HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Analytische Mechanik (P1b), SS 2013

Vorlesung: Prof. Dr. I. Sokolov
Übungen: F. Flegel, M. Rückl, Dr. A. Straube
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching → SS 2013 AnalytMech)

Übungsblatt 5: Variationsrechnung

Ausgabe: 27.05.2013 [insg. 18] Abgabe: bis 10.06.2013, 11 Uhr

---

1. Aufgabe

Zeigen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung, dass die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten auf einer Kugelfläche durch die Linie entlang eines Großkreises gegeben ist, d.h. eines Kreises, dessen Zentrum im Kugelmittelpunkt liegt.

Hinweis: Wählen Sie zunächst ein geeignetes Koordinatensystem, in dem die beiden Punkte auf einem Großkreis $\varphi = \text{const}$ liegen. Parametrisieren Sie dann mögliche Wege zwischen den Punkten mit Hilfe von Funktionen $\varphi = \varphi(\vartheta)$ und finden Sie eine geeignete Lagrange-Funktion und stellen Sie die ensprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen auf.

2. Aufgabe

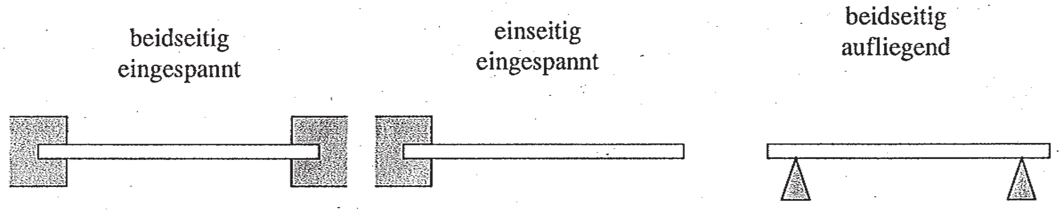
Ein gebogener Balken sei durch die Funktion $y(x,t)$ beschrieben. Die Wirkung eines (fast) waagerechten Balkens, d.h., eines Balkens mit $(\partial y/\partial x) \ll 1$, der nicht auf Zug bzw. Druck eingespannt ist und auf den eine Kraftdichte $f(x,t)$ ausgeübt wird, lautet

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^L dx \left[\frac{\rho}{2}\,\dot{y}^2 - \frac{k}{2}(y'')^2 + f(x,t)\,y\right], \quad \dot{y} := \frac{\partial y}{\partial t},\ y'' := \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,.$$

Hier sind L die Balkenlänge, ρ ist die Massendichte, k ist eine materialabhängige Konstante ($k = EI$, wobei E der Elastizitätmodul und I das Trägheitsmoment sind). Es wird dabei angenommen, dass der Balkenquerschnitt entlang der gesamten Balkenlänge konstant bleibt.

a) Leiten Sie aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung $\delta S = 0$ mit Hilfe der Variationsrechnung die Bewegungsgleichung des Balkens sowie zusätzlich auftretende Randbedingungen her.

b) Benutzen Sie Ihre Ergebnisse aus a) um $y(x)$ für einen statischen Balken im Schwerefeld der Erde ($f(x) = \rho g$) für die folgenden drei Fälle zu berechnen:
   - Beidseitig waagerecht eingespannter Balken: $y(0) = y(L) = 0$, $y'(0) = y'(L) = 0$.
   - Einseitig waagerecht eingespannter Balken: $y(0) = y'(0) = 0$.
   - Beidseitig aufliegender Balken: $y(0) = y(L) = 0$.



[bitte wenden]

3. Aufgabe

Dies ist keine “mechanische” Aufgabe, sondern ist hier als eine klassische Aufgabe (Landau-Theorie für eine Domänenwand) zur Variationsrechnung.

Betrachten Sie das folgende Funktional der Funktion $y(x)$:

$$U = \int_{-L}^{L} dx \left[\frac{\sigma}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{a}{4} y^4 - \frac{b}{2} y^2 \right] ,$$

($\sigma > 0$, $a > 0$, $b > 0$) das minimiert werden muss.

a) Welcher Differentialgleichung muss die Funktion $y(x)$ gehorchen?

b) Was sind die x-unabhängigen Lösungen dieser Gleichung?

c) Betrachten Sie nun $L \to \infty$ und zeigen Sie, dass die Lösung unter Randbedingungen $x \to \pm\infty$: $y \to \pm\sqrt{b/a}$

$$y(x) = \sqrt{\frac{b}{a}} \tanh \left(\sqrt{\frac{b}{2\sigma}} x \right) .$$

ist (Kink).