HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Mathematische Grundlagen, WS 2011/12

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: Dr. A. Straube, S. Martens
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching)

Übungsblatt 4: Exponentialfunktion, trigonometrische und hyperbolische Funktionen, Ableitung

Ausgabe: 04.11.2011 Abgabe: 11.11.2011

---

1. **Aufgabe** (10 Punkte) Identitäten

   Beweisen Sie die folgenden Beziehungen:

   a) $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$,

   b) $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$,

   c) $\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\,\tan(y)}$,

   d) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$,

   e) $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$,

   Hinweis: Nutzen Sie die Exponentialdarstellung der trigonometrischen bzw. der hyperbolischen Funktionen.

2. **Aufgabe** (8 Punkte) Ableitung-I

   Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen

   a) $f(x) = x^x$,
   b) $f(x) = \tan(x)$,
   c) $f(x) = (x^5 + bx^2 - 5)^8$,
   d) $f(x) = \sin[\cos(\sin(x))]$,
   e) $f(x) = \cos\left[4\sin^3(x^6+1) - \frac{1}{1+x^2}\right]$,
   f) $f(x) = \sin(x)\sin(1-x)$,
   g) $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}$,
   h) $f(x) = \frac{x^5+4x^3-1}{x^5-4x^3+1}$.

3. **Aufgabe** (4 Punkte) Ableitung-II

   Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$: i) direkt mittels der Ableitunsregeln und ii) über den Grenzübergang $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

4. **Aufgabe** (4 Punkte) Ableitung-III

   Gesucht ist die erste Ableitung der gegebenen Funktionen. Nutzen Sie hierbei die Regeln zur Berechnung der Ableitung von Umkehrfunktionen.

   a) $y = f(x) = \arctan(x)$,
   b) $y = f(x) = (x)^{1/9}$.

[bitte wenden]

5. **Aufgabe** (fakultativ, wird nicht benotet)

   Der radioaktive Zerfall wird durch die Exponentialfunktion beschrieben

$$N(t) = N_0 \exp(-\alpha t)\,.$$

   N_0 sei die Zahl der Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ und α die stets positive Zerfallsrate. Nach welcher Zeit t ist ein n-tel der anfänglichen Teilchenzahl N_0 zerfallen? Geben Sie die allgemeine Form und die speziellen Ergebnisse fuer $n = 2$ und $n = 4$ an.