HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Mathematische Grundlagen, WS 2011/12

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: Dr. A. Straube, S. Martens
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching)

Übungsblatt 7: Bestimmte Integrale und Deltafunktion

Ausgabe: 25.11.2011 Abgabe: 02.12.2011

---

1. **Aufgabe** (2 Punkte) Bestimmtes Integral

   Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\text{a)} \quad \int_0^{T/4} a\cos(\omega t)dt\,, \quad \text{b)} \quad \int_0^{\infty} x\exp(-x)dx\,,$$

2. **Aufgabe** (6 Punkte)

   (a) Zeigen Sie explizit am folgenden Beispiel

$$F(\alpha) = \int_0^1 \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx\,,$$

   dass Differentiation und Integration vertauschbar sind.
   Hinweis: Vergleichen Sie dazu die Ableitung des bestimmten Integrals $\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}$ mit dem Ergebnis des bestimmten Integrals für $\frac{\partial \arctan(x/\alpha)}{\partial\alpha}$.

   (b) Beweisen Sie die Relation

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + \frac{db(y)}{dy}f(b(y),y) - \frac{da(y)}{dy}f(a(y),y)\,.$$

3. **Aufgabe** (6 Punkte)

   Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\text{(a)} \quad \int \frac{1}{b+\sin(x)}dx\,, \quad \text{für } b>1\,,$$

   mittels der Substitution $x = 2\arctan(z)$, sowie

$$\text{(b)} \quad \int \frac{1}{\sinh(x)}dx$$

   unter Verwendung von $x = 2\,\mathrm{atanh}(z)$.

[bitte wenden]

4. **Aufgabe** (3 Punkte) Deltafunktion

(a) Zeigen Sie, dass

$$\delta_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + (n\,x)^2}$$

eine Darstellung der Deltafunktion ist.

(b) Beweisen Sie ferner die Relation

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,.$$