HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Mathematische Grundlagen, WS 2011/12

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: Dr. A. Straube, S. Martens
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching)

Übungsblatt 9: Vektoranalysis, Koordinatentransformation

Ausgabe: 09.12.2011 Abgabe: 16.12.2011

---

1. **Aufgabe** (6 Punkte) Vektoridentitäten

   Beweisen Sie die folgenden Indentitäten:

   a) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = A^2B^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2\,,$

   b) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\,,$

   c) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,,$

   d) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0\ (\text{Jacobi}-\text{Identität})\,.$

2. **Aufgabe** (8 Punkte) Faltungen des Levi-Civita-Symbols (Epsilon-Tensors)

   Beweisen Sie die folgenden Indentitäten:

   a) $\sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\,,$ b) $\sum_{ij} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}\,,$ c) $\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6\,.$

   Hinweis: Wenden Sie die Beziehung

   $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

   an, die die Zusammenhang zwischen Epsilon-Tensor und Kronecker-Delta liefert.

3. **Aufgabe** (6 Punkte) Transformation zu den Zylinder- und Kugelkoordinaten

   a) Gegeben seien die Komponenten eines Vektors in den Zylinderkoordinaten, $\mathbf{a} = (a_r, a_\varphi, a_z)$. Die Komponenten dieses Vektors im Kartesischen Koordinatensystem, (a_x, a_y, a_z), lassen sich durch (a_r, a_φ, a_z) darstellen. Wie sehen diese Transformation aus? Bestimmen Sie die gleiche Transformation für Kugelkoordinaten, in welchen $\mathbf{a} = (a_r, a_\vartheta, a_\varphi)$.

   b) Bestimmen Sie die Flächen- dS und Volumenelemente dV in diesen Koordinatensystemen und berechnen die Oberfläche S und das Volumen V eines Zylinders und einer Kugel.

   Hinweis: (a) Um die Einheitsvektoren z. B. der zylindrischen Koordinaten zu erhalten, bilden Sie die Jacobi-Matrix $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}$. Die Spalten von J liefern die Komponenten der Einheitsvektoren, nachdem jeder Vektor auf 1 normiert wurde. (b) Die Volumen- und Oberflächenelemente sind $dV = |\det J|\, dr\, d\varphi\, dz$ und $dS = dV/dr$; $V = \int_V dV = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz\, |\det J|$, $S = \int_S dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz\, |\det J|$. Ähnlich für die Kugelkoordinaten.