10)) und fertige die grafische Darstellung der Kalibrierungskurve $T^2 = f(J_Z)$ an, aus der man das Trägheitsmoment J_T des Tisches ablesen kann.

Für Aufgabe 3 wird der schwenkbare Zylinder mit Halterung (Abb. 4b) zentral auf den Teller gesetzt. Dann soll für Winkelstellungen zwischen $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ zur Drehtischachse in Schritten von 15° je zweimal aus 10 Schwingungen die Periodendauer T bestimmt werden. Die zugehörigen Trägheitsmomente J_γ können aus der Eichkurve entnommen werden. Genauere Werte für J_γ und J_T (Aufgabe 2) als bei Benutzung der grafischen Auswertung erhält man bei Benutzung des PC-Programms GERA für die Berechnung des Anstiegs und des Schnittpunktes der Eichkurve mit der J_Z -Achse.

Für Aufgabe 4 beachte man, dass J_γ linear von $\sin^2 \gamma$ abhängt. Mit dem Richtungskosinus der Drehachse (Abb. 1 und Abb. 4b)

$$\vec{n} = \left\{ 0, \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right), \cos\gamma \right\}$$

liefert Gl. (5) die Beziehung

$$J_\gamma = J_Z + (J_y - J_Z) \sin^2 \gamma. \quad (12)$$

Für Aufgabe 5 vergleiche man die für $\gamma = 0^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$ gemessenen Hauptträgheitsmomente (Aufgabe 3) mit den aus der grafischen Darstellung $J_\gamma = f(\sin^2 \gamma)$ (Aufgabe 4) ermittelten Wer-

ten (Gl. (12)). Weiterhin berechne man aus den Parametern des Zylinders (Masse m , Radius R und Höhe h) die Hauptträgheitsmomente nach

$$J_{\gamma=0^\circ} = \frac{1}{2} mR^2 \quad \text{und} \quad J_{\gamma=90^\circ} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2 \quad (13)$$

und vergleiche sie mit den experimentellen Werten.

FRAGEN

1. Welche Abmessungen muss ein Zylinder haben, damit sein Trägheitsellipsoid eine Kugel wird?
2. In welcher Weise beeinflusst das vernachlässigte Trägheitsmoment der Halterung die Ergebnisse von Aufgabe 4?
3. Was sind freie Achsen? Was bedeutet das Auswuchten von rotierenden Maschinenteilen physikalisch?
4. Wie berechnet man das Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse?

M3 ELASTIZITÄT UND TORSION

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Dehnung, Torsion, Normal- und Schubspannung, Hookesches Gesetz Elastische Konstanten, Drehmoment, Massenträgheitsmoment.

1. Elastizität und Hookesches Gesetz: Durch Einwirkung äußerer Kräfte können Festkörper Form- und/oder Volumenänderungen (Deformationen) erfahren. Verschwinden die Deformationen nach Wegfall der äußeren Kräfte, dann spricht man vom elastischen, sonst vom plastischen Verhalten des Festkörpers. Die elastischen Eigenschaften beruhen auf den atomaren Bindungskräften zwischen den Atomen (bzw. Molekülen) im Festkörper. Eine äußere Kraft erzeugt im Innern des Festkörpers einen Spannungszustand, durch den die Atome aus ihrer Ruhelage entfernt werden. Dadurch entstehen innere, atomare Kräfte, die der äußeren Kraft entgegenwirken. Nach Aufhören der äußeren Krafteinwirkung gehen bei elastischer Deformation die Atome in ihre Ruhelage zurück. Im Hookeschen Gesetz werden die Deformationen des Festkörpers näherungsweise proportional den durch die äußeren Kräfte entstehenden Spannungen im Festkörper gesetzt.

Bei sehr großen äußeren Kräften treten jedoch große Verschiebungen einzelner Atome oder ganzer Kristallite auf, so dass eine bleibende Formänderung entsteht; der Festkörper ist plastisch verformt. In diesem Bereich verliert das Hookesche Gesetz seine Gültigkeit.

Für eine elementare Beschreibung des elastischen Verhaltens eines isotropen Festkörpers verwendet man 4 Materialkonstanten, die aber nicht unabhängig voneinander sind. Es sind dies: Elastizitätsmodul E , Torsionsmodul G , Kompressionsmodul K und die Poissonsche Zahl μ .

2. Dehnung und Querkontraktion: An einem isotropen, zylindrischen Körper, z. B. einem Draht der Länge l , verursacht eine senkrecht zum Querschnitt A wirkende Kraft F eine Längenänderung Δl (Abb. 1) bzw. die relative Längenänderung $\varepsilon = \Delta l / l$. Das Verhältnis der senkrecht zur Querschnittsfläche wirkenden Kraft zur Fläche bezeichnet man als Normalspannung $\sigma = F / A$. Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes ist

$$\varepsilon \sim \sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}, \quad (1)$$

wobei E (SI-Einheit: $[E] = \text{N/m}^2 = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$) der Elastizitätsmodul ist.

Die Normalspannung verändert nicht nur die Länge l eines Körpers um Δl , sondern auch seine Querabmessungen, also etwa den Durchmesser d eines Drahtes um Δd . Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes besteht der Zusammenhang

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}, \quad (2)$$

wobei μ die Poissonsche Zahl ist. Das negative Vorzeichen wird gewählt, weil die Änderung des Durchmessers Δd der Längenänderung Δl entgegengesetzt gerichtet ist und die Poissonsche

Zahl positiv definiert sein soll. Für die relative Volumenänderung eines zylindrischen Stabes erhält man also bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta l}{l} (1 - 2\mu) = \varepsilon (1 - 2\mu), \quad (3)$$

woraus sich ergibt: Erfährt der Festkörper keine Volumenänderung, d. h. verhält er sich wie eine inkompressible Flüssigkeit, so ergibt sich aus Gl. (3) $\mu = 0,5$, und wenn die Querkontraktion verschwindet, ergibt sich aus Gl. (2) $\mu = 0$. Aus diesen Grenzfällen eines elastischen Festkörpers ergibt sich für die Poissonsche Zahl die Ungleichung

$$0 < \mu < 0,5. \quad (4)$$

Steht ein Körper unter allseitigem Druck, so ruft eine Druckänderung Δp eine Volumenänderung ΔV hervor, die im Bereich des Hookeschen Gesetzes dem Volumen V proportional ist:

$$\Delta V = -\frac{1}{K} V \Delta p.$$

Die Materialgröße K heißt Kompressionsmodul.

3. Torsion: Ist die Kraft tangential zu der Ebene gerichtet, an der sie angreift, so spricht man von Schub- oder Scherspannung. Lassen wir etwa an der Oberseite eines Würfels, dessen Grundfläche A festgehalten wird, die Kraft F tangential angreifen, so bewirkt die Schubspannung $\tau = F/A$ eine Neigung der Seitenflächen um den Winkel γ , die,

entsprechend dem Hookeschen Gesetz, im elastischen Bereich der Schubspannung proportional ist

$$\tau = G\gamma,$$

wobei G der Schub-, Scherungs- oder Torsionsmodul ist (SI-Einheit: $[G] = \text{N/m}^2 = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$). Ein zylindrischer Draht (Abb. 3), der an einem Ende fest eingespannt ist, wird durch ein am anderen Drahtende angreifendes Drehmoment M um den Winkel γ verdreht. Da der Verdrehungswinkel jedes Drahtquerschnitts proportional dem Abstand des betreffenden Querschnittes von der Einspannstelle ist, treten im ganzen Draht Scherspannungen auf (Abb. 3). An einem dünnen Hohlzylinder der Länge l mit dem Radius r und der Dicke dr greift an der unteren Fläche das Drehmoment $dM = r dF$ an. Dadurch wird die Zylindermantellinie \overline{AB} in die Lage $\overline{AB'}$ verdreht. Wegen $\tau = \frac{dF}{dA} = G\gamma$ folgt

$$dM = r \cdot G \cdot \gamma \cdot dA.$$

Für den Bogen b gelten die Beziehungen $\alpha = \frac{b}{r}$ und $\tan \gamma = \frac{b}{l} \approx \gamma$, und daraus ergibt sich

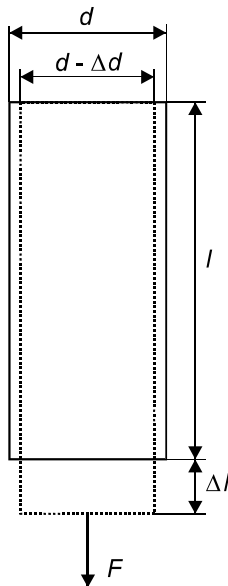


Abb.1 DEHNUNG

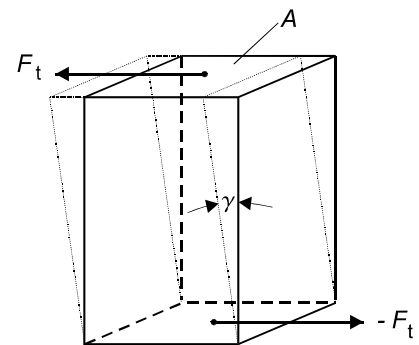


Abb. 2 SCHERUNG

$$\gamma = \frac{r}{l} \alpha.$$

Mit diesem Zusammenhang zwischen α und γ und dem Wert der Querschnittsfläche $dA = 2\pi \cdot r \cdot dr$ erhält man für das am Hohlzylinder angreifende Drehmoment

$$dM = \frac{2\pi}{l} \cdot G \cdot \alpha \cdot r^3 dr.$$

Durch Integration über r erhält man das am Draht angreifende Gesamtdrehmoment

$$M = \int dM = \frac{2\pi}{l} G \alpha \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2l} G \alpha R^4. \quad (5)$$

Dieses Drehmoment verdreht den Draht um den Winkel γ und steht im Gleichgewicht mit dem rücktreibenden Drehmoment $M = D\alpha$ auf Grund der Elastizität des Drahtes. Die Größe D heißt

Richtmoment und ist nach Gl. (5) durch die geometrischen Abmessungen des Drahtes bestimmt:

$$D = \frac{\pi}{2l} G R^4. \quad (6)$$

4. Bestimmung des Torsionsmoduls aus Drehschwingungen: Die Periodendauer T eines schwingungsfähigen Körpers mit dem Trägheitsmoment J und dem Richtmoment D beträgt (vgl. Versuch M2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (7)$$

Da das Richtmoment D eines tordierten Drahtes vom Torsionsmodul G abhängt (Gl. (6)), kann man aus Drehschwingungen den Torsionsmodul nach

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{J}{T^2} \quad (8)$$

bestimmen. Hierzu müssen die Größen R , T , l und das Trägheitsmoment J der schwingungsfähigen Anordnung bekannt sein.

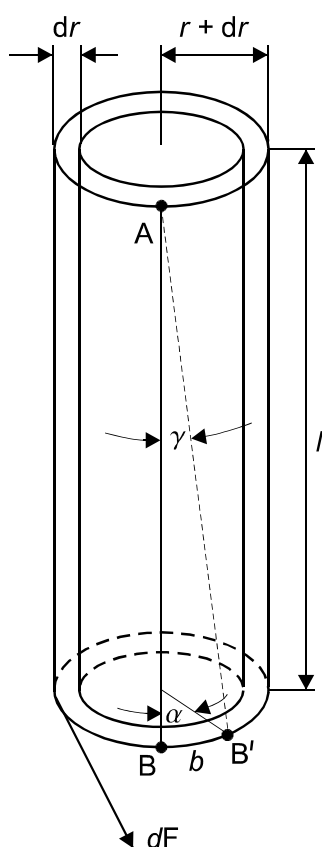


Abb.3 TORSION EINES DRAHTES

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes J_V der schwingenden Versuchsanordnung (Draht, Einrichtung zur Aufnahme der Massenstücke usw.) kann durch definierte Veränderung des Trägheitsmoments umgangen werden. Zunächst bestimmt man die Periodendauer T_V der Drehschwingung der Versuchsanordnung

aus ca. 30 Schwingungen bei Belastung mit 50 g. Dann verändert man das Trägheitsmoment J_V der Versuchsanordnung definiert durch Anschrauben einer Scheibe mit dem Zusatzträgheitsmoment J_S und bestimmt jetzt die Periodendauer T_S aus 10 Schwingungen, für die sich entsprechend Gl. (7) ergibt:

$$T_S = 2\pi \sqrt{\frac{J_V + J_S}{D}}. \quad (9)$$

Eliminiert man das Trägheitsmoment J_V (Gl. (7) und (9)) und setzt für die zylindrische Scheibe das Trägheitsmoment $J_S = mr^2 / 2$ (m Masse und r Radius der Scheibe) ein, ergibt sich für den Torsionsmodul die Beziehung:

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{J_S}{T_S^2 - T_V^2} = \frac{4\pi l}{R^4} \cdot \frac{mr^2}{T_S^2 - T_V^2}. \quad (10)$$

AUFGABEN

1. Messung der Längenänderung Δl eines Messingdrahtes als Funktion der Belastung.
2. Grafische Darstellung $\Delta l = f(m)$ und Berechnung des Elastizitätsmoduls E von Messing aus dem Anstieg (Gl. (11)).
3. Messung der Periodendauern T_V und T_S und Berechnung des Schubmoduls (Gl. (10)).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Am unteren Ende eines oben befestigten langen Drahtes **D** ist ein Stab angeschraubt, auf den man Massenstücke mit der Masse m von 50 und 100 g aufstecken kann (Abb. 4). Am oberen Ende des Stabes liegt der Balken **L** auf der Schneide **A** auf. Durch Anhängen der Massenstücke wirkt die Kraft $F_G = mg$, und der Draht

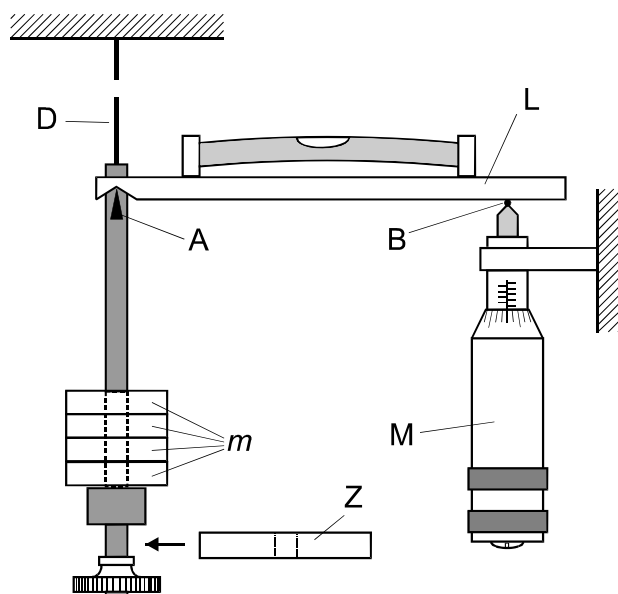


Abb. 4 VERSUCHSANORDNUNG

dehnt sich. Die Schneide **A** senkt sich, und der ursprünglich waagrecht gestellte Balken **L** (Kontrolle mittels der eingekitteten Libelle) dreht sich um die Achse **B**. Durch die Messschraube **M** kann der Balken **L** wieder horizontal gestellt werden. Die Dehnung Δl des Drahtes wird aus der Differenz der Skalenteile der Messschraube vor und nach der Horizontalstellung des Balkens ermittelt. Der Durchmesser des Drahtes wird an einem am Versuchsplatz liegenden Draht gleichen Durchmessers durch mehrfache Messung mit einer Messschraube bestimmt.

Für Aufgabe 1 wird der Draht mit Massenstücken von 50 bis 800 g belastet und anschließend schrittweise entlastet. An der Masse m greift die Gewichtskraft an, so dass aus Gl. (1)

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{l}{A} gm \quad (11)$$

folgt. Für Aufgabe 2 fertige man eine grafische Darstellung $\Delta l = f(m)$ an und ermittle aus dem Anstieg den Elastizitätsmodul E und seine Messunsicherheit.

Für Aufgabe 3 bestimmt man die Periodendauer T_V der Drehschwingung der Anordnung aus ca. 30 Schwingungen bei Belastung mit 50 g. Dann verändert man das Trägheitsmoment der Anordnung durch Anschrauben des scheibenförmigen Zylinders Z mit dem Trägheitsmoment J_S und bestimmt erneut die Schwingungsdauer T_S aus 10 Schwingungen. Den Mittelwert aus jeweils 6 Messungen von T_V und T_S verwendet man dann zusammen mit den Daten des scheibenförmigen Zylinders und des Drahtes zur Berechnung des Schubmoduls G (Gl. (10)).

FRAGEN

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen elastischer und plastischer Verformung!
2. Wie viel unabhängige elastische Konstanten benötigt man zur Beschreibung des elastischen Verhaltens isotroper Körper?
3. Zwischen den elastischen Konstanten (vgl. Abschn. 1) bestehen die Beziehungen
$$E = 2 G (1 + \mu) \quad \text{und} \quad E = 3 K (1 - 2 \mu).$$
Wie erklären Sie sich diese Zusammenhänge?
4. Welche Teile der experimentellen Anordnung „Draht-Haltevorrichtung - zusätzlich befestigter Zylinder“ tragen in der Gl. (9) zur Winkelrichtgröße D und welche zum Trägheitsmoment $J_S + J_V$ bei und warum?

M9 REVERSIONSPENDEL

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Drehmoment, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Bewegungsgleichung, mathematisches und physikalisches Pendel.

1. Physikalisches Pendel: Die Periodendauer eines **physikalischen Pendels** mit der Masse m und dem Trägheitsmoment J_A bezüglich der Drehachse A (Abb. 1) folgt aus der Lösung der Bewe-

gungsgleichung der Rotation des starren Körpers

$$J_A \ddot{\varphi} = M. \quad (1)$$

Das Drehmoment M entsteht bei Auslenkung um den Winkel φ und bei Vernachlässigung der

Reibung nur durch die im Schwerpunkt S angreifende Schwerkraft $F_g = mg$:

$$M = -aF_g \sin \varphi = -amg \sin \varphi, \quad (2)$$

wobei a der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt ist. Mit Hilfe des Satzes von Steiner kann die Berechnung von J_A bezüglich der Achse A auf die Berechnung von J_S bezüglich der zu A parallelen Achse durch S zurückgeführt werden

$$J_A = J_S + ma^2. \quad (3)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung Gl. (1) mit M nach Gl. (2) bei Beschränkung auf kleine Winkel ($\sin \varphi \approx \varphi$) und J_A nach Gl. (3) führt auf die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_S + ma^2}{mag}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}. \quad (4)$$

Abb.1 PHYSIKALISCHES PENDEL

Die Lösung von Gl. (1) ohne Beschränkung auf kleine Winkel liefert die von der Amplitude φ_0 abhängige Periodendauer

$$T(\varphi_0) = T \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right). \quad (5)$$

Die so genannte **reduzierte Pendellänge** (Gl. (4))

$$l_r = \frac{J_S + ma^2}{ma} \quad (6)$$

ist die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Periodendauer T . Sie definiert im Abstand l_r von A auf der Geraden durch A und S den so genannten **Schwingungsmittelpunkt** A' (Abb. 1). Die Periodendauer für die beiden parallelen Achsen durch A bzw. A' ist gleich, wie folgende Überlegung zeigt: Die Lösung der für a quadratischen Gl. (6) führt auf

$$a_{1,2} = \frac{l_r}{2} \pm \sqrt{\frac{l_r^2}{4} - \frac{J_S}{m}}, \quad (7)$$

wobei gilt

$$a_1 + a_2 = l_r \quad (8)$$

und

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{J_S}{m}. \quad (9)$$

Die Achsen gleicher Periodendauern liegen also danach auf zwei zum Schwerpunkt konzentrischen Zylindermänteln mit den Radien a_1 und a_2 (Abb. 2). Insbesondere sind die Periodendauern für parallele Achsen durch A und A' sowie für B und B' gleich. Der Vergleich mit den Bezeichnungen aus Abb. 1 liefert die Identität $a_1 = a'$ und $a_2 = a$.

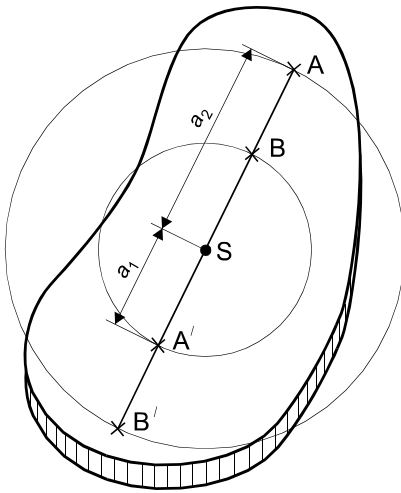


Abb. 2 ACHSEN GLEICHER PERIODENDAUER

2. Reversionspendel: Auf der Tatsache, dass sich auf einer durch den Schwerpunkt S gehenden Geraden jeweils zwei Punkte A und A' bzw. B und B' finden lassen, für die das physikalische Pendel die gleichen Periodendauern hat, basiert das Reversionspendel. Man verändert die Aufhängepunkte bzw. aus konstruktiven Gründen meist die Massenverteilung eines Pendels solange, bis sich für zwei Aufhängepunkte, die ungleichen Abstand von S haben, die gleiche Schwingdauer ergibt. Dann ist der Abstand der Punkte gleich der reduzierten Pendellänge, und die Fallbeschleunigung g kann durch eine Messung der Periodendauer ermittelt werden (Gl. (4)).

Die Fallbeschleunigung nach Gl.(4) kann hinsichtlich der erkennbaren systematischen Fehler infolge der endlichen Amplitude φ_0 der Pendelauslenkung und des Luftauftriebs (Dichte der Luft $\rho_L = 1,29 \text{ kg/m}^3$ und Dichte des Pendels $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$) korrigiert werden:

$$g_c = \left(\frac{2\pi}{T(\varphi_0)} \right)^2 l_r \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\rho_L}{\rho} \right). \quad (10)$$

Ein Spezialfall des Reversionspendels ist das so genannte Minimalpendel, bei dem die Radien der beiden Zylindermäntel gleich sind und nach Gl. (9) gilt $a_1 = a_2 = \sqrt{J_S / m}$. In dem Fall wird die reduzierte Pendellänge ein Minimum, d.h. die Periodendauer des Pendels ist gegen Lageänderungen der Aufhängung am unempfindlichsten.

AUFGABEN

1. Messung des Schneidenabstandes des Reversionspendels.
2. Messung der Periodendauer des Pendels als Funktion der Stellung der beweglichen Masse.

3. Präzisionsbestimmung der Periodendauer in der Umgebung der in Aufgabe 2 ermittelten Schnittpunkte und Bestimmung der Periodendauer \bar{T} mit Hilfe des PC-Programms REV-PEN.
4. Messung der Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer und Überprüfung der Gültigkeit von Gl. (5).
5. Berechnung der Fallbeschleunigung nach Gl. (4).

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Das verwendete Reversionspendel (Abb. 3) ist eine ca. 1,5 m lange Eisenstange mit Schneiden in den Drehachsen P und P' , die in eine Halterung H eingehängt werden. Es sind auf der Eisenstange unsymmetrisch die zwei Massenstücke M_1 (verschiebbar) und M_2 (fixiert) angebracht.

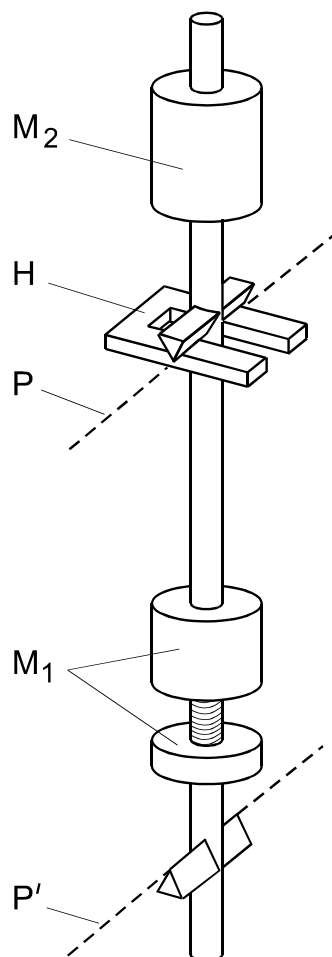


Abb. 3 REVERSIONS-
PENDEL

Die Stellung von M_1 relativ zu den Schneiden kann an Ringmarken auf der Eisenstange abgelesen werden. M_1 ist zweigeteilt und kann auseinandergeschraubt werden. Das Einsetzen des Pendels in die Halterung muss mit großer Vorsicht erfolgen (vgl. Hinweise am Versuchsplatz). Das untere Ende des Reversionspendels bewegt sich beim Schwingen durch eine Lichtschranke, die einen elektronischen Zeitmesser schaltet, der die Zeit für eine vorwählbare Anzahl von Perioden misst. Für Aufgabe 1 wird der Schneidenabstand des Pendels auf einem Messtisch mit einem Normal definierter Länge verglichen und die Differenz zwischen Normal und Schneidenabstand mit einer Messuhr bestimmt. Der Schneidenabstand soll mehrfach gemessen und daraus Mittelwert und Messunsicherheit bestimmt werden. Für Aufgabe 2 wird das zusammengeschaubte Massenstück M_1 schrittweise um 2 Ringmarken verschoben und jeweils die Zeit für zwei Schwingungen gemessen. Die Zeitmessung erfolgt für beide Aufhängungen, wobei aber der Abstand x zwischen einer Schneide und M_1 immer von derselben Schneide (gleichgültig von welcher) aus zu zählen ist. Als Voraussetzung für die Korrigierbarkeit des systematischen Fehlers ist stets bei gleichen Amplituden zu messen (Gl. (5)). Die grafische Darstellung $T = f(x)$ ergibt für beide Aufhängungen parabelähnliche Kurven mit einem Schnittpunkt bei x_1 und einem Schnittpunkt bei x_2 . Die Periodendauern an den Schnittpunkten müssen gleich sein, weil die zugehörigen a_1 bzw. a_2 zwar wegen

der verschiedenen J_S unterschiedlich sind (Gl. (7)), in beiden Fällen aber $l_r = a_1 + a_2$ (Gl. (8)) mit dem Schneidenabstand übereinstimmen muss. Man fertige die grafische Darstellung $T = f(x)$ gleich am Versuchsplatz an, um die Lage der für Aufgabe 3 benötigten x -Werte zu ermitteln.

Für Aufgabe 3 verwende man das PC-Programm REVPEN. Vor der Versuchsdurchführung sollte man sich mit den Möglichkeiten seiner Nutzung vertraut machen und zur Übung das Unterprogramm mit den fest eingegebenen Messwerten aufrufen. Für die Präzisionsmessung wird die Zeit für jeweils 10 Schwingungen bei 5 Ringmarken-Einstellungen von M_1 in der Umgebung von x_1 bzw. x_2 für beide Aufhängungen gemessen. Dann werden die 10 Messwertpaare in das PC-Programm REVPEN eingegeben. Der Rechner ermittelt \bar{T} nach Bearbeitung mit den auf dem Bildschirm angebotenen Optionen.

Für Aufgabe 4 messe man für die Lage x_1 oder x_2 des Massestücks M_1 die Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer T für 5 verschiedene Amplitudenwerte aus mindestens 10 Schwingungen. Anhand der grafischen Darstellung $T = f(\varphi_0^2)$ überprüfe man die Gültigkeit von Gl. (5).

ALTERNATIVE für Aufgabe 3 bei Nichtbenutzung des PC-Programms:

Aus der grafischen Darstellung (Aufg. 2) ist der Schnittpunkt auszuwählen, in dem sich die beiden Kurvenäste steiler schneiden (Lage x_0 des Massestückes M_1). Dann wird in der Umgebung von x_0 aus mindestens 10 Schwingungen die Periodendauer für das zusammengeschraubte und für das bis zum Anschlag auseinander geschraubte Massenstück M_1 erst für eine und danach in umgekehrter Reihenfolge für die andere Aufhängung bestimmt, wobei auf gleiche Amplituden geachtet werden muss. Aus den vier Messpunkten erhält man durch lineare grafische Interpolation aus dem Schnittpunkt der beiden Geraden den Wert der Periodendauer T , der zum gemessenen Schneidenabstand als reduzierter Pendellänge l_r gehört. Um eine möglichst hohe Genauigkeit zu erreichen, soll die Einstellung der Lage von M_1 in der unmittelbaren Umgebung von x_0 so erfolgen, dass der Geradenschnittpunkt innerhalb der 4 Messpunkte liegt.

FRAGEN

1. Besteht eine Korrespondenz zwischen den beiden Schnittpunkten in der grafischen Darstellung $T = f(x)$ (Aufgabe 3) und den Aufhängungen in A / A' bzw. B / B' (Abb.2)?
2. Leiten Sie die im Hinblick auf endliche Auslenkwinkel φ_0 und den Luftauftrieb korrigierte Formel (Gl.10) für die Fallbeschleunigung her.
3. Wie erhält man die Bedingung für das Minimalpendel $a_1 = a_2$?
4. Welche Periodendauer besitzt ein mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt an der Erdoberfläche und dessen Masse im Erdmittelpunkt liegt?

M10 GYROSKOP

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Drehimpulserhaltungssatz, Kreisel, Figuren-, Drehimpuls- und momentane Drehachse, Präzession und Nutation.

1. Begriff des Kreisels: Ein Kreisel ist ein rotierender starrer Körper, der in einem Punkt festgehalten ist oder, allgemeiner, dessen Bewegung um einen Punkt getrennt von der Bewegung dieses Punktes behandelt werden kann. Kreisel treten in der Technik als rotierende Maschinenbauteile vielfältig auf. In der Natur können z.B. Moleküle oder rotierende Himmelskörper als Kreisel behandelt werden.

Grundlage für die Kreiselbewegung ist die Grundgleichung der Rotationsbewegung:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (1)$$

wonach sich der Drehimpuls \vec{L} nur verändert, wenn ein äußeres Drehmoment \vec{M} auf den Körper einwirkt. Die eigentümlichen und im allgemeinen Fall nicht einfach zu überschauenden Bewegungsabläufe von Kreiseln sind auf diese Grundgleichung zurückzuführen.

Zur Vereinfachung der Darstellung beschränken wir uns bei den folgenden Ausführungen auf symmetrische Kreisel, bei denen zwei der drei Hauptträgheitsmomente (siehe Versuch M2) gleich sind: Bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen sei $J_x \neq J_y = J_z$. In diesem Fall ist die x-Achse die sog. Figurenachse des Kreisels.

2. Nutation des kräftefreien Kreisels: Ein Kreisel heißt kräftefrei, wenn auf ihn kein äußeres Drehmoment wirkt. In diesem Fall folgt aus der Grundgleichung der Rotationsbewegung (Gl. (1)) der Drehimpulserhaltungssatz

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.}, \quad (2)$$

d.h. der Drehimpulsvektor \vec{L} ist nach Betrag und Richtung zeitlich konstant. Die einfachste Bewegung ist eine Rotation um die Figurenachse. Hier ist $\vec{L} = J_x \vec{\omega}$, und $\vec{\omega}$ ist, wie auch \vec{L} , raum-

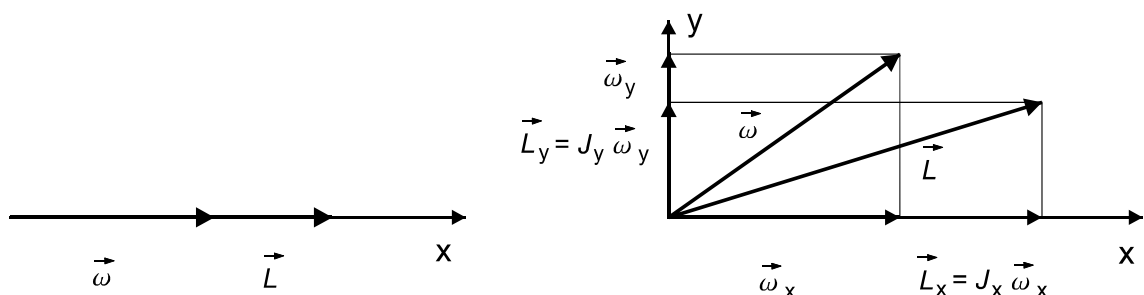


Abb.1 a) ROTATION UM DIE FIGURENACHSE b) ALLGEMEINER FALL DER ROTATION

fest und fällt mit der Richtung von \vec{L} und der ebenfalls raumfesten Figurenachse (hier die x-Achse) zusammen (Abb.1a). Wird der Kreisel - z.B. durch einen kurzen seitlichen Schlag - in dieser Bewegungsform gestört oder rotiert er von vornherein nicht um die Figurenachse, so tritt die sog. Nutationsbewegung auf. Hierbei sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ nicht mehr parallel, da

$$\vec{L} = J_x \vec{\omega}_x + J_y \vec{\omega}_y + J_z \vec{\omega}_z. \quad (3)$$

Dies wird in Abb.1b für einen bestimmten Zeitpunkt der Bewegung ($\vec{\omega}_z = 0$) gezeigt. Jetzt ist $\vec{\omega}$ nicht mehr raumfest. Das Gleiche gilt auch für die Figurenachse, die dann weder parallel zu \vec{L} noch zu $\vec{\omega}$ ist. Da $\vec{\omega}$ auch nicht körperfest ist, wird die Drehachse *momentane Drehachse* genannt; sie verändert ständig ihre Lage im Körper. Momentane Drehachse und Figurenachse

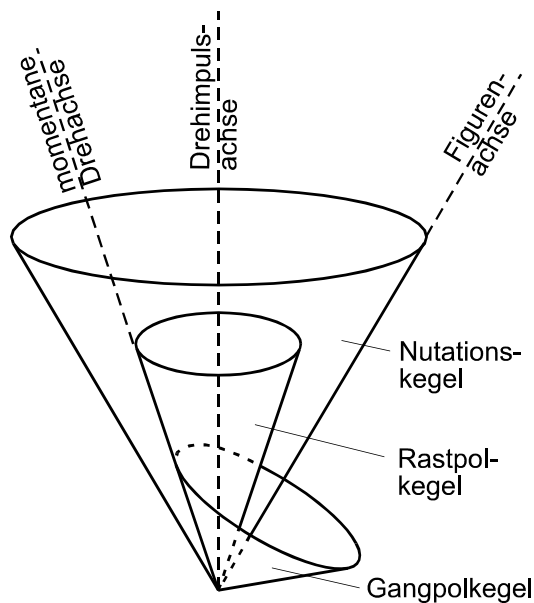


Abb.2 KRÄTFREIER KREISEL

rotieren mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N um die raumfeste Drehimpulsachse und beschreiben dabei Kreiskegel (Abb.2), die symmetrisch zur Drehimpulsachse liegen. Die Bewegung kann man sich veranschaulichen durch das Abrollen des sog. Gangpolkegels, dessen Symmetrieachse die Figurenachse ist, am sog. Rastpolkegel, der die Drehimpulsachse zur Symmetrieachse hat. Die Berührungslinie zwischen beiden Kegeln ergibt die Lage der momentanen Drehachse. Wie man aus dieser Darstellung sieht, liegen die drei Achsen stets in einer (sich mit der Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N im Raum drehenden) Ebene. Abb.2 beschreibt die Verhältnisse für einen abgeplatteten Kreisel ($J_x > J_y = J_z$). Im Fall

des verlängerten Kreisels gilt $J_x < J_y = J_z$, dann rollt der Gangpolkegel mit seiner Außenseite am Rastpolkegel ab. Wie man sich leicht klar machen kann, liegt dann die momentane Drehachse zwischen Drehimpuls- und Figurenachse.

Die Nutationswinkelgeschwindigkeit ω_N erhält man durch folgende Überlegung: Aus Gl. (3) folgt mit $J_y = J_z = J_s$ sowie $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z$ und Auflösung nach $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{J_s} + \left(1 - \frac{J_x}{J_s}\right) \cdot \vec{\omega}_x. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Komponentenzerlegung von $\vec{\omega}$ in Richtung \vec{L} und in x-Richtung dar. Die erste Komponente ist die Nutationswinkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}_N = \frac{\vec{L}}{J_s}. \quad (5)$$

3. Präzession des Kreisels unter Einwirkung äußerer Drehmomente: Wirkt auf einen Kreisel ein äußeres Drehmoment \vec{M} , so ändert sich sein Drehimpuls nach Gl. (1):

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (6)$$

Zerlegt man $d\vec{L}$ in die beiden Komponenten $d\vec{L}_{\parallel}$ und $d\vec{L}_{\perp}$ (Abb.3), dann liegt die Komponente

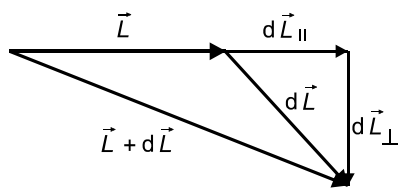


Abb.3 DREHIMPULSZERLEGUNG

$d\vec{L}_{\parallel}$ parallel zum Drehimpulsvektor \vec{L} und vergrößert dadurch die Winkelgeschwindigkeit. Beispielsweise erhöht sich die Drehzahl eines Elektromotors, wenn durch die Erhöhung der Spannung die am Anker (Kreisel) angreifenden magnetischen Drehmomente wachsen. Die Komponente $d\vec{L}_{\perp}$ steht senkrecht auf dem Drehimpulsvektor \vec{L} und bewirkt, dass sich die Richtung von \vec{L} ändert - der Kreisel *präzediert*. Diese Bewegung lässt sich anschaulich mit dem sog. Gyroskop zeigen. Das Gyroskop (Abb.4) ist vom Prinzip her ein kardanischer Kreisel,

auf den man ein zusätzliches äußeres Drehmoment, das eine Präzessionsbewegung des Kreisels hervorruft, wirken lassen kann.

Betrachten wir zunächst die Bewegung bei fehlendem äußerem Drehmoment. Dies wäre in Abb. 4 der Fall, wenn sich die entgegengesetzten Drehmomente der Kreiselscheibe und der Ausgleichsmasse m kompensieren (für $m_1 = 0 \Rightarrow \vec{M}_1 = 0$). In diesem Fall ist die Schwerkraft vollständig kompensiert und die als Waage aufgebaute Anordnung im Gleichgewicht. Der Kreisel soll mit dem Drehimpuls \vec{L} um die Figurenachse rotieren. Nach dem Drehimpulserhaltungssatz sind \vec{L} und damit auch die Figurenachse raumfest. Erzeugt man durch eine Zusatzmasse m_1 ein zusätzliches Drehmoment $\vec{M}_1 = \vec{r} \times (m_1 \vec{g})$, das auf Grund der Anordnung senkrecht auf dem Drehimpulsvektor \vec{L} steht, so muss dieser seine Richtung

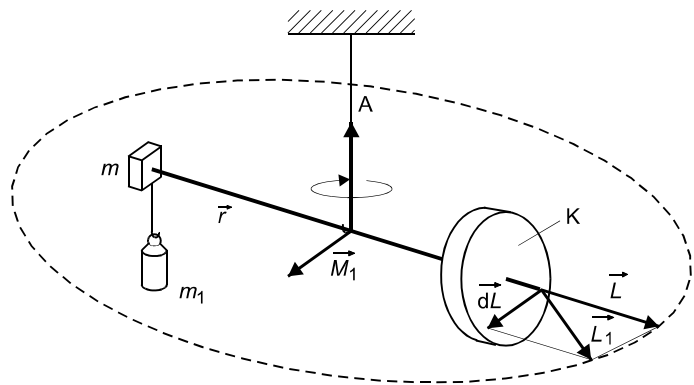


Abb. 4 GYROSKOP (PRINZIP)

fortlaufend ändern und die ganze Anordnung dreht sich mit der Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_P um die Achse A. Für die zeitliche Änderung $d\varphi$ ergibt sich nach Abb. 5 mit Gl. (6) $d\varphi = dL / L = M \cdot dt / L$, woraus folgt:

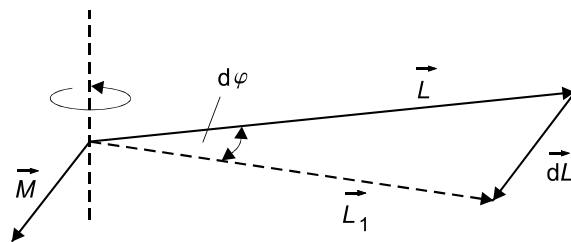


Abb. 5 PRÄZSSION

fortlaufend ändern und die ganze Anordnung dreht sich mit der Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_P um die Achse A. Für die zeitliche Änderung $d\varphi$ ergibt sich nach Abb. 5 mit Gl. (6) $d\varphi = dL / L = M \cdot dt / L$, woraus folgt:

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}. \quad (7)$$

4. Bestimmung der Hauptträgheitsmomente: Aus Messungen der Nutationsperiode T_N und der Präzessionsperiode T_P können die Hauptträgheitsmomente J_x und J_s des Kreisels wie folgt bestimmt werden: Aus Gl. (7) folgt mit $L = \omega_x J_x$ und $\omega_x = 2\pi \cdot n$ (n - Kreisdrehzahl) für die Periodendauer der Präzession

$$T_P = \frac{4\pi^2 J_x n}{M}, \quad (8)$$

woraus J_x berechnet werden kann.

Auf die Bestimmung von J_s führt folgende Überlegung: Durch einen seitlichen Stoß auf die Kreiselachse zur Einleitung der Nutation wird der Drehimpuls (besonders in seiner Richtung) etwas verändert. Es gilt Gl. (3), die, multipliziert mit dem Einheitsvektor in x-Richtung (Figurenachse!), $L \cos \delta = J_x \omega_x$ ergibt. Dabei ist δ der halbe Öffnungswinkel des Nutationskegels. Mit der Näherung $\cos \delta \approx 1$ für kleine Öffnungswinkel folgt aus Gl. (5) die Periodendauer der Nutationsbewegung

$$T_N = \frac{J_s}{J_x} \cdot \frac{1}{n}, \quad (9)$$

woraus J_s berechnet werden kann.

AUFGABEN

1. Messung der Periodendauer T_P der Präzession für 10 verschiedene Drehmomente bei einer Kreisdrehzahl $n = 12 \text{ s}^{-1}$, graphische Darstellung $T_P = f(1/M)$ (Gl. (8)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_x .
2. Messung der Periodendauer T_P der Präzession für 10 verschiedene Kreisdrehzahlen im Bereich zwischen $n = 7 \text{ s}^{-1}$ und $n = 16 \text{ s}^{-1}$ bei festem Drehmoment (mit Massenstück $m = 200 \text{ g}$), graphische Darstellung $T_P = f(n)$ (Gl. (8)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_x .
3. Messung der Periodendauer T_N der Nutation am präzessionsfreien Kreisel für 10 verschiedene Kreisdrehzahlen im Bereich von $n = 4 \text{ s}^{-1}$ bis $n = 12 \text{ s}^{-1}$, graphische Darstellung $T_N = f(1/n)$ (Gl. (9)) und Bestimmung des Trägheitsmomentes J_s .
4. Näherungsweise Berechnung des Trägheitsmomentes J_x des Gyroskops und Vergleich mit den experimentellen Werten aus den Aufgaben 1 und 2.
5. a) obligatorisch: Vergleich des experimentellen Wertes für J_s (Aufgabe 3) mit dem Sollwert:
 Versuchsplatz 1: $(9,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ Versuchsplatz 2: $(8,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
 Versuchsplatz 3: $(9,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ Versuchsplatz 4: $(9,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
 b) freiwillig: selbständige Berechnung der in a) vorgegebenen Sollwerte.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Versuchsaufbau im Praktikum (Abb.6) ist eine Realisierung des oben beschriebenen Gyroskops. Der Kreisel K ist an einem Ende des Waagebalkens W so angebracht, dass seine Figurenachse mit der Richtung des Waagebalkens zusammenfällt. Der Kreisel wird über eine Reibradkupplung mit Gummiring durch einen kleinen Elektromotor M mit einstellbarer Drehzahl angetrieben. Die Drehzahl kann mit einer Lichtschrankenordnung LS und nachgeschaltetem Digitalzähler gemessen werden. Hierbei erfolgt die Signalübertragung vom beweglich aufgehängten

Teil des Gyroskops auf den ortsfesten Teil des Übertragungssystems zum Anzeigegerät optoelektronisch vermittelt Leuchtdiode, Lichtleiter und Fototransistor. Der Waagebalken ist in einem Gelenk drehbar um die Achse **B** aufgehängt. Das Gelenk selbst und damit der ganze Aufbau ist

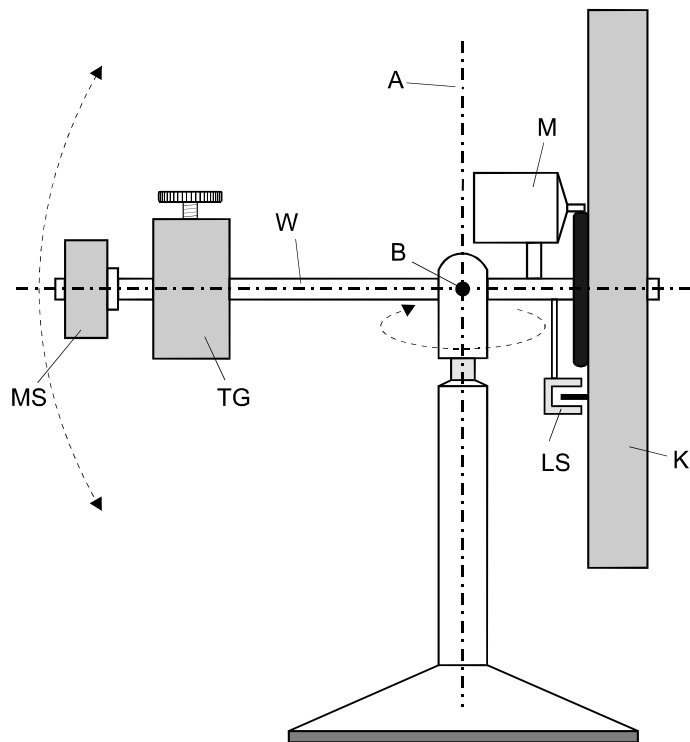


Abb. 6 VERSUCHSANORDNUNG

zusätzlich um die Achse **A** leicht drehbar gelagert. Auf der anderen Seite des Waagebalkens befinden sich ein verschiebbares Tariergewicht **TG** und eine Aufnahme für auswechselbare Massestücke **MS**. Die Massestücke im Bereich von $m = 50 \text{ g}$ bis $m = 500 \text{ g}$ sind 50 g -weise gestuft. Bei zunächst nicht aufgesteckten Massestücken kann die Anordnung durch Verschieben des Tariergewichtes **TG** so austariert werden, dass sie im Schwerpunkt unterstützt ist und folglich keine Drehmomente auf den Kreisel wirken. Der rotierende Kreisel behält seine Figurenachse (= Drehimpulsachse) im Raum bei. Durch Aufstecken der Massestücke **MS** mit bekannter Masse m können

jetzt definierte Drehmomente erzeugt und damit die Präzession eingeleitet werden.

Alle Drehzahländerungen müssen langsam vorgenommen werden, um die Reibradkupplung zu schonen!

Für die Aufgaben 1 bis 3 werden die Periodendauern T_P und T_N mit einer elektronischen Handstoppuhr gemessen. Die Messung der für die Auswertung erforderlichen geometrischen Daten erfolgt mit einem Messschieber. Die Nutationsbewegung (Aufgabe 3) wird am gut austarierten Gyroskop durch einen leichten Stoß gegen den Waagebalken eingeleitet. Die Messung von T_N ist wegen der rel. schnell abklingenden Nutation bei rel. hoher Nutationsfrequenz etwas schwierig und sollte deshalb zunächst ein wenig trainiert werden.

Zur näherungsweisen Berechnung des Trägheitsmomentes J_x (Aufgabe 4) wird der Kreisel (gedanklich!) in zweckmäßig gewählte Hohlzylinder zerlegt, deren Trägheitsmomente summiert werden. Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 , der Höhe h und der Dichte ρ bezüglich seiner Symmetrieachse ergibt sich aus

$$J = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (r_2^4 - r_1^4).$$

Für Aufgabe 5b) werden analog wie bei Aufgabe 4 die Trägheitsmomente aller zu J_s beitragenden Zylinder und Hohlzylinder, hier aber bzgl. der relevanten Drehachse **B** (Abb.6), addiert. Bezeichnet man den Abstand zwischen der Drehachse **B** und der zu **B** parallelen Schwerpunktachse eines Hohlzylinders mit s , so beträgt sein (äquatoriales) Trägheitsmoment

$$J = \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \left\{ \frac{1}{4} (r_2^2 + r_1^2) + \frac{h^2}{12} + s^2 \right\}.$$

Zur Ausführung der Rechnungen steht das PC-Programm “KREISEL“ zur Verfügung. Eingabe-Größen sind die geometrischen Daten mit Messunsicherheiten, ausgegeben werden die Einzel-trägheitsmomente und deren Summe mit Messunsicherheiten.

Zusätzliche Angaben:

Dichte von Messing $\rho_M = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$

Dichte von Eisen $\rho_{Fe} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$.

FRAGEN

1. Was versteht man unter den Hauptträgheitsmomenten eines starren Körpers?
2. Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment des Motorankers auf das Messergebnis für J_x ?
3. Welche Anwendungen des Kreiselprinzips in der Technik kennen Sie?

M12 SAITENSCHWINGUNG

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Stehende Wellen, Wellengleichung, Grund- und Oberschwingung, Eigenfunktionen und Eigenwerte, Fourieranalyse und -synthese.*

1. Saitenschwingung: Unter einer Saite versteht man einen elastischen Körper, der in seinen Querabmessungen auf die unmittelbare Umgebung der neutralen Faser reduziert ist, so dass er einer Biegung keinen Widerstand entgegensetzt. Experimentell realisiert man die Saite z.B.

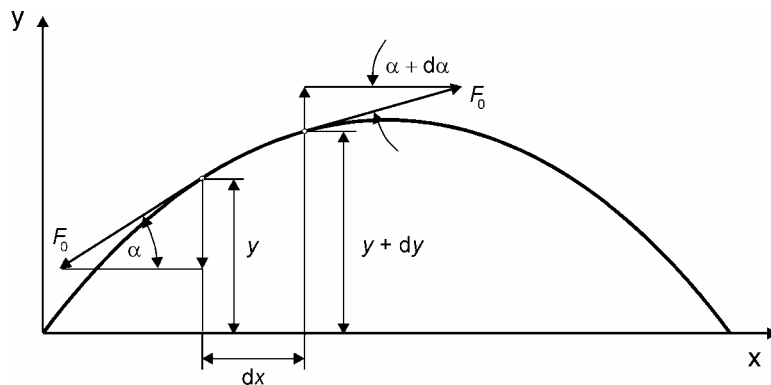


Abb. 1 ABLEITUNG DER WELLENGLEICHUNG

durch einen dünnen Metalldraht. Die Ruhelage eines Stabes ist aufgrund der elastischen Kräfte im Material räumlich fixiert, wenn er in einer Stelle eingespannt ist (vgl. Versuch M9). Dagegen ist die Ruhelage einer Saite erst definiert, wenn sie an beiden Enden fest eingespannt ist und eine axiale Normalspannung

$\sigma = F_0 / A$ (F_0 = Zugkraft, A = Querschnitt) wirkt. Lenkt man eine Saite aus ihrer Ruhelage aus (durch Streichen oder Zupfen), so treten rücktreibende Kräfte auf, und die Saite kehrt in Form einer gedämpften longitudinalen und transversalen Schwingung in ihre Ruhelage zurück. Im vorliegenden Versuch beobachtbar und für die Akustik der Saiteninstrumente interessant sind nur die transversalen Schwingungen.

2. Differentialgleichung einer schwingenden Saite: Zur Ableitung der Bewegungsgleichung einer ungedämpft schwingenden Saite wird vorausgesetzt, dass die Bewegung in der x-y-Ebene (Abb. 1) erfolgt und der Einfluss der Schwerkraft vernachlässigt werden kann. Eine Saite der Länge l , des Querschnittes A und der Massendichte ρ bzw. der linearen Massendichte $\mu = A \cdot \rho$ wird durch die Kraft F_0 gespannt.

Wird die Saite transversal ausgelenkt (Abb. 1), so wirkt auf das Saitenelement dx die rücktreibende resultierende Kraft

$$dF = F_0 \sin(\alpha + d\alpha) - F_0 \sin \alpha. \quad (1)$$

Für kleine Auslenkungen der Saite gilt näherungsweise

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + d\alpha) \approx \alpha + d\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

und man erhält

$$dF = F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (2)$$

Diese Kraft führt zu einer Beschleunigung des Massenelementes $dm = \rho A dx = \mu dx$ und es folgt mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Diese Differentialgleichung zeigt, dass die Transversalschwingungen nicht von der Elastizität sondern nur von der Spannkraft F_0 und der linearen Massendichte μ der Saite abhängen. Das Ergebnis war zu erwarten, da die mit der Auslenkung verbundene Längsdehnung von dx bei der Herleitung vernachlässigt wurde. Mit einer erweiterten Herleitung kann gezeigt werden, dass die Dehnung und damit die durch den Elastizitätsmodul E beschriebene Elastizität die Ursache für die immer auch auftretenden Longitudinalschwingungen ist, welche einer der Gl. (3) sehr ähnlichen Bewegungsgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Die Größe ξ kennzeichnet hier die Auslenkung der Massenelemente in der x -Richtung.

3. Diskussion der Wellengleichung: Die Bewegungsgleichungen Gl. (3) und Gl. (4) der Saite sind Spezialfälle der allgemeinen eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Diese Wellengleichung wird gelöst durch alle Funktionen $u(x, t) = f(x \pm ct)$, die zweimal nach x und t differenzierbar sind. Wählt man einen bestimmten Argumentwert $a_1 = x + ct = \text{const}$ der Lösung u der Wellengleichung, so folgt nach Differentiation

$$\frac{da_1}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(x + ct) = \frac{dx}{dt} + c,$$

d. h. der betrachtete Argumentwert a_1 breitet sich mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = -c$ in Rich-

tung der negativen x -Achse aus. Das negative Vorzeichen im Lösungsansatz ergibt eine Ausbreitung in Richtung der positiven x -Achse. c ist nicht die Geschwindigkeit eines Körpers, sondern eines physikalischen Zustandes, d.h. des Argumentwertes a_1 . Man bezeichnet $x \pm ct$ als die Phase und c als die Phasengeschwindigkeit der sich ausbreitenden Welle. Durch Koeffizientenvergleich (Gl. (3) bzw. Gl. (4)) erhält man für die Phasengeschwindigkeit der Transversal- bzw. Longitudinalwelle der schwingenden Saite

$$c^{\text{trans}} = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \quad \text{bzw.} \quad c^{\text{long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6)$$

4. Lösung für stehende Wellen: Um die Bewegung einer ungedämpft schwingenden Saite zu beschreiben, benötigt man eine Lösung der Wellengleichung (Gl. (5)), die auch die experimentell gegebenen Randbedingungen erfüllt. Die Randbedingungen aufgrund der Einspannung der Saite sind:

$$\text{für alle } t \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (7)$$

Die Anfangsbedingung ($t = 0$) sei so gewählt, dass die Saite durch die Ruhelage schwingt:

$$\text{für } t = 0 \quad u(x,0) \equiv 0 \quad \text{und} \quad \frac{du(x,0)}{dt} \neq 0. \quad (8)$$

Betrachtet man in Richtung der x -Achse zwei sich entgegengesetzt ausbreitende harmonische Wellen $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$

$$u_1(x,t) = A \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{c}\right) \quad u_2(x,t) = A \cos\left(\omega t + \omega \frac{x}{c}\right),$$

so erfüllen sie zwar beide die Wellengleichung, aber nicht die Rand- und Anfangsbedingung. Die Wellengleichung ist eine lineare Differentialgleichung, deshalb ist auch jede Linearkombination aus u_1 und u_2 eine Lösung der Wellengleichung, also auch

$$u = u_1 - u_2 = 2 A \sin \omega t \cdot \sin \omega \frac{x}{c}. \quad (9)$$

Diese Lösung erfüllt die Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$. Die Randbedingungen

$$u(0,t) = 2 A \sin \omega t \cdot \sin \omega \frac{0}{c} = 0$$

$$u(l,t) = 2 A \sin \omega t \cdot \sin \omega \frac{l}{c} = 0$$

sind für die Kreisfrequenzen

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \frac{c}{2l} n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

der schwingenden Saite erfüllt. Aufgrund dieses Lösungsansatzes kann man die Schwingungsform der Saite als die Superposition zweier entgegengesetzt laufender Wellen gleicher Frequenz auffassen, wobei aufgrund der Randbedingungen aber nicht mehr jede Kreisfrequenz, sondern nur noch eine diskrete Folge möglich ist (Gl. (10)). Für die Trans-

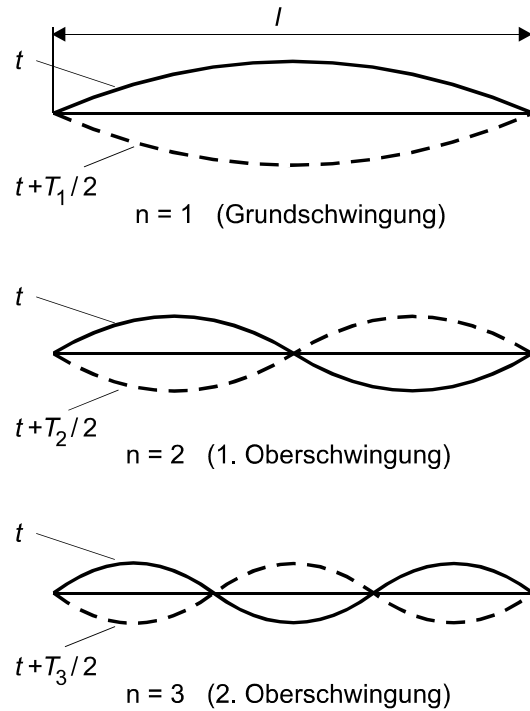


Abb. 2 AMPLITUDENVERTEILUNG FÜR VERSCHIEDENE n -WERTE

versal- bzw. Longitudinalschwingung ergeben sich mit Gl. (6) die Frequenzen

$$f_n^{\text{trans}} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \quad \text{bzw.} \quad f_n^{\text{long}} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (11)$$

Setzt man die möglichen Kreisfrequenzen (Gl. (10)) in die Lösung (Gl. (9)) ein, so erhält man

$$u_n = A_n \sin\left(n \frac{\pi}{l} c t\right) \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{l} x\right). \quad (12)$$

Betrachtet man diese Lösung für ein festes n , so kann man sagen, dass alle Punkte der Saite phasengleich mit der Amplitude $A_n \sin(n \frac{\pi}{l} x)$ schwingen. Die Darstellung der Amplitudenverteilung (Abb. 2) zeigt den Schwingungszustand für einen Zeitpunkt t maximaler Saitenauslenkung (ausgezogene Linie) und die entgegengesetzte Auslenkung zum Zeitpunkt $t' = t + T_n/2 = t + 1/2f_n$ (gestrichelt). Zwischen diesen beiden Zuständen schwingt die Saite mit den Frequenzen f_n und da die Nulldurchgänge (so genannte Schwingungsknoten) und die

Orte maximaler Auslenkung (Schwingungsbäuche) ihre räumliche Lage beibehalten, spricht man von einer **stehenden Welle**. An den Einspannstellen entstehen immer Knoten, d. h. die Wellen erleiden bei der Reflexion an den Einspannstellen einen Phasensprung von π . Die Wellenlänge der stehenden Welle ergibt sich wegen $c = \lambda_n f_n$ nach Gl. (10) zu

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Wenn auch die Wellenlängen der Transversal- und Longitudinalwellen für die gleiche Eigenschwingung übereinstimmen, so sind doch ihre Frequenzen (Gl. (11)) sehr unterschiedlich. Wegen $E \gg F_0 / A$ ist die Frequenz der Longitudinalwellen größer als die der Transversalwellen.

Im Versuch können nur die Transversalwellen beobachtet werden.

Im Praktikumsversuch wird eine Saite durch eine harmonische Kraft zu erzwungenen Schwingungen angeregt, so dass bei schwacher Dämpfung der Saite Resonanzen auftreten, wenn mit einer der Eigenfrequenzen angeregt wird (vgl. Versuch M8); die auftretenden großen Amplituden bei Resonanz sind leicht beobachtbar.

5. Lösung mit Eigenfunktionen: Zur Lösung partieller Differentialgleichungen wird häufig die „Separation der Variablen“ gewählt, die hier, wegen ihrer häufigen Anwendung in der Physik (Quantenmechanik) ergänzend dargestellt wird. Nimmt man an, die Lösung der Wellengleichung $u(x, t)$ lässt sich als Produkt zweier Funktionen

$$u(x, t) = v(x) w(t) \quad (14)$$

darstellen, die jeweils nur von der Variablen x bzw. t abhängen, so wird aus der Wellengleichung

$$v(x) \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 w(t) \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{v(x)} \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{c^2 w(t)} \frac{d^2 w}{dt^2}.$$

Da in der letzten Gleichung die linke Seite nur eine Funktion von x und die rechte Seite nur eine Funktion von t ist, kann die Gleichung nur dann für alle t gelten, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten sind, die zweckmäßigerweise mit $-k^2$ bezeichnet wird. Aus der Wellengleichung (Gl. (5)), einer partiellen Differentialgleichung, werden damit zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -k^2 v(x) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = -k^2 c^2 w(t). \quad (15)$$

Die Differentialgleichung für $v(x)$ wird für jedes k durch die Funktionen $\cos kx$ und $\sin kx$ gelöst, so wie auch durch jede Linearkombination aus ihnen. Die Lösung erfüllt aber die Randbedingungen $v(0) = v(l) = 0$ (Gl. (7)) nur für bestimmte, diskrete k -Werte. Wenn die Lösung die Form

$$v(x) = a_n \sin(k_n x)$$

hat, ergeben sich die möglichen k -Werte zu

$$k_n = n \frac{\pi}{l} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Diese durch die Randbedingung festgelegten k -Werte heißen **Eigenwerte** und die dazugehörigen Lösungen die **Eigenfunktionen** des Schwingungsproblems. Mit den möglichen k -Werten ergibt sich für die Differentialgleichung für $w(t)$ der Lösungsansatz

$$w(t) = C_n \cos(k_n ct) + D_n \sin(k_n ct),$$

woraus sich die **Eigenfrequenzen**

$$f_n = \frac{c}{2l} n \quad (17)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (10) ergeben. Mit dem Ansatz zur Separation der Variablen (Gl. (14)) können jetzt folgende Lösungen für die Wellengleichung angegeben werden

$$u_1 = E_n \sin(k_n ct) \cdot \sin(k_n x) \quad \text{und} \quad u_2 = F_n \cos(k_n ct) \cdot \sin(k_n x).$$

Da die Wellengleichung linear ist, sind auch alle Linearkombinationen dieser Lösungen, also auch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) (a_n \sin(k_n ct) + b_n \cos(k_n ct)) \quad (18)$$

Lösungen der Wellengleichung, vorausgesetzt die unendliche Reihe konvergiert.

Für die betrachtete Anfangsbedingung (Gl. (8)) ergibt sich $b_n = 0$, so dass sich die allgemeine Lösung, wenn man noch die Phasenwinkel α_n einführt, in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(n \frac{\pi}{l} x\right) \sin(2\pi f_n t + \alpha_n) \quad (19)$$

schreiben lässt. Hieraus folgt der allgemeine Satz:

Jede beliebige periodische Funktion, die den gestellten Rand- und Anfangsbedingungen des Schwingungsproblems genügt, lässt sich als Linearkombination harmonischer Funktionen darstellen (Satz von Fourier, der die Fouriersynthese, aber auch die Umkehrung, die Fourieranalyse von Funktionen, erklärt).

Verschiedene Saiteninstrumente ergeben für die gleiche Grundfrequenz Töne unterschiedlicher Klangfarbe. Diese entsteht dadurch, dass die Amplituden A_n der Oberschwingungen je nach den Anfangsbedingungen unterschiedlich sind und das Verhältnis der Amplituden A_n die Klangfarbe eines Instrumentes bestimmt. Die Phasenkonstante α_n (Gl. (19)) hat keine akustische Bedeutung, weil das menschliche Ohr keine Phasenverschiebungen wahrnimmt.

AUFGABEN

- Messung der Resonanzfrequenz f_n und Bestimmung der Lage der Schwingungsknoten für $n = 1$ bis 9 bei fester Saitenlänge ($l = 0,6 \text{ m}$) und fester Zugspannung (Belastung mit 1 kg in 3. Kerbe des Lasthebels).
Grafische Darstellung $f_n = f(n)$ (Gl. (11)) und Bestimmung des Anstiegs a (durch lineare Regression z.B. mit dem PC-Programm Geranull).
Berechnung der linearen Massendichte μ der Saite aus a und Vergleich mit der Herstellerangabe $\mu = 0,78 \text{ g/m}$.
Berechnung der Phasengeschwindigkeit c^{trans} der Transversalwelle (Gl. (6)).

- Überprüfung der Beziehung $\lambda_n = 2l/n$ (Gl. (13)) durch Auswertung der Lage der Schwingungsknoten für die Moden $n = 1$ bis 9.
- Messung der Resonanzfrequenzen f_1 (Grundfrequenzen) für 10 verschiedene Saitenlängen zwischen $l = 20\text{ cm}$ bis $l = 65\text{ cm}$ bei fester Zugspannung (Belastung mit 1 kg in 3. Kerbe des Lasthebels).
Grafische Darstellung $f_1 = f(1/l)$ (Gl. (17), Bestimmung des Anstiegs a , Berechnung von c^{trans} und Vergleich mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1.
 - Messung der Resonanzfrequenzen f_1 für 10 verschiedene Zugspannungen F_0 bei fester Saitenlänge $l = 0,6\text{ m}$.
Grafische Darstellung $f_1 = f(\sqrt{F_0})$ (Gl. (11)), Bestimmung des Anstiegs a , der linearen Massendichte μ und Vergleich mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1 und der Herstellerangabe.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Eine Saite S ist zwischen den Einspannstellen $Sp1$ und $Sp2$ ausgespannt (Abb. 3). Ihre Länge l wird durch die verschiebbaren Reiter $R1$, $R2$ variiert und an einer Skale abgelesen.

Die Einspannstelle $Sp2$ ist um die Achse A schwenkbar, und durch Verändern der am Lasthebel L eingehängten Massenstücke M (bis 1 kg) kann die Zugkraft F_0 eingestellt werden. Das Übersetzungsverhältnis des Lasthebels bei horizontaler Lage des Lasthebels kann durch Wahl der entsprechenden Kerbe für das Einhängen der Massestücke ganzzahlig zwischen 1 und 5 gewählt

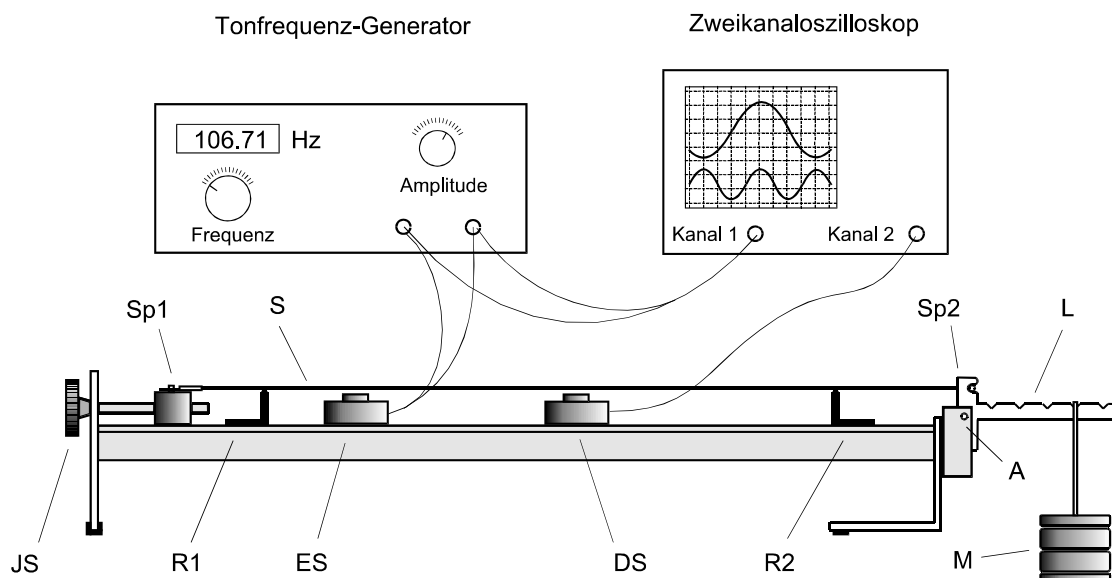


Abb.3 VERSUCHSANORDNUNG

werden. Die lastabhängige Dehnung der Saite muss durch Drehen an der Justierschraube JS derart ausgeglichen werden, dass der Lastarm bei allen Messungen die horizontale Lage beibehält. Bei der Berechnung der Zugkraft F_0 ist zu beachten, dass der Lasthebel allein infolge seines Eigengewichtes einen zusätzlichen Beitrag von $0,52\text{ N}$ liefert.

Die Saite wird durch eine auf einen Weicheisenkern gewickelte Spule **ES** magnetisch zu Schwingungen angeregt. Ein Tonfrequenzgenerator liefert den Strom für die Spule und erlaubt eine Änderung der Erregerfrequenz. Infolge der geringen Dämpfung der Saitenschwingung ist die Resonanz sehr scharf (vgl. Versuch M8), deshalb muss die Einstellung der Erregerfrequenzen für die Grund- und Oberschwingungen sehr sorgfältig erfolgen.

Das Generatorsignal wird parallel zur Erregerspule **ES** dem Kanal 1 des Zweikanaloszilloskops (Abb.3) zugeführt.

Infolge der Saitenschwingung wird in der Detektorspule **DS**, welche auf einen permanentmagnetischen Kern gewickelt ist, eine Wechselspannung erzeugt, welche dem Kanal 2 des Oszilloskops zugeführt wird.

Besondere Hinweise:

- Die Erregerspule **ES** wird zweckmäßig wenige Zentimeter (ausprobieren) rechts von Reiter **R1** angeordnet.
- Die Detektorspule **DS** kann zum Erfassen der Knoten und Bäuche der Schwingungen zwischen Erregerspule und Reiter **R2** verschoben werden. Dabei ist ein Mindestabstand zwischen **DS** und **ES** einzuhalten (durch Beobachtung der Signalform am Oszilloskop ausprobieren) um die direkte Wechselwirkung beider zu vermeiden.
- Werden die Kanäle an beiden Kanälen gleichzeitig angezeigt, dann beobachtet man im Resonanzfall an der Detektorspule (Kanal 2) gewöhnlich die doppelte Erregerfrequenz. (Überlegen Sie sich den Grund, siehe hierzu Frage 2 am Ende). Für die Auswertung maßgeblich ist also bei diesem Versuch immer die doppelte Erregerfrequenz.

FRAGEN

1. Erklären Sie die Entstehung des Signals an der Detektorspule **DS**.
2. Warum schwingt die Saite im Resonanzfall mit der doppelten Erregerfrequenz? (Hinweis: der Kern von **ES** ist weichmagnetisch)
3. Was versteht man unter der Phasengeschwindigkeit einer Welle?
4. Wie kann man stehende Wellen erzeugen?

M13 ULTRASCHALL

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Wellen, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, Doppler-Effekt, Piezoelektrischer Effekt.

Schallwellen sind mechanische Wellen, welche sich in Körpern aufgrund deren elastischer Eigenschaften ausbreiten. Von **Ultraschall** redet man im Frequenzbereich oberhalb des Hörschallbereichs, d.h. von 20 kHz bis über 10 GHz, etwa der Obergrenze für die Schallerzeugung auf technischem Wege.

Die Gleichung der ebenen harmonischen Welle, welche sich mit der Geschwindigkeit c in Richtung der positiven x -Achse ausbreitet, lautet

$$u(t, x) = u_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right). \quad (1)$$

Hierbei bezeichnen $u(t, x)$ die sich periodisch ändernde Größe am Ort x zum Zeitpunkt t , u_0 die Amplitude, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz, $f = 1/T$ die Frequenz und T die Periodendauer. Das Argument der Sinusfunktion bezeichnet man als Phase und φ_0 als Anfangsphase der Welle. Die Anfangsphase wird im Folgenden gleich Null gesetzt, da sie hier keine Rolle spielt. Den kleinsten Abstand zweier Orte gleicher Phase nennt man Wellenlänge λ und aus der Periodizität der Sinusfunktion folgt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit, welche auch **Phasengeschwindigkeit** genannt wird,

$$c = f \cdot \lambda. \quad (2)$$

Entsprechend der zeitlichen und räumlichen Periodizität einer Welle kann sie auf zwei verschiedene Arten dargestellt werden (Abb.1).

In Flüssigkeiten und Gasen treten Schallwellen immer als **Longitudinalwellen** auf. Im Festkörper hingegen können sich auch Transversalwellen ausbilden, denn jede Dilatation ist immer mit einer mehr oder weniger großen Querkontraktion verbunden (Vgl. Versuch M3), so dass auch Scherkräfte auftreten. Bei

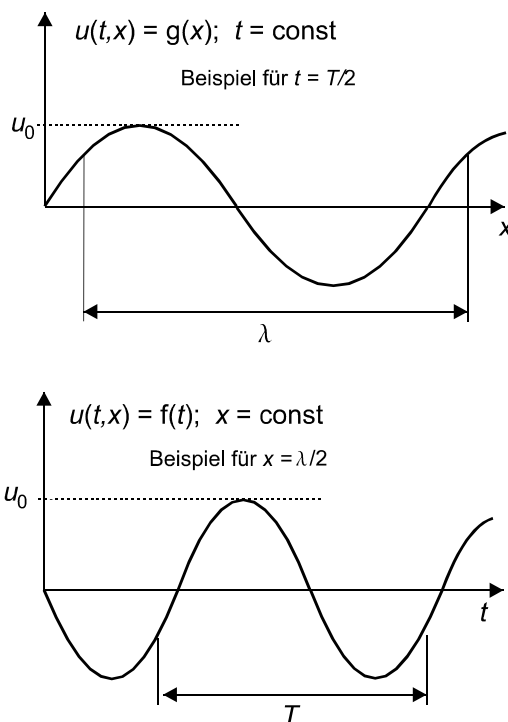


Abb.1 DARSTELLUNGSFORMEN EINER WELLE

Tabellenwerten für die Schallgeschwindigkeiten in Festkörpern ist deshalb darauf zu achten, ob die Daten für dünne Stäbe oder ausgedehnte Körper angegeben sind.

Stehende Wellen: Lässt man zwei Wellenzüge gleicher Amplitude und Wellenlänge, aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung interferieren, so führt die Addition der zugehörigen Gleichungen auf die Gleichung für die stehende Welle

$$u_0 \sin(\omega(t + \frac{x}{c})) + u_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{c})) = 2u_0 \cos(\omega \frac{x}{c}) \sin(\omega t). \quad (3)$$

Hier stellt der \sin -Faktor eine im ganzen Raum phasengleiche harmonische Schwingung dar, deren Amplitude $2u_0 \cos(\omega x / c)$ eine periodische Funktion von x mit der Periodenlänge λ ist. So wie die \cos -Funktion abwechselnd 0 und ± 1 wird, reihen sich abwechselnd **Schwingungsknoten** und **Schwingungsbäuche** aneinander.

Dopplereffekt: Bewegen sich Schallquelle und -empfänger mit der Relativgeschwindigkeit v , dann stellt man am Empfänger bei Annäherung eine Frequenzerhöhung und bei Entfernung eine Frequenzerniedrigung fest. Da sich die Schallwellen in einem ruhenden stofflichen Medium ausbreiten, ist die Größe der Frequenzänderung davon abhängig, ob sich die Quelle oder der Empfänger bewegt. Man erhält bei einer Quellenfrequenz f_0 für die Empfangsfrequenz bei bewegtem Empfänger

$$f = f_0 (1 \pm \frac{v}{c}) \quad \text{bzw.} \quad \Delta f = \pm f_0 \frac{v}{c} \quad (4)$$

mit dem Pluszeichen bei Annäherung und dem Minuszeichen bei Entfernung. Bei bewegter Quelle erhält man dagegen als Empfangsfrequenz des Empfängers

$$f = \frac{f_0}{(1 \mp \frac{v}{c})} \quad \text{bzw.} \quad \Delta f = f_0 (\pm \frac{v}{c} + (\frac{v}{c})^2 \pm \dots), \quad (5)$$

mit dem Minuszeichen bei Annäherung und dem Pluszeichen bei Entfernung.

Gruppengeschwindigkeit: Bestimmt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen aus der Laufzeit z.B. eines Schallimpulses, so sind Messzeit und Messstrecke begrenzt. Solche "abgeschnittenen" Wellenzüge, auch Wellenpakete oder Wellengruppen genannt, breiten sich mit ihrer Gruppengeschwindigkeit aus, welche bei Auftreten von Dispersion von der Ausbreitungsgeschwindigkeit unendlich ausgedehnter Wellenzüge und damit der Phasengeschwindigkeit verschieden ist. Im vorliegenden Experiment tritt keine Dispersion auf und es muss demzufolge hier nicht zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit unterschieden werden.

AUFGABEN

1. Bestimmung der Wellenlänge und der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in Wasser durch Vergleich der Phasenbeziehung zwischen den am Schallsender und -empfänger gemessenen Signalen.
2. Bestimmung der Wellenlänge und der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in Wasser durch Messung der stehenden Wellen zwischen zwei Reflektoren.
3. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Wasser unter Ausnutzung des Dopplereffektes.

4. Vergleich der Ergebnisse für die Wellenlänge und die Ausbreitungsgeschwindigkeit aus den Aufgaben 1. - 3.
5. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Aluminium, Kupfer und Messing durch Laufzeitmessungen.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Der Ultraschallgenerator erzeugt hochfrequente sinusförmige Schwingungen, welche in einem Schallkopf mit einem piezokeramischen Wandler Ultraschallwellen erzeugen, die abgestrahlt werden. Neben der kontinuierlichen Abstrahlung im Sinusbetrieb kann wahlweise auch auf Impulsbetrieb (für Aufgabe 5) umgeschaltet werden. Der Schallkopf strahlt dann pulsartig kurze Wellenzüge mit einer Folgefrequenz von 500 Hz ab.

Die Generatorausgänge "Monitor" und "Synchr." dienen zur Darstellung der Schall- bzw. Generatorsignale auf einem Zweikanal-Oszilloskop. Die Phasenlage der zur Erregerspannung proportionalen

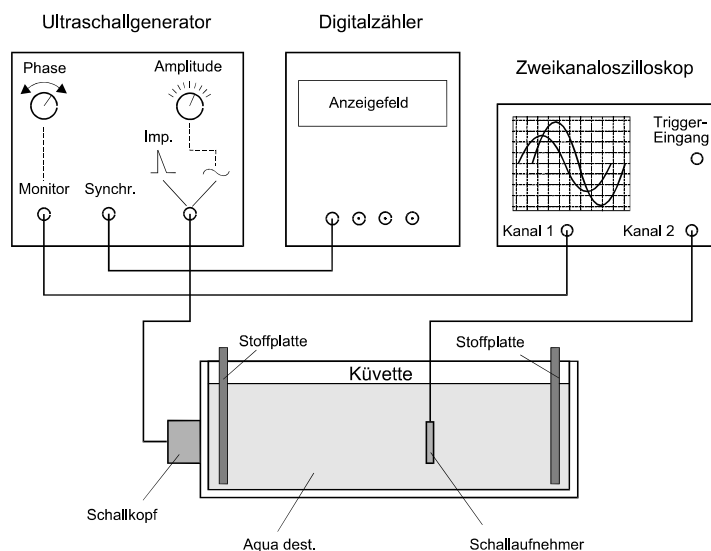


Abb. 2 VERSUCHSAUFBAU FÜR AUFGABE 1

Monitorspannung kann mit dem Stellknopf "Phase" um ca. 150° relativ zur Erregerspannung verschoben werden. Die Synchr.-Spannung von konstant 5 V ist phasenstarr zur Erregerspannung.

Im Impulsbetrieb setzt der Monitorimpuls gleichzeitig mit dem Erregerimpuls ein, so dass bei gleichzeitiger Darstellung des Monitor- und des aufgenommenen Schallimpulses auf dem Zweikanal-Oszilloskop die Laufzeit des Schallimpulses bestimmt werden kann. Der am Ausgang "Synchr." ent-

nommene Spannungsimpuls setzt ca. 10 ns vor Monitor- und Erregerimpuls ein, so dass diese bei externer Triggerung mit dem Synchr.-Signal mit Sicherheit oszillographisch erfasst werden. Der wasserdichte, als piezoelektrischer Wandler ausgeführte Schallaufnehmer liefert dem Schallwechseldruck proportionale Spannungssignale und ermöglicht die Darstellung von Ultraschallwellen und -impulsen auf dem Oszilloskop.

Für Aufgabe 1 (Abb. 2) wird die Küvette zu 3/4 mit destilliertem Wasser gefüllt. Zur Ankopplung des Ultraschallkopfes an die Schmalseite der Küvette werden einige Tropfen Glyzerin in den verbleibenden Spalt gegeben. Die Stoffplatten an den inneren Schmalseiten der Küvette sollen die Ausbildung stehender Wellen hemmen. Mittels einer motorgetriebenen Gewindespindel kann der

Schallaufnehmer mit einstellbarer Geschwindigkeit in Richtung bzw. entgegen der Schallausbreitung bewegt werden.

Mit einem Zweikanal-Oszilloskop werden das Signal der Schallquelle und das dem Schallwechsel-

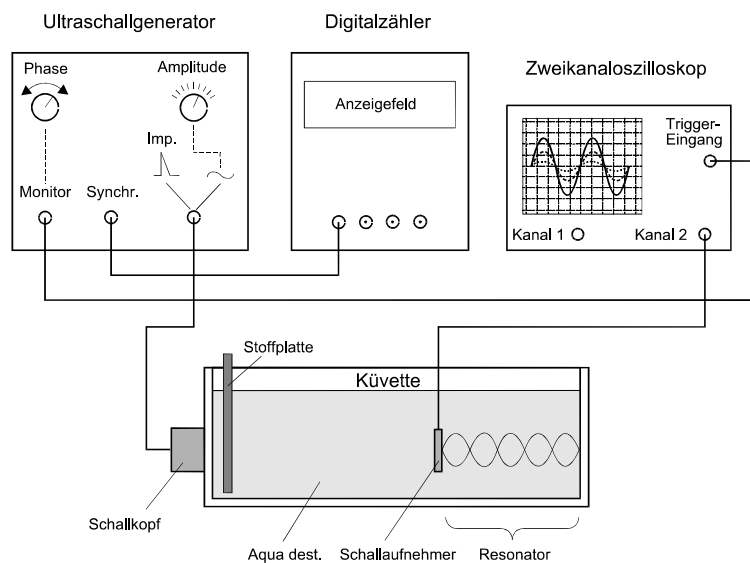


Abb. 3 VERSUCHSAUFBAU FÜR AUFGABE 2

mehreren Zentimetern. Die Wellenlänge beträgt dann $\lambda = s/N$. Zur Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit nach Gl. (2) wird die Frequenz am Synchr.-Ausgang des Generators mit einem Digitalzähler bestimmt.

Für Aufgabe 2 wird der Aufbau geringfügig geändert (Abb. 3): Das Monitor-signal des Generators wird nicht mehr Kanal 1 des Oszilloskops zugeführt, sondern zur externen Triggerung des Aufnehmersignals genutzt und an den dafür vorgesehenen Eingang des Oszilloskops angeschlossen. Außerdem wird die Stoffplatte von der dem Aufnehmer gegenüberliegenden Wand entfernt, damit die Welle reflektiert werden kann.

Bei bestimmten Abständen zwischen dem Aufnehmer und dieser Wand, die sich um jeweils $\lambda/2$ unterscheiden, bildet sich im somit geschaffenen Resonator eine stehende Welle aus. Aus der Anzahl N der bei Verschie-

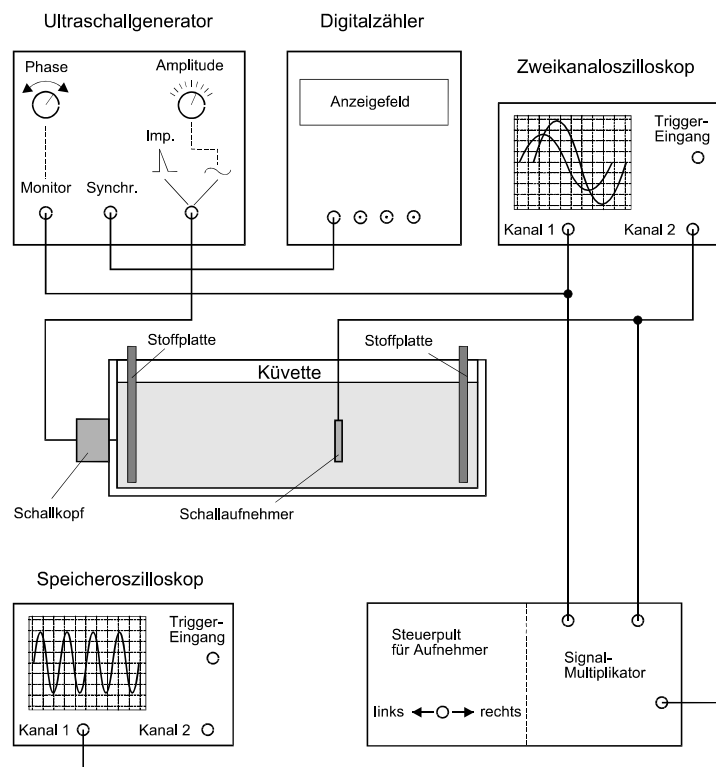


Abb. 4 VERSUCHSAUFBAU FÜR AUFGABE 3

bung s des Aufnehmers um einige Zentimeter überstrichenen Amplitudenmaxima (oder -minima)

wird die Wellenlänge gemäß $\lambda = 2s/N$ und daraus nach Gl. (2) die Ausbreitungsgeschwindigkeit c berechnet.

Für Aufgabe 3 wird der Aufbau für Aufgabe 1 erweitert (Abb.4). Beide Stoffplatten müssen eingebaut sein, um die Ausbildung einer stehenden Welle so gut wie möglich zu dämpfen.

Die grundsätzlich mögliche Bestimmung von Δf durch getrennte Messung von f_0 und f und folgende Differenzbildung würde erfordern, dass die Frequenzdrift während der Messungen deutlich kleiner als das zu erwartende Δf bleibt, was apparativ hier nicht gesichert werden kann. Der hier beschrittene Ausweg besteht in der direkten Bestimmung von Δf auf folgende Weise: Die gleichzeitig gemessenen Sender- und Empfängersignale werden in einer speziellen elektronischen Schaltung auf gleiche Amplitude normiert und anschließend miteinander multipliziert nach dem Prinzip

$$2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f t) = \cos[2\pi t(f_0 - f)] + \cos[2\pi t(f_0 + f)].$$

Der hochfrequente zweite Summand wird ausgesiebt und das Signal mit der Frequenz Δf wird direkt auf dem Bildschirm des Speicheroszilloskops aufgezeichnet. Aus dem Abstand mehrerer Maxima und der eingestellten Zeitbasis kann jetzt Δf berechnet werden. Zur Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit c nach Gl.(4) wird Δf für jeweils 5 verschiedene Empfängergereschwindigkeiten v in Hin- und Rückrichtung gemessen und c aus dem Anstieg des Graphen $\Delta f = f(v)$ berechnet. Zur Bestimmung von v kann die angezeigte Gewindespindeldrehzahl für den Empfängervortrieb genutzt werden, wenn zuvor die Ganghöhe mit einem Messschieber über ca. 5 cm Gewindelänge geteilt durch hiermit erfasste Gewindegänge bestimmt wurde. Für die Spindeldrehzahl wird ein systematischer Fehler von 0,5 % angenommen.

Für Aufgabe 5 (Abb.5) wird der jeweilige Spalt zwischen Metallprobe und Schallkopf bzw. Auf-

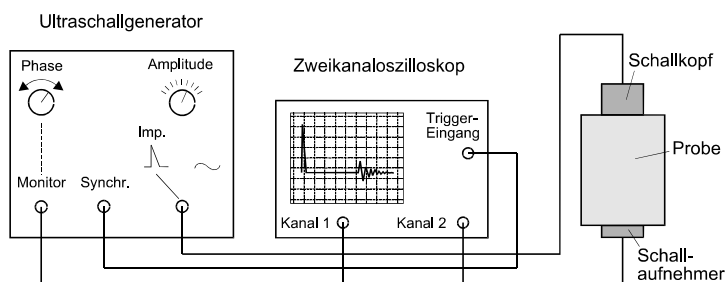


Abb. 5 VERSUCHSAUFBAU FÜR AUFGABE 5

nehmer mit einem Tropfen Glycerin zur sicheren Schallankopplung ausgefüllt. Die im Impulsbetrieb des Generators vom Schallkopf abgestrahlten Ultraschallimpulse werden auf dem Bildschirm des Oszilloskops angezeigt. Hierzu wird der Monitorausgang des Generators mit einem Kanal verbun-

den. Das nach Durchlaufen der Metallprobe am Aufnehmer entstehende Signal wird auf den anderen Kanal gegeben. Bei der Triggerung mit dem um ca. 10 ns vorseilenden Synchr.-Signal kann bei geeigneter Einstellung der Zeitbasis ein stehendes Bild erreicht werden, welches Sende- und Empfangsimpuls gleichzeitig anzeigt. Aus der Verschiebung beider Signale auf der Zeitachse kann die Laufzeit t und hieraus die Ausbreitungsgeschwindigkeit c bestimmt werden, wenn zuvor die geometrische Ausdehnung der Probe gemessen wurde.

FRAGEN

1. Was versteht man unter dem piezoelektrischen Effekt und wie nutzt man ihn zur Aussendung und zum Empfang von Schallsignalen?
2. Worin besteht der Unterschied zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei der Ausbreitung von Wellen?
3. Wie leitet man die Formeln für den Dopplereffekt (Gl. (4) und Gl. (5)) her?

T1 WÄRMEKAPAZITÄT EINES KALORIMETERS

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: *Erster Hauptsatz, Wärmekapazität, Arbeit von Gleich- und Wechselstrom. Wärmeaustauschkorrektur (Einführungsskript, Abschnitt 3.2).*

Wärme ist eine Energieform, die zwischen Körpern ausgetauscht wird oder in andere Energieformen umgewandelt werden kann. Führt man einem Körper der Masse m die Wärmemenge dQ zu, dann ist die sich einstellende Temperaturerhöhung dT proportional zur zugeführten Wärmemenge

$$dQ = m c dT \quad (1)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (\text{SI-Einheit: } [c] = \text{J/kg K}) \quad (2)$$

eine Stoffkonstante ist, die in kleineren Temperaturbereichen praktisch konstant ist und spezifische Wärmekapazität heißt. Das Produkt

$$C = c m \quad (\text{SI-Einheit: } [C] = \text{J/K}) \quad (3)$$

nennt man Wärmekapazität des Körpers.

Zur Bestimmung von Wärmemengen benutzt man Kalorimeter, dies sind gut wärmeisolierte Gefäße. Führt man einem mit Wasser (Masse m_w) gefüllten Kalorimeter die Wärmemenge ΔQ zu, dann werden außer dem Wasser auch Teile des Kalorimeters wie Gefäßwandung, Thermometer und Rührer erwärmt. Die Wärmekapazität der Versuchsanordnung setzt sich also aus der des Wassers ($m_w c_w$) und der des Kalorimeters C_K zusammen

$$\Delta Q = (m_w c_w + C_K) \Delta T. \quad (4)$$

Die spezifische Wärmekapazität des Wassers hat den Wert $c_w = 4,187 \text{ kJ/kgK}$. Die Bestimmung der Wärmekapazität C_K des Kalorimeters ist rechnerisch nur näherungsweise möglich, deshalb wird sie im Allgemeinen experimentell ermittelt.

1. Elektrische Methode: Fließt durch einen ohmschen Leiter (Heizspirale), an dem die Spannung U anliegt, der Strom I , dann entsteht in der Zeit Δt in ihm eine der elektrischen Energie äquivalente Wärmemenge

$$\Delta Q = IU \Delta t. \quad (5)$$

Überträgt man diese Wärmemenge an das Wasser (Masse m_w) und das Kalorimeter (Wärmekapazität C_K), dann steigt die Wassertemperatur (Gl. (4)). Bei verlustloser Wärmeübertragung sind beide Wärmemengen gleich (Energieerhaltungssatz) und es gilt

$$IU \Delta t = (m_w c_w + C_K) \Delta T. \quad (6)$$

woraus C_K bestimmt werden kann.

2. Mischungsmethode: Fügt man dem kalten Wasser (Masse m_1 , Temperatur T_1) eines Kalorimeters warmes Wasser (Masse m_2 , Temperatur T_2) hinzu, dann findet ein Wärmeaustausch statt, bis das gesamte Wasser die Mischungstemperatur T_m hat. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt, dass die vom warmen Wasser abgegebene Wärmeenergie

$$\Delta Q_2 = m_2 c_w (T_2 - T_m)$$

gleich der vom kalten Wasser und dem Kalorimeter aufgenommenen Wärmeenergie

$$\Delta Q_1 = (m_1 c_w + C_K)(T_m - T_1)$$

ist. Der Energieerhaltungssatz in dieser speziellen Form des Austausches von Wärmemenge heißt Richmannsche Mischungsregel und ergibt die Gleichung

$$(m_1 c_w + C_K)(T_m - T_1) = m_2 c_w (T_2 - T_m) \quad (7)$$

zur Bestimmung der Wärmekapazität C_K des Kalorimeters.

Korrektur des Wärmeaustausches mit der Umgebung: Bei kalorimetrischen Messungen ist im Allgemeinen der Wärmeaustausch mit der Umgebung als systematischer Fehler zu korrigieren. Das Prinzip dieser Korrektur besteht darin, den langsam erfolgenden Erwärmungsprozess und den dadurch möglichen Wärmeaustausch mit der Umgebung auf eine **momentane** Wärmef Aufnahme ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung zu extrapolieren. Man misst vor dem Beginn des eigentlichen Wärmeaustausches fünfmal in Abständen von 1 min die Wassertemperatur (Vorperiode AB, Abb. 1). Während des beabsichtigten Wärmeaustausches (Hauptperiode BE)

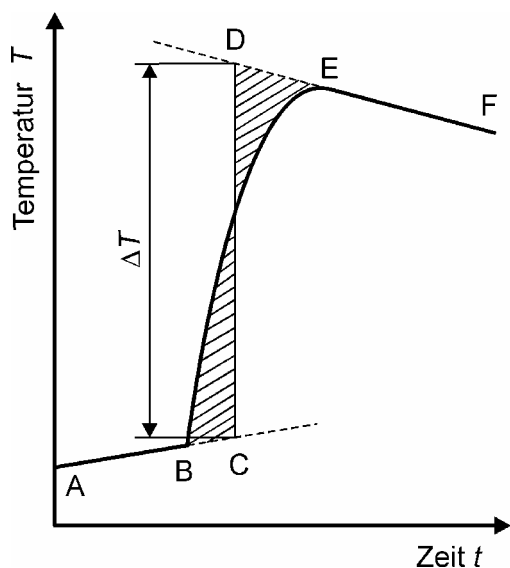


Abb.1 WÄRMEAUSTAUSCHKORREKTUR

ändert sich die Temperatur schnell und es wird in kürzeren Zeitabständen (15-30 s) gemessen. Nach Beendigung des Wärmeaustausches misst man die Temperatur wieder fünfmal in Abständen von 1 min (Nachperiode EF). Die gemessenen Temperaturen T werden in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dargestellt und die nahezu geradlinigen Kurventeile von Vor- und Nachperiode linear extrapoliert.

Zur Bestimmung der Temperaturdifferenz ΔT lege man eine Gerade CD senkrecht zur Zeitachse, so dass die schraffierten Flächen gleich groß werden. Beim hier beschriebenen Kurvenverlauf wird vorausgesetzt, dass die Umgebungstemperatur T_u zwischen Anfangs- und Mischungstemperatur liegt,

dies sollte man immer anstreben, um den Wärmeaustausch mit der Umgebung gering zu halten. Erzeugt der Wärmeaustausch eine Abkühlung der Kalorimeterflüssigkeit, dann verändert sich der Kurvenverlauf sinngemäß, aber das Korrekturverfahren kann in gleicher Weise angewandt werden.

AUFGABEN

1. Bestimmung der Wärmekapazität C_K nach der elektrischen Methode (Gl. (6)).
2. Für alle Messgrößen aus Aufgabe 1 bestimme man den zufälligen und den systematischen Fehler sowie die Messunsicherheit und stelle sie tabellarisch zusammen.
3. Bestimmung der Wärmekapazität C_K nach der Mischungsmethode (Gl. (7)).
4. Für alle Messgrößen aus Aufgabe 3 bestimme man den zufälligen und den systematischen Fehler sowie die Messunsicherheit und stelle sie tabellarisch zusammen.
5. Für beide Methoden führe man eine Bestimmung der Messunsicherheit der Wärmekapazität durch und vergleiche die Ergebnisse.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Für Aufgabe 1 wird der Heizeinsatz in das mit 300 cm^3 Wasser gefüllte Kalorimeter getaucht (Tauchsiederprinzip) und der Rührer eingeschaltet. Nach der Messung der Vorperiode wird die Heizung eingeschaltet und für fünf Minuten alle 10 s die Temperatur, die Spannung und der Strom gemessen. Zur Berechnung der Wärmekapazität C_K (Gl. (6)) werden für die Spannung U und den Strom I die Mittelwerte aus den während der Hauptperiode gemessenen Werten eingesetzt. Die Temperaturdifferenz ΔT wird der grafischen Darstellung zur Wärmeaustauschkorrektur entnommen. Der Versuch wird zweimal durchgeführt.

Für Aufgabe 2 wird die Messunsicherheit aller Messgrößen aus zufälligem Fehler und systematischem Fehler ermittelt. Der zufällige Fehler wird entweder durch Mittelwertbildung ermittelt oder bei zu geringer Zahl von Messwerten aus der Ablesegenauigkeit für die Messgröße abgeschätzt. Der systematische Fehler wird aus den Genauigkeitsangaben der Messgeräte ermittelt.

Für Aufgabe 3 fülle man das Kalorimeter mit 150 cm^3 Leitungswasser, schalte den Rührer ein und messe die Temperatur T_1 . Dann gieße man 150 cm^3 Wasser von $35 - 45 \text{ }^\circ\text{C}$ dazu und messe die Mischungstemperatur T_m . Der Versuch wird dreimal durchgeführt ohne Wärmeaustauschkorrektur.

Für Aufgabe 4 verfähre man analog zur Aufgabe 2.

Für Aufgabe 5 bestimme man nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz die Messunsicherheit der Wärmekapazität C_K nach beiden Methoden. Die Messunsicherheit welcher Messgrößen bestimmt im Wesentlichen die Messunsicherheit der Wärmekapazität C_K ?

FRAGEN

1. Weshalb ist die Wärmekapazität C_K des Kalorimeters von der eingefüllten Wassermenge und der Temperatur abhängig?
2. Warum ist für die Mischungsmethode keine Wärmeaustauschkorrektur erforderlich?
3. Der Wert der spezifischen Wärmekapazität für Wasser ist groß im Vergleich zu anderen Flüssigkeiten und Festkörpern. Welche Bedeutung hat dies für das Klima?

T4 ZUSTANDSGLEICHUNG IDEALER GASE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Boyle-Mariottesches Gesetz, Gay-Lussacsches Gesetz, Zustandsgleichung idealer Gase (thermodynamisch und molekular kinetisch), Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung, Gleichverteilungssatz, Gasthermometer.

1. Zustandsgleichung: Unter der Zustandsgleichung eines Stoffes (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) versteht man eine Gleichung, die es gestattet, aus dem funktionalen Zusammenhang zwischen geeigneten Koordinaten - den Zustandsvariablen - das physikalische Verhalten eines Systems zu beschreiben. Als Zustandsgrößen für ein thermodynamisches System kann man den Druck p , die Temperatur T und das Volumen V wählen. Für Gase konnte eine in einem weiten Bereich dieser makroskopischen Zustandsvariablen gültige thermodynamische Zustandsgleichung experimentell abgeleitet werden sowie später molekular kinetisch aus den Eigenschaften der Gasatome, mit Hilfe der kinetischen Gastheorie, theoretisch begründet werden.

2. Thermodynamische Zustandsgleichung: Aus den experimentell ermittelten Zusammenhängen zwischen Druck p , Volumen V und der Temperatur t (gemessen in Celsiusgraden) erhält man die Zustandsgleichung

$$p_t V_t = p_o V_o (1 + \gamma t), \quad (1)$$

wobei sich der Druck p_o und das Volumen V_o auf 0°C beziehen und $\gamma = 1/273,15 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ der Spannungskoeffizient ist. Führt man anstelle der Celsius temperatur die absolute Temperatur T (gemessen in Kelvin) ein

$$\frac{T}{\text{K}} = 273,15 + \frac{t}{^\circ\text{C}}, \quad (2)$$

so ergibt sich

$$p_t V_t = \frac{p_o V_o}{273,15 \text{ K}} T = CT. \quad (3)$$

Die Konstante C ist der Stoffmenge des Gases proportional, denn unter konstanten Bedingungen von Druck und Temperatur benötigt die doppelte Stoffmenge eines Gases das doppelte Volumen. Benutzt man als Stoffmengeneinheit des Gases die Anzahl ν der Mole und lässt die Indizes t fallen, erhält man als allgemeine Zustandsgleichung der idealen Gase

$$pV = \nu RT, \quad (4)$$

wobei R die auf das Mol bezogene allgemeine Gaskonstante ist, die sich aus den Normalbedingungen für Druck $p = 760 \text{ Torr} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ und Temperatur $T = 0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$ sowie dem Molvolumen $V_m = 22,41 \text{ l}$ zu

$$R = \frac{pV}{\nu T} = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 22,41 \text{ l}}{1 \text{ mol} \cdot 273,15 \text{ K}} = 8,313 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \quad (5)$$

ergibt. Als ideale Gase bezeichnet man alle Gase, die diese allgemeine Zustandsgleichung (Gl. (4)) streng erfüllen, was um so eher für ein Gas zutrifft, je kleiner der Druck und je höher die

Temperatur ist. Treten Abweichungen von dieser Zustandsgleichung auf, spricht man von realen Gasen (vgl. Versuch T5). Die Diskussion der Zustandsgleichung (Gl. (1)) bezüglich spezieller Zustandsänderungen eines idealen Gases ergibt:

Zustandsänderung	Gleichung	Gesetz	
Isotherm $T = \text{const}$	$pV = \text{const}$	Boyle-Mariotte	(6)
Isochor $V = \text{const}$	$p_t = p_o(1 + \gamma t)$	Gay-Lussac	(7)
Isobar $p = \text{const}$	$V_t = V_o(1 + \gamma t)$		(8)

Den bei konstantem Druck gemessenen Wert von γ nennt man den Volumenausdehnungskoeffizienten, den bei konstantem Volumen gemessenen Wert nennt man den Druck- oder Spannungskoeffizienten des Gases.

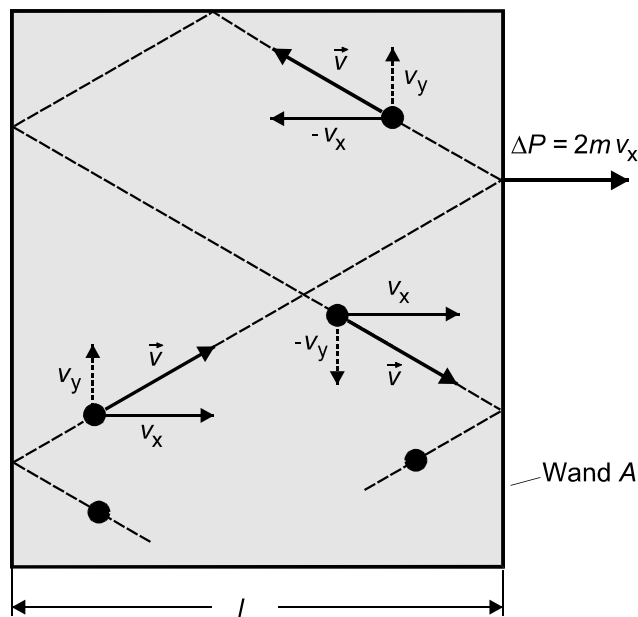


Abb.1 IMPULSÜBERTRAGUNG AUF EINE WAND

3. Molekularkinetische Ableitung der Gasgleichung:

In der kinetischen Gastheorie nimmt man die Gasatome als Kugeln der Masse m mit verschwindendem Eigenvolumen an (Massenpunktmodell), die aufeinander keinerlei Kräfte ausüben, solange sie sich nicht berühren. Stöße der Atome mit der Gefäßwand (oder untereinander) werden als vollkommen elastisch angenommen. Die Atome bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v = \{v_x, v_y, v_z\}$, die zunächst für alle Atome dem Betrag nach als gleich und deren Richtung als isotrop verteilt angenommen wird. Der Druck auf die Wand A (Abb. 1) eines als quaderförmig angenommenen Behälters

mit dem Volumen V kann dann dadurch erklärt werden, dass eine Kraftwirkung entsteht, weil jedes auf das Flächenelement treffende Atom den Impuls

$$\Delta P_x = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$$

auf die Wand A überträgt. Die Zeit zwischen 2 Stößen eines Teilchens mit der Wand A beträgt

$$\Delta t = \frac{2l}{v_x}$$

und die Kraft, die das Teilchen auf die Wand A ausübt, ist

$$F = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x \cdot v_x}{2l} = \frac{mv_x^2}{l}.$$

Alle N Teilchen im Kasten übertragen dann im Mittel die Kraft

$$F = N \frac{\overline{mv_x^2}}{l}. \quad (9)$$

Mit der mittleren quadratischen Geschwindigkeit $\overline{v_x^2}$ wird berücksichtigt, dass im Unterschied zur eingangs angenommenen Vereinfachung die Geschwindigkeit der Teilchen infolge elastischer Stöße untereinander nicht einheitlich ist, sondern gemäß der Maxwell-Boltzmannschen Geschwindigkeitsverteilung alle Werte zwischen Null und Unendlich mit unterschiedlicher

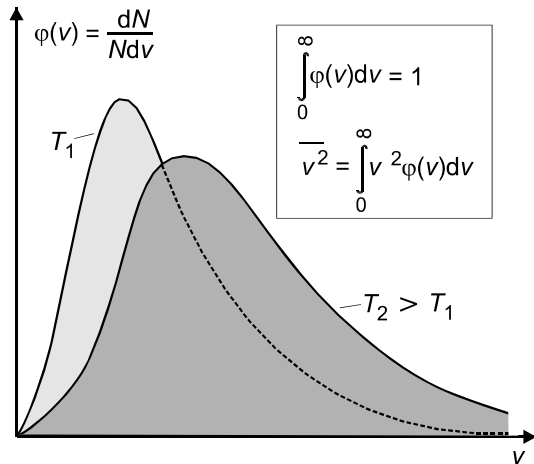


Abb.2 MAXWELL-BOLTZMANNSCHE GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNG

Wahrscheinlichkeit (welche von der Temperatur abhängt) annehmen kann. Abb. 2 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Geschwindigkeit für zwei verschiedene Temperaturen T_1 und T_2 .

Für den Druck folgt aus Gl.(9)

$$p = \frac{F}{A} = \frac{N}{A l} m \overline{v_x^2} = \frac{N}{V} m \overline{v_x^2}$$

mit der Teilchenzahldichte

$$n = \frac{N}{V} \quad (10)$$

ergibt sich

$$p = n m \overline{v_x^2}. \quad (11)$$

Da keine der Richtungen x, y, z bevorzugt ist, die Teilchen also in gleicher Weise gegen alle 6 Wände stoßen, gilt $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ und aus $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ folgt

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} \quad \text{bzw.} \quad \overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}.$$

Ersetzt man in Gl.(11) $\overline{v_x^2}$ durch $1/3 \overline{v^2}$, so folgt für den Druck

$$p = \frac{1}{3} n m \overline{v^2} \quad (12)$$

unabhängig von der Form des Behälters.

Ersetzt man in der Beziehung für den Druck die Atomzahldichte (Gl. (10)), so erhält man

$$pV = \frac{1}{3} N m \overline{v^2}, \quad (13)$$

wobei auf der rechten Seite Größen stehen, die sich bei konstanter Temperatur nicht verändern, d.h., diese Gleichung begründet im molekularkinetischen Modell die Gültigkeit des Boyle-Mariotteschen Gesetzes (Gl. (6)). Vergleicht man die rechten Seiten von Gl. (4) und (13), so ergibt sich

$$\nu R T = \frac{2}{3} N \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \overline{E_{\text{kin}}}, \quad (14)$$

wobei $\overline{E_{\text{kin}}}$ der Mittelwert der kinetischen Energie eines Gasatoms ist. Da ν , R und N unabhängig von der Natur des Gases sind, ist also die absolute Temperatur der kinetischen Energie der Gasatome proportional, womit auch die absolute Temperatur eine molekularkinetische Deutung gefunden hat. Aus Gl. (14) folgt

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} R \frac{\nu}{N} T = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT, \quad (15)$$

wobei N_A die Avogadro'sche Konstante ($6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) und k die Boltzmann-Konstante ist. Da sich jedes Atom im dreidimensionalen Raum in drei unabhängigen Raumrichtungen x, y, z bewegen kann, sagt man, es hat 3 Freiheitsgrade der Translation. Aus Gl.(15) folgt damit für die mittlere kinetische Energie eines Atoms bei der Temperatur T in Übereinstimmung mit dem **Gleichverteilungssatz**

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{2} kT \quad \text{pro Freiheitsgrad.}$$

Im Gleichverteilungssatz wird über das bisher betrachtete einatomige Gas hinausgehend berücksichtigt, dass Moleküle zusätzlich zur Translationsenergie auch Rotations- und Schwingungsenergie aufnehmen können, so dass die Zahl ihrer Freiheitsgrade auch >3 sein kann.

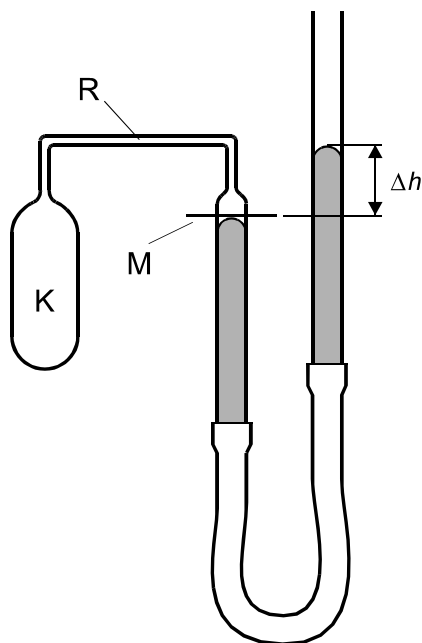


Abb. 3 GASTHERMOMETER

4. Jollysches Gasthermometer: Das Jollysche Gasthermometer ist ein wichtiges Gerät zur Eichung von Thermometern und zur Festlegung der Temperaturskale. In diesem Versuch wird es zur Messung des Spannungskoeffizienten benutzt. Das Gasthermometer besteht aus einem mit Luft gefüllten Glasballon K (Abb. 3), der über eine enge Kapillare R mit einem Quecksilber-Manometer in Verbindung steht. Der rechte Schenkel des Manometers kann mit einer Stellschraube gehoben und gesenkt werden. Durch Einstellen der Quecksilberkuppe im linken Schenkel des Manometers auf die Marke M, welche auf einem kleinen Spiegel markiert ist, kann bei jeder Temperatur ein ganz bestimmtes Volumen eingestellt werden. Der Druck, unter dem die Luft in diesem Volumen steht, ist gleich dem äußeren Luftdruck p_a plus

dem aus der jeweiligen Höhendifferenz Δh der beiden Quecksilberkuppen errechneten Druck. Die Höhendifferenz Δh wird in Millimetern Quecksilbersäule abgelesen und in Pascal (SI-Einheit für Druck) umgerechnet:

$$1 \text{ mm Hg-Säule} \triangleq 133,3 \text{ Pascal.}$$

AUFGABEN

1. Messung der Höhendifferenz Δh am Gasthermometer bei Zimmertemperatur, für Eiswasser und siedendes Wasser, jeweils 10 Messwerte.
2. Berechnung des Spannungskoeffizienten (Gl. (16)).
3. Berechnung der Zimmertemperatur mit Hilfe des in Aufgabe 2 ermittelten Spannungskoeffizienten und Vergleich mit der Temperatur eines Zimmerthermometers.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Für Aufgabe 1 wird die Höhendifferenz Δh zunächst bei Zimmertemperatur gemessen. Dann wird der Glasballon K (Abb. 2) in Eiswasser (Temperatur $t_0 = 0^\circ\text{C}$, Druck p_0) und später in siedendes Wasser (Temperatur t_s (Gl. (17)), Druck p_s) gebracht und es wird jeweils die Höhendifferenz Δh_i bestimmt. Die Höhendifferenz wird für alle drei Messpunkte je zehnmal bestimmt, wobei auch die Einstellung auf die Marke M zehnmal erfolgen muss.

Für Aufgabe 2 berechnet man den Spannungskoeffizienten nach Gl.(7) aus

$$\gamma = \frac{p_s - p_0}{p_0 t_s} \quad (16)$$

mit der genauen Siedetemperatur nach der empirischen Formel

$$t_s / ^\circ\text{C} = 100 + 2,81 \cdot 10^{-4} (p_a / \text{Pa} - 10,13 \cdot 10^4). \quad (17)$$

Die Messunsicherheit schätze man aus den Messfehlern für den Luftdruck p_a und die Höhendifferenzen Δh_i ab.

Für Aufgabe 3, die Bestimmung der Zimmertemperatur t_z , benötigt man eine weitere Druckmessung bei Zimmertemperatur (Druck p_z). Diese Messung führt man zweckmäßigerweise als erste durch. Die Zimmertemperatur t_z ergibt sich dann ebenfalls aus Gl. (7), wobei für γ der in Aufgabe 2 bestimmte Wert einzusetzen ist.

Die Fehler der Ergebnisse in Aufgabe 2 und 3 werden durch die Fehler der Druckmessung bedingt; man lege daher größte Sorgfalt auf die Messungen von Δh und p_a (auf $\pm 0,2$ mm genau messen!). Als systematische Fehlerquellen diskutiere man den Einfluss der Wärmeausdehnung des Glasgefäßes und den Einfluss des Volumens der Kapillare usw., welches nicht auf Messtemperatur gebracht wurde.

ACHTUNG!

Beim Arbeiten mit dem Gasthermometer ist größte Vorsicht geboten.

Man tauche den Glasballon nicht in siedendes Wasser, da dann der Druck so plötzlich ansteigt, dass das Hg aus dem offenen Schenkel des Manometers herausspritzt. Das Wasser muss mit dem Glasballon allmählich bis zum Sieden erwärmt werden. Nach der Druckmessung bei 100°C muss vor dem Entfernen des Siedegefäßes der Quecksilberspiegel an der Marke M (Abb. 2) unbedingt so weit gesenkt werden, dass kein Hg in die Kapillare oder gar in den Glasballon K hinübertreten kann.

FRAGEN

1. Wie ist die thermodynamische Temperaturskala, die der absoluten Temperatur zugrunde liegt, definiert?
2. Nennen Sie andere Temperaturmessverfahren und erläutern Sie die physikalischen Grundlagen dazu!
3. Welchen Einfluss hat der äußere Luftdruck auf die Messergebnisse?

T6 THERMOELEMENT UND NEWTONSCHES ABKÜHLUNGSGESETZ

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Thermospannung, Thermoelement, Thermokraft, Austrittsarbeit, Newtonsches Abkühlungsgesetz.

1. Beschreibung eines Thermoelementes: Ein Thermoelement besteht aus zwei Drähten verschiedenen Materials (z. B. Kupfer-Konstantan, Kupfer-Eisen), die an ihren Enden verlötet sind

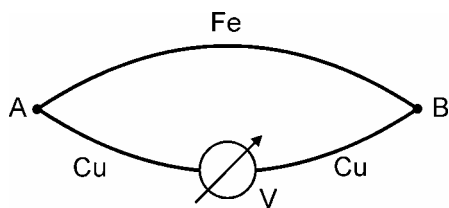


Abb. 1 THERMOELEMENT

(Abb. 1). Befinden sich die beiden Lötstellen A und B auf gleicher Temperatur, zeigt das Messinstrument keinen Ausschlag. Sind die Temperaturen der Lötstellen verschieden, so zeigt das Messinstrument eine Potentialdifferenz an, die so genannte Thermospannung. Dieser Effekt wurde 1822 von Seebeck entdeckt. Der Verlauf dieser Thermospannung in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz der

Lötstellen ist stark von der gewählten Materialkombination abhängig (Abb. 2). Für praktische Zwecke sind vor allem die Thermoelemente Cu-Konstantan, Cr-CrNi, Pt-PtRh und Fe-Konstantan von Bedeutung. Die Thermospannung wird beeinflusst durch die chemische Reinheit und die mechanischen Spannungen im Material. Deshalb ist es notwendig, bei genauen Temperaturmessungen mit Thermoelementen auf chemisch homogenes Ausgangsmaterial und auf Spannungsfreiheit der Drähte zu achten. Im Praktikum wird ein Kupfer-Konstantan-Thermoelement benutzt.

Als Empfindlichkeit (auch Thermokraft oder Seebeck-Koeffizient genannt) eines Thermoelementes definiert man die Größe

$$S = \frac{dU_{Th}}{dT}, \quad (1)$$

worin dU_{Th} die Änderung der Thermospannung bei Änderung der Temperatur einer Lötstelle um dT bedeutet. Der Seebeck-Koeffizient liegt bei Metallen in der Größenordnung von einigen $\mu V/K$ und ist bei Halbleitern etwa um den Faktor 10 größer. Die praktische Bedeutung der Thermoelemente liegt vor allem in ihrem großen Messbereich, der geringen Wärmekapazität und der elektrischen Anzeige.

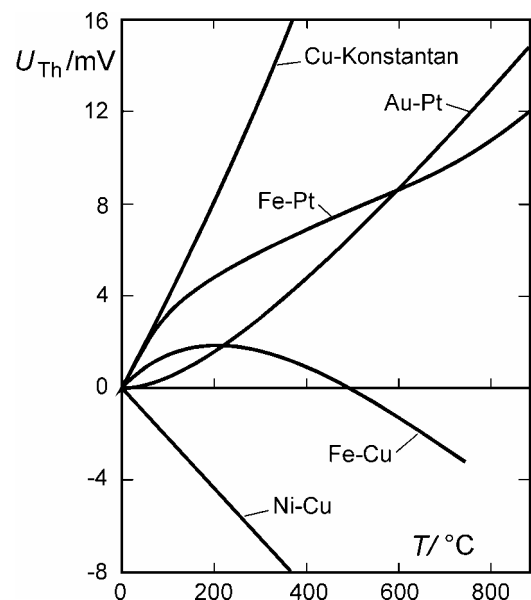


Abb. 2 THERMOSPANNUNGEN
(bezogen auf 0°C)

2. Erklärung der Thermospannung: Die Thermospannung kann mit dem Potentialtopfmodell der Leitungselektronen in Metallen erklärt werden. Danach befinden sich alle Leitungselektronen in definierten Bindungszuständen (Quantenzuständen) zu den Gitteratomen des Metalls. Die möglichen Energien der Leitungselektronen sind über einen Energiebereich zwischen $0 \leq E \leq E_{\max}$ verteilt (Abb. 3). Beim absoluten Nullpunkt (Abb. 3a) ist die maximale Energie der Elektronen

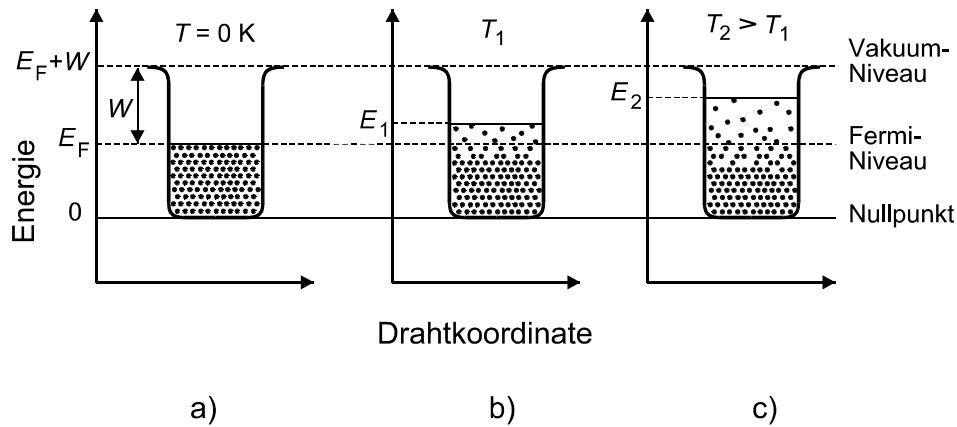


Abb. 3 POTENTIALTOPFMODELL

die Fermienergie E_F , während bei höheren Temperaturen eine Umverteilung der Elektronen in der Nähe der Fermienergie stattfindet (Abb. 3b,c) und die maximale Energie E_1 bzw. E_2 (Abb. 3)

oberhalb der Fermienergie E_F liegt. Ein Teil der Leitungselektronen besitzt Energien oberhalb der Fermienergie, aber weil die Maximalenergien E_1 bzw. E_2 kleiner als die Summe aus E_F und der Ablösearbeit W sind, treten sie nicht aus dem Metall aus. Wird die Energie W in irgendeiner Form den Elektronen zugeführt, können sie aus dem Metall austreten (vgl. Fotoeffekt, Glühelastischer Effekt, Sekundärelektronenemission).

Aus diesem Modell folgt, dass am heißen Ende eines einseitig erhitzten Drahtes Elektronen höherer kinetischer Energie als am kalten Ende des Drahtes vorhanden sind. Diese höherenergetischen Elektronen verteilen sich (diffundieren) über den ganzen Draht, d. h., die Elektronenkonzentration fällt am heißen und steigt am kalten Ende (Abb. 4). Durch diese Ladungsverschiebung entsteht ein elektrisches Feld, das einen Leitungsstrom in entgegengesetzter Richtung zum Diffusionsstrom erzeugt. Im stationären Gleichgewicht sind Diffusions- und Leitungsstrom betragsmäßig gleich, aber entgegengesetzt und damit verschwindet der resultierende Strom. Übrig bleibt eine elektrische Potentialdifferenz, die so genannte **absolute Thermospannung**, durch die ein Leitungsstrom niederenergetischer Elektronen in entgegengesetzter Richtung zum Strom der höherenergetischen Elektronen des heißen Endes fließt.

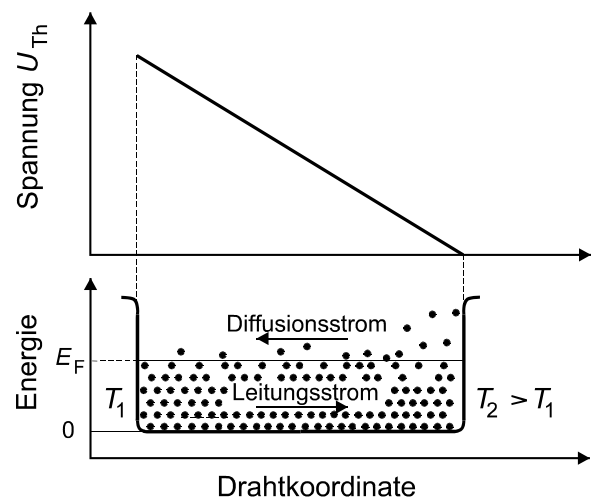


Abb. 4 THERMOSPANNUNG

Wenn man diese absolute Thermospannung an einem Draht 1 (Abb. 5) über die beiden Zuleitungen 2 und 2', welche aus dem gleichen Material wie Draht 1 bestehen, messen will, so beobachtet man keinen Ausschlag. In der Zuleitung 2 laufen die gleichen Anregungs- und Transportprozesse der Leitungselektronen ab wie im Draht 1. Somit bestehen sowohl zwischen P_1 und P_2 als auch zwischen P_1' und P_2 absolute Thermospannungen, aber keine Potentialdifferenz zwischen P_1 und P_1' , und damit schlägt das Instrument nicht aus. Bestehen der Draht 1 und die materialgleichen Zuleitungen 2 und 2' aus verschiedenem Material, dann entsteht ein Thermoelement (Abb. 1). In den verschiedenen Materialien laufen unterschiedliche Anregungs- und Transportprozesse ab, sie bewirken unterschiedliche absolute Thermospannungen und das Messinstrument zeigt die Differenz der absoluten Thermospannungen $U_1 - U_2 = U_{Th}$, die Thermospannung des Thermoelementes an.

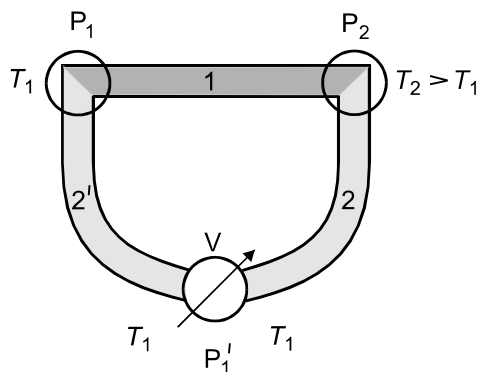


Abb. 5 MESSUNG DER THERMOSPANNUNG

unterschiedliche absolute Thermospannungen und das Messinstrument zeigt die Differenz der absoluten Thermospannungen $U_1 - U_2 = U_{Th}$, die Thermospannung des Thermoelementes an.

3. Newtonsches Abkühlungsgesetz: Wird ein auf die Temperatur T erwärmter Körper durch einen Luftstrom konstanter Temperatur T_u abgekühlt (Abkühlung durch **Konvektionsströmung**), so ist seine Abkühlungsgeschwindigkeit dT/dt proportional der Temperaturdifferenz $T - T_u$:

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_u). \quad (\text{SI-Einheit } [a] = \text{s}^{-1}) \quad (2)$$

Der Abkühlungsfaktor a hängt ab von der Größe der Kühlfläche, der Wärmeübergangszahl zwischen Körper und Luft, der Wärmeleitung und der Wärmekapazität des Körpers und der Strömungsgeschwindigkeit der Kühlluft. Integriert man die Gl. (2) zwischen der Anfangstemperatur T_0 des Körpers (für $t = 0$) und der Temperatur T nach Ablauf der Zeit t , so folgt

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T \frac{dT'}{T' - T_u} &= -a \int_0^t dt' \\ \ln(T - T_u) - \ln(T_0 - T_u) &= -at \\ T - T_u &= (T_0 - T_u) \exp(-at). \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Gleichung beschreibt den zeitlichen Temperaturverlauf eines Körpers, der durch einen Luftstrom konstanter Temperatur T_u gekühlt wird und heißt **Newtonsches Abkühlungsgesetz**. Nach der Halbwertszeit $t_{1/2}$ ist die Temperaturdifferenz $(T_0 - T_u)$ auf den halben Wert abgesunken, und es gilt nach Gl. (3)

$$t_{1/2} = \ln 2 / a. \quad (4)$$

AUFGABEN

1. Aufnahme der Eichkurve $U_{Th} = f(T)$ eines Kupfer-Konstantan-Thermoelementes mit Hilfe der Fixpunkte Siedetemperatur des Wassers und Erstarrungspunkte dreier Metalle.
2. Bestimmung der Thermokraft bei 0 °C, 100 °C und 300 °C.

3. Messung der Abkühlungskurven zweier Messingkörper gleicher Masse, aber unterschiedlicher Oberfläche. Grafische Darstellung $(T - T_u)/(T_0 - T_u) = f(t)$ auf Exponentialpapier.
4. Ermittlung der Abkühlungsfaktoren und der Halbwertszeiten für beide Körper aus der grafischen Darstellung der Aufgabe 3.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Die Thermospannung kann mit einem Digitalvoltmeter gemessen werden. Parallel zum Digitalvoltmeter wird zur Aufnahme der Abkühlungskurven ein y-t-Schreiber zur Messung des zeitlichen Verlaufs der Thermospannung benutzt. Bei diesem Schreiber bewegt sich die Schreibfeder mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung (d.h. $x \sim t$), und der Ausschlag in y-Richtung ist proportional zur Thermospannung.

Eine Lötstelle des Thermoelementes wird während der gesamten Versuchsdauer in Eiswasser (0 °C) auf konstanter Temperatur gehalten. Für Aufgabe 1 wird die zweite Lötstelle zunächst in siedendes Wasser getaucht (1. Eichpunkt). Als weitere Eichpunkte dienen die Erstarrungspunkte von Zink, Blei und Zinn. Diese Metalle befinden sich in Eisengefäßen, die einzeln erhitzt werden können. Zum Eichen stecke man die zweite Lötstelle in die Bohrung der Gefäße und erhitze sie bis über den Schmelzpunkt T_s des entsprechenden Metalls, aus Sicherheitsgründen jedoch nur bis zu den folgenden Grenzwerten der Thermospannung:

Metall	Zn	Pb	Sn
Schmelztemperatur $T_s / ^\circ\text{C}$	419	327	232
Erwärmung bis U_{Th} / mV	22	18	12

Bei Überschreiten der Grenzwerte kann die Probe verzundern und damit unbrauchbar werden. Besonders empfindlich ist die Zinkprobe.

Nach Erreichen der Grenzwerte entferne man den Bunsenbrenner und nehme die Abkühlungskurve $U_{Th} = f(t)$ mit dem y-t-Schreiber auf. Beim Erstarren des Metalls tritt deutlich eine zeitliche Konstanz der Thermospannung auf, dieser Wert wird für die Eichkurve verwendet. Für Aufgabe 2 ermittle man für die angegebenen Temperaturen den Anstieg der Eichkurve. Zur Anstiegsbestimmung bei schwach gekrümmten Kurven kann zur Erhöhung der Genauigkeit ein am Versuchsplatz vorhandenes Spiegellineal benutzt werden. Noch genauere Ergebnisse erhält man mit mathematischen Verfahren (in diesem Fall z.B. Anpassung durch $U_{Th} = aT^2 + bT + c$, Ableitung und Einsetzen der angegebenen Temperaturen). Für Aufgabe 3 wird auf den Brennering ein Messingkörper gelegt und die Lötstelle des Thermoelementes in die Bohrung gesteckt. Der Messingkörper wird auf etwa 320 °C erhitzt und anschließend mit einem Ventilator abgekühlt. Mit dem zweiten Körper wird der Versuch wiederholt.

FRAGEN

1. Warum hat die Abkühlungskurve eines erstarrenden Metalls einen Bereich der zeitlichen Konstanz der Temperatur?
2. Welche Vor- und Nachteile hat ein Thermoelement gegenüber einem üblichen Glasthermometer?
3. Wie beeinflussen die unvermeidlichen Strahlungsverluste der Messingkörper die Abkühlungskurven?
4. Wird ein Kondensator der Kapazität C über einen Widerstand R entladen, zeigt die Spannung U als Funktion der Zeit t einen analogen Verlauf wie die Temperaturdifferenz $T - T_u$ beim Newtonschen Abkühlungsgesetz. Wie lautet die entsprechende Gleichung? Welche thermischen und elektrischen Größen entsprechen einander?

T7 SPEZIFISCHE WÄRMEKAPAZITÄT IDEALER GASE

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Grundbegriffe: Spezifische Wärmekapazität, Zustandsgleichung und Modell des idealen Gases, Gleichverteilungssatz, Freiheitsgrad, 1. Hauptsatz.

1. Wärmekapazität: Führt man einem Körper der Masse m die Wärmemenge dQ zu, dann ist die sich einstellende Temperaturerhöhung dT proportional zur zugeführten Wärmemenge

$$dQ = m c dT, \quad (1)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor c (SI-Einheit: $[c] = \text{J/kgK}$) eine Stoffkonstante ist, die in kleineren Temperaturbereichen praktisch konstant ist und spezifische Wärmekapazität heißt. Durch Multiplikation mit der molaren Masse M (= Masse in Kilogramm pro Mol) erhält man die molare Wärmekapazität

$$C_m = c \cdot M = \frac{M}{m} \cdot \frac{dQ}{dT} \quad (\text{SI-Einheit: } [C_m] = \text{J/mol K}). \quad (2)$$

Gase dehnen sich bei Erwärmung wesentlich stärker aus als Festkörper oder Flüssigkeiten, deshalb ist die für eine Temperaturerhöhung benötigte Wärmemenge von den äußeren Bedingungen abhängig. Man unterscheidet die spezifischen Wärmekapazitäten c_V und c_p bei konstantem Volumen bzw. Druck und die molaren Wärmekapazitäten C_{mV} und C_{mp} . Die Messung der spezifischen Wärmekapazitäten erfolgt durch kalorimetrische Messungen, aber für die Messung bei konstantem Volumen ergeben sich bei Gasen besondere Schwierigkeiten, weil die Wärmekapazität des Kalorimeters größer als die der eingeschlossenen Gasmenge ist. Deshalb wird praktisch die spezifische Wärmekapazität von Gasen nur bei konstantem Druck (c_p) experimentell bestimmt und der Wert bei konstantem Volumen (c_V) aus dem leichter messbaren Adiabatenexponenten

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_{mp}}{C_{mV}} \quad (3)$$

ermittelt.

TABELLE 1 Wärmekapazitäten einiger Gase bei Zimmertemperaturen

Gas	c_p in $10^3 \cdot \text{J/kgK}$	$\kappa = \frac{c_p}{c_V}$	c_V in $10^3 \cdot \text{J/kgK}$	C_{mp} in J/molK	C_{mV} in J/molK	$C_{mp} - C_{mV}$ in J/molK
He	5,23	1,66	3,15	20,93	12,60	8,33
Ar	0,52	1,66	0,313	20,93	12,56	8,37
O ₂	0,91	1,40	0,650	29,21	20,86	8,35
CO	1,05	1,40	0,750	29,31	20,93	8,38
CO ₂	0,85	1,31	0,646	36,93	28,43	8,50
N ₂ O	0,84	1,29	0,649	36,84	28,47	8,37

Aus den Daten für die Wärmekapazitäten einiger Gase (Tabelle 1) lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen, die thermodynamisch und statistisch begründet werden können.

- (1) Für alle Gase ist c_p größer als c_v bzw. C_{mp} größer als C_{mV} .
- (2) Die Differenz der molaren Wärmekapazitäten ist für alle Gase gleich.
- (3) Der Adiabatenexponent ist von der Zahl der Atome im Molekül abhängig.

2. Thermodynamische Deutung: Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist die Summe aus zugeführter Wärmeenergie dQ und der dem System zugeführten Arbeit dW gleich der Änderung der inneren Energie dU .

$$dU = dQ + dW = dQ - p dV. \quad (4)$$

Die innere Energie ist eine thermodynamische Zustandsgröße und bei idealen Gasen allein eine Funktion der absoluten Temperatur. Für die zugeführte Arbeit setzt man $dW = -p dV$, denn eine Verkleinerung des Volumens ($dV < 0$) bedeutet, dass dem System Arbeit zugeführt wird, die positiv zu rechnen ist.

Aus dem ersten Hauptsatz folgt unter Verwendung von Gl. (1) für die Erwärmung eines Gases bei konstantem Volumen

$$dU = dQ_V = mc_V dT \quad (5)$$

und für die Erwärmung bei konstantem Druck

$$dU = dQ_p - p dV = mc_p dT - p dV. \quad (6)$$

Ersetzt man die Volumenarbeit $p dV$ mit Hilfe der Zustandsgleichung der idealen Gase $pV = \nu RT$, wobei ν die Anzahl der Mole und R die allgemeine Gaskonstante ist, dann erhält man aus Gl. (5) und Gl. (6)

$$\begin{aligned} mc_V dT &= mc_p dT - \nu R dT, \\ C_{mV} dT &= C_{mp} dT - \frac{\nu M}{m} R dT, \\ R &= C_{mp} - C_{mV}. \end{aligned} \quad (7)$$

Damit sind die beiden ersten aus Tabelle 1 abgeleiteten Folgerungen thermodynamisch erklärt. Die Wärmekapazität bei konstantem Volumen ist kleiner als bei konstantem Druck, weil bei Erwärmung bei konstantem Volumen nur die innere Energie des Gases wächst, während bei konstantem Druck auch noch eine Volumenarbeit zu verrichten ist.

3. Kinetische Gastheorie: In der kinetischen Gastheorie wird aus den mechanischen Eigenschaften der Atome (Masse, Geschwindigkeit, Energie u. a.) das thermodynamische Verhalten eines Systems abgeleitet. Danach kann der Druck eines Gases auf eine Gefäßwand durch die elastischen Stöße auftreffender Atome erklärt werden, und die absolute Temperatur erweist sich als proportional der mittleren kinetischen Energie aller in ungeordneter Wärmebewegung befindlichen Atome. Dies ist der Inhalt des **Gleichverteilungssatzes**:

Im thermodynamischen Gleichgewicht hat jedes Teilchen für jeden am Energieaustausch beteiligten Freiheitsgrad im zeitlichen Mittel die Energie $kT/2$, wobei k die Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur ist.

Für 1 Mol ergibt sich pro Freiheitsgrad also die mittlere Energie zu

$$W_{\text{kin}} = N_A \cdot \frac{1}{2} kT = \frac{1}{2} RT, \quad (8)$$

wobei N_A die Avogadro-Konstante ($6,02 \cdot 10^{23}$ Teilchen/Mol) ist. Die gesamte innere Energie ergibt sich durch Abzählen der Freiheitsgrade.

Freiheitsgrade: Die Zahl der unabhängigen Zustandsparameter, die zur Beschreibung eines physikalischen Systems benötigt werden, nennt man Freiheitsgrade. In der Mechanik sind dies z. B. die Lagekoordinaten zur Beschreibung eines Systems. In der Thermodynamik bezeichnet man mit Freiheitsgrad die Zahl der Zustandsparameter, zwischen denen die Energie der Wärmebewegung ausgetauscht werden kann. Für einen Massepunkt bzw. eine starre Kugel (Modell eines

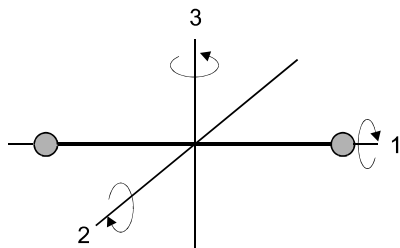


Abb. 1 HANTELMODELL

einatomigen Gases) ergeben sich 3 unabhängige Freiheitsgrade der Translation. Auf Grund dieses Modells nehmen die Freiheitsgrade der Rotation nicht am Energieaustausch teil, weil die Stöße untereinander zentrale Stöße sind, so dass durch sie Rotationen nicht erzeugt oder geändert werden können. Für ein zweiatomiges Molekül stellt man sich die Atome hantelförmig angeordnet vor (Abb. 1), mit festem Abstand. Eine solche Anordnung hat neben den 3 Freiheits-

graden der Translation auch 2 Freiheitsgrade der Rotation, um die Achsen 2 und 3. Die Rotation um die Achse 1 nimmt aus dem gleichen Grunde wie bei der Kugel am Energieaustausch nicht teil. Bei einem dreiatomigen Molekül liegen im Allgemeinen nicht alle Atome auf einer Geraden und deshalb nehmen alle 3 Freiheitsgrade der Rotation am Energieaustausch teil. Das Molekül hat insgesamt 6 Freiheitsgrade (Tabelle 2). Die gleiche Zahl von Freiheitsgraden hat ein Festkörper, denn in ihm führen die Atome infolge der Wärmebewegung Schwingungen um eine Ruhelage aus. Da die Bewegung eines linear schwingenden Körpers (z. B. eine Kugel zwischen zwei befestigten Spiralfedern) durch Angabe seiner Lagekoordinate und Bewegungsrichtung (potentielle und kinetische Energie) bestimmt ist, hat er also 2 Freiheitsgrade. Im Festkörper schwingen die Atome in 3 unabhängigen Schwingungsrichtungen, so dass sich 6 Freiheitsgrade ergeben.

Berechnung der molaren Wärmekapazitäten und des Adiabatenexponenten: Aus dem Gleichverteilungssatz (Gl. (8)) ergibt sich für die innere Energie eines Moles eines idealen Gases mit f Freiheitsgraden

$$U = W_{\text{kin}} = f \frac{1}{2} RT \quad (9)$$

und unter Verwendung der Gl. (2), (5) und (7) weiter

$$C_{mV} = \frac{dQ_V}{dT} = \frac{dU}{dT} = f \frac{R}{2}, \quad (10)$$

$$C_{mp} = \frac{dQ_p}{dT} = R + C_{mV} = (f + 2) \frac{R}{2}. \quad (11)$$

Für den Adiabatenexponenten ergibt sich die Beziehung

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_{mp}}{C_{mV}} = 1 + \frac{2}{f}. \quad (12)$$

Die sich aus den Gl.(10), (11) und (12) ergebenden Zahlenwerte bilden die letzten 3 Spalten in Tabelle 2.

TABELLE 2 Zahl der Freiheitsgrade und Rechenergebnisse nach Gl.(10), (11) und (12)

Atome im Molekül	Zahl der Freiheitsgrade f			Molwärmern		$\kappa = c_p / c_V$ $= C_{mp} / C_{mV}$
	Translat.	Rotat.	gesamt	C_{mV}	C_{mp}	
1	3	-	3	12,47	20,79	1,67
2	3	2	5	20,79	29,10	1,40
3	3	3	6	24,94	33,25	1,33

Damit ist auch die dritte Schlussfolgerung bestätigt. Die Rechenwerte in Tabelle 2 stimmen mit den experimentellen Ergebnissen in Tabelle 1 innerhalb der Fehlergrenzen weitgehend überein.

Die Messung der spezifischen Wärmekapazität als makroskopischer Größe gibt Aufschluss über den atomaren Aufbau der Stoffe.

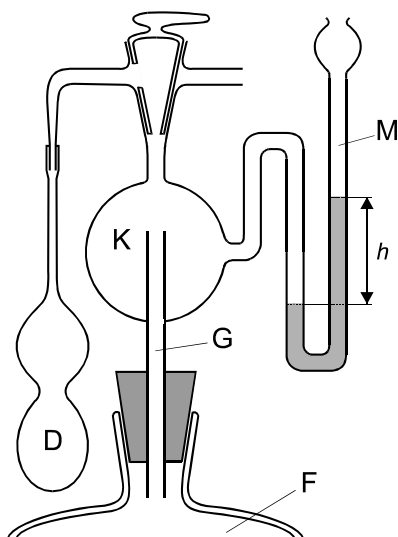


Abb.2 VERSUCHSAUFBAU NACH CLÉMENT-DESORMES

4. κ - Bestimmung nach Clément-Desormes: Die adiabatische Expansion eines Gases wird hierbei zur Messung des Adiabatenexponenten benutzt. In eine etwa 20 Liter fassende Glasflasche F (Abb. 2) ragt ein Glasrohr G, an dem sich ein Zweiwegehahn befindet. Der Zweiwegehahn ist einseitig mit einem Druckball D versehen und an der anderen Seite mit der Außenluft direkt verbunden. Außerdem ist an dem Rohr ein Manometer M angebracht, mit dem man den Druckunterschied zwischen dem Innern der Flasche und dem Außenraum messen kann. Die Kugel K ist angeschmolzen, damit die Manometerflüssigkeit nicht versehentlich in die Glasflasche gelangt. Mit Hilfe des Druckballes erhöht man den Druck in der Glasflasche etwas über den äußeren Luftdruck p_0 (Punkt P_1 in Abb. 3). Anschließend öffnet man den Zweiwegehahn kurzzeitig bis zum adiabatischen Druckausgleich (Punkt P_0 in Abb. 3),

so dass das Manometer keinen Höhenunterschied mehr anzeigt. Nach dem Schließen des Zweigwegehahnes beginnt der Druck in der Glasflasche zu steigen, denn bei der adiabatischen Entspannung kühlte sich das Gas ab und nimmt erst allmählich wieder die Temperatur der Umgebung an. Das Manometer zeigt einen langsamen Druckanstieg an bis zum Druck p_2 (Punkt P_2 in Abb. 3). Die Adiabate zwischen P_1 und P_0 wird durch die Poisson'sche Gleichung

$$pV^\kappa = \text{const.} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{dp}{dV} \right)_{\text{ad}} = -\kappa \frac{pV^\kappa}{V^{\kappa+1}} = -\kappa \frac{p}{V} \quad (13)$$

beschrieben. Für eine Isotherme zwischen P_1 und P_2 erhält man nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz

$$pV = \text{const.} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{dp}{dV} \right)_{\text{iso}} = -\frac{p}{V}. \quad (14)$$

Da zwischen P_2 und P_0 eine isochore Zustandsänderung erfolgt, ist die Volumenänderung in beiden Fällen gleich, und man erhält aus den Gl. (13) und (14)

$$\kappa = \frac{(dp/dV)_{\text{ad}}}{(dp/dV)_{\text{iso}}} = \frac{dp_{\text{ad}}}{dp_{\text{iso}}} = \frac{\Delta p_{\text{ad}}}{\Delta p_{\text{iso}}} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (15)$$

Der Übergang von den Differentialen zu den Differenzen verursacht keinen größeren Fehler, weil die Druckdifferenzen gering sind.

5. κ -Bestimmung aus Schwingungen: Diese Anordnung besteht aus einem 5 l (Volumen V) fas-

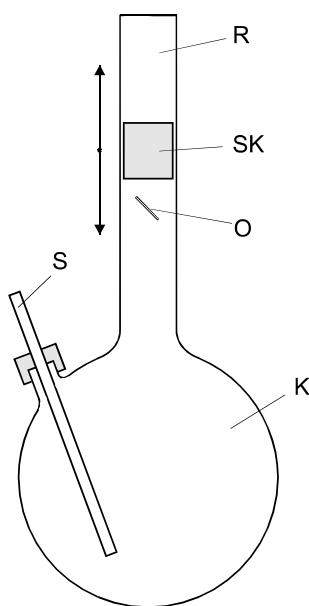


Abb. 4
SCHWINGUNGSMETHODE

senden Glaskolben K (Abb. 4), in den über einen Stutzen S ein schwacher Gasstrom eingeleitet wird und auf dem lotrecht stehend ein Präzisionsglasrohr R aufgesetzt ist. In dem Präzisionsglasrohr, das in halber Höhe eine Öffnung O hat, befindet sich ein Schwingkörper SK aus Kunststoff. Ist der Schwingkörper unterhalb der Öffnung O, so steigt der Gasdruck in dem Kolben langsam an und beschleunigt den Schwingkörper, bis dieser oberhalb der Öffnung O steht. Ist die Öffnung O frei, gleicht sich der Druck aus und der Schwingkörper fällt herab. Der Schwingkörper führt eine ungedämpfte Schwingung um die Öffnung O aus, weil die durch die Reibung entstehenden Verluste durch die Energie des einströmenden Gases kompensiert werden.

Sind m_1 die Masse, r der Radius des Schwingkörpers und p_0 der äußere Luftdruck, dann befindet sich der Schwingkörper im Gleichgewicht, wenn der Druck im Rohr

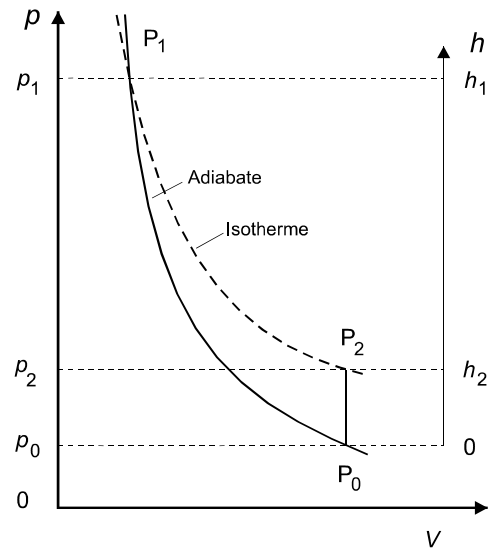


Abb.3 CLÉMENT-DESORMES-VERSUCH

$$p = p_0 + \frac{m_1 g}{\pi r^2} \quad (16)$$

ist. Schwingt der Körper um die Strecke x aus der Gleichgewichtslage heraus, dann ändert sich der Druck p um Δp , und es gilt

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = \pi r^2 \cdot \Delta p.$$

Da der Vorgang adiabatisch erfolgt, erhält man für die Druckänderung (Gl. (13))

$$\Delta p = -\kappa p \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\kappa p \pi r^2}{V} x$$

und die Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\kappa p \pi^2 r^4}{V} x = 0$$

mit der Periodendauer

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4Vm_1}{\kappa p r^4}. \quad (17)$$

Da auch die Gasmasse m_2 in dem Präzisionsglasrohr mitschwingt, muss m_1 durch $m = m_1 + m_2$ ersetzt werden und der Adiabatenexponent ergibt sich aus der Gleichung

$$\kappa = \frac{4Vm}{r^4 p T^2}. \quad (18)$$

AUFGABEN

1. Man bestimme den Adiabatenexponenten von Luft nach der Methode von Clément-Desormes aus 6 Messungen bei Überdruck Gl. (15)) unter Berücksichtigung der Temperaturkorrektur.
2. Man bestimme den Adiabatenexponenten von Luft nach der Schwingungsmethode aus 6 Messungen für jeweils 100 Schwingungen (Gl. (18)).
3. Wie Aufgabe 2, aber für Argon.

VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Für Aufgabe 1 verwende man folgendes Korrekturverfahren: Der Überdruck am Manometer stellt sich auch nach längerem Warten nicht konstant ein, sondern steigt bzw. fällt langsam, was durch Änderungen der Zimmertemperatur verursacht ist. Man beobachte das Einstellen des Überdrucks vor und nach der Expansion etwa 5 min lang (Ablesung jede Minute) und trage den Druckverlauf über der Zeit grafisch auf (Abb. 5). Man er-

kennt dann an dem parallelen Verlauf der Kurventeile AB und DE deutlich die Überlagerung einer kontinuierlichen Temperaturänderung. Den Höhenunterschied $h_1 - h_2$, der sich ohne die-

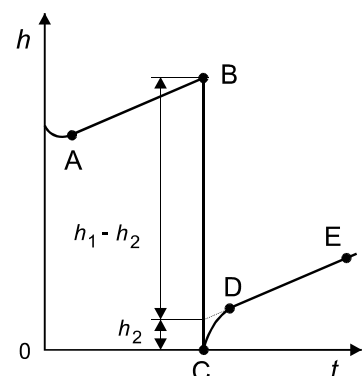


Abb. 5
TEMPERATURKORREKTUR

sen Temperatureffekt eingestellt hätte, erhält man durch rückwärtige Verlängerung von DE bis zum Schnitt mit der den Moment der Expansion kennzeichnenden Senkrechten BC.

Fragen

1. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität c_p !
2. Wogegen wird bei der spezifischen Wärmekapazität c_p Volumenarbeit geleistet?
3. Wie wirkt sich der Masseverlust an Luft für den κ -Wert im Versuch nach Clément-Desormes aus, wenn durch Öffnen des Hahnes Gas ausströmt?
4. Aus welchem Versuch folgert man, dass die innere Energie eines idealen Gases nur eine Funktion der absoluten Temperatur ist?