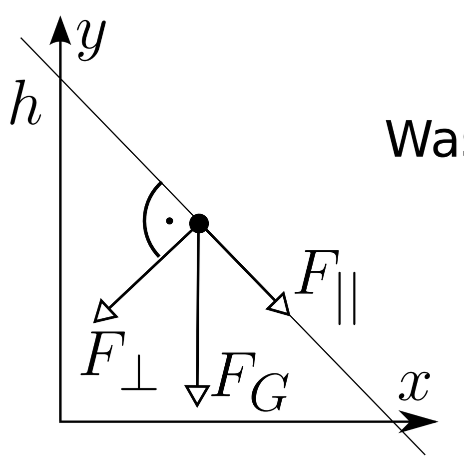
Überblick Analytische Mechanik

Lagrange-Gleichungen 1. Art

Perle auf schiefem Draht mit $y = h - ax$.
Resultierende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_G + (-\mathbf{F}_\perp)$$



Was ist $\mathbf{F}_\perp$?

$\boxed{\mathbf{F}_\perp || \nabla f}$

Hier: $f = y + ax$.

Lagrange - Gleichung 1. Art

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{(0)} + \lambda \, \nabla f$$

Lagrange - Multiplikator Zwangskraft

D'Alembert

Prinzip der virt. Arbeit

$$\sum_i \mathbf{Z}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

Zwangskraft

Mit

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F_i}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{r}_i$$

folgt daraus:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \left(\mathbf{F_i}^{(0)} + \mathbf{Z}_i\right)$$

Und damit:

D'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_i \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F_i}^{(0)}\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

D'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_i \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F_i}^{(0)}\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

$\dot{\mathbf{p}}_i$ (kartesisch)

Impuls-term

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \ldots = \sum_{j=1}^{S} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right] \delta q_j$$

Kraft-term

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i}^{(0)} \cdot \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{S} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i}^{(0)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{\text{Generalisierte Kraft } Q_j} \delta q_j$$

Holonome Zwangsbedingungen

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

unabhängig

Beides in das d'Alembertsche Prinzip eingesetzt:

$$\sum_{j=1}^{S} \left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right) - Q_j\right] \delta q_j = 0$$

Falls Q_j konservativ, dann $Q_j = -\dfrac{\partial V}{\partial q_j}$:

$$\sum_{j=1}^{S} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j}\right] \delta q_j = 0$$

Lagrange - Funktion L

Da alle q_j unabhängig, gilt:

Lagrange - Gleichung 2. Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall \, j$$

Generalisierter Impuls p_j

Hamilton - Mechanik $\dot{q}_j \longrightarrow p_j$

$$dH = \sum_{j=1}^{S} \left(\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j}_{\dot{p}_j dq_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j}_{p_j d\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^{S} \left(\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Neg. Legendre - Transformation

$$H = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L$$

$$dH = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Koeffizientenvergleich:

Kanonische Bewegungsgl.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Poisson - Klammern

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \{f, H\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Da $\{H, H\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = 0$, gilt: $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$.

Was passiert bei $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longrightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$?

Kanonische Transformation I

Wissen, dass vorher galt:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H\right) dt = 0$$

Man kann zeigen, dass für neue Koordinaten gelten muss:

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H = \sum_j P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} + \frac{d\Phi}{dt}$$

Erzeugende Funktion

Erzeugende Funktionen

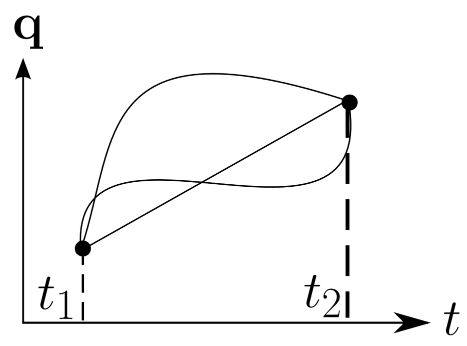
$$\Phi_1 = \Phi_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \qquad \Phi_3 = \Phi_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) =: S \qquad \Phi_4 = \Phi_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$$

Variationsprinzip

D'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_i \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F_i}^{(0)}\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$



$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F_i}^{(0)}\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i\right) dt = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \left(\frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i) - \frac{m_i}{2} \delta(\dot{\mathbf{r}}_i^2) - \underbrace{\mathbf{F_i}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{r}_i}_{-\delta V}\right)\right] dt = 0.$$

$$\Updownarrow$$

falls $\mathbf{F_i}^{(0)}$ konservativ

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta \underbrace{(T - V)}_{L} \, dt = 0.$$

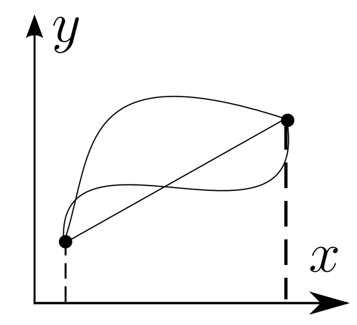
Falls $\delta\mathbf{r}_i(t_1) = \delta\mathbf{r}_i(t_2) = 0$, dann $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$

Darf man herausziehen, weil $\delta t = 0$.

Man findet auch für geometrische Anwendungen zu den Lagrange - Gleichungen 2. Art ähnliche Gleichungen, wenn man als unabhängige Variable nicht t, sondern z.B. x wählt:

Euler - Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$



Hamilton - Jacobi

Ziel: alle Koordinaten zyklisch machen

Man muss mehr über kanon. Transform. wissen:

Kanonische Transformation II

Zum Beispiel:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \sum_j P_j \dot{Q}_j + \tilde{H} - H$$

$$d\Phi_1 = \sum_{j=1}^{S} (p_j dq_j - P_j dQ_j) + (\tilde{H} - H) dt$$

$$d\Phi_1 = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_j} dQ_j\right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dt$$

Analoges findet man mit Legendre - Transformation auch für die anderen Erzeugenden, z.B.:

$$Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} \qquad p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \qquad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Neue Koordinaten auf jeden Fall zyklisch, falls dies gleich 0! Dann:

Hamilton - Jacobi - Gleichung

$$\tilde{H} = H\left(q_1, \ldots, q_S, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_S}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Falls H Integral der Bewegung, dann $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0.$

In diesem Fall: Separationsansatz

$$S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t) = W(\mathbf{q}|\tilde{\mathbf{p}}) - Et$$

$$\Updownarrow$$

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_S}\right) = E$$

Diese Übersicht erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und ersetzt nicht das genaue Nacharbeiten der Vorlesung. Es wurden einige wichtige Dinge ausgelassen.