HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Mathematische Grundlagen, WS 2011/12

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: Dr. A. Straube, S. Martens
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching)

Übungsblatt 10: Vektorfelder

Ausgabe: 16.12.2011 Abgabe: 06.01.2012

---

1. **Aufgabe** (6 Punkte)

   Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und $\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r})$ für die Vektorfelder:

   a) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\omega \times \mathbf{r}), \quad \omega = \omega_0 \mathbf{e}_3, \quad \omega_0 = \text{const}\,,$

   b) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{r}, \quad \alpha = \text{const} < 0\,,$

   c) $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \alpha(x_1 + x_2)\mathbf{e}_1 + \alpha(x_2 - x_1)\mathbf{e}_2, \quad \alpha = \text{const} > 0\,.$

2. **Aufgabe** (4 Punkte)

   Berechnen Sie das Gradientenfeld $\nabla\varphi$ und dessen Quelle $\operatorname{div}\nabla\varphi = \Delta\varphi$ für die Skalarfelder:

   a) $\varphi(\mathbf{r}) = \cos(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})\,,$

   b) $\varphi(\mathbf{r}) = \exp(-\gamma r^2) \quad (\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{const}, \gamma = \text{const})\,.$

3. **Aufgabe** (8 Punkte)

   Ermitteln Sie die Divergenz und Rotation der folgenden Felder:

   a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}\,,$

   b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}\,,$

   c) $\varphi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r})\,,$

   d) $\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})\,,$

   wobei $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ konstante Vektoren sind.

4. **Aufgabe** (3 Punkte) Zentralsymmetrisches Feld

   Berechnen Sie:

   a) $\operatorname{div}\varphi(r)\mathbf{r}\,,$

   b) $\operatorname{rot}\varphi(r)\mathbf{r}\,,$

   c) $(\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla)\,\varphi(r)\mathbf{r} \quad (\boldsymbol{\ell} = \mathbf{const})\,.$

[bitte wenden]

5. **Aufgabe** (2 Punkte)

   Beweisen Sie, dass $\operatorname{rot} \nabla\varphi(\mathbf{r}) = 0$ und $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$.

6. **Aufgabe** (6 Punkte)

   Beweisen Sie, dass für beliebige Skalar- und Vektorfelder $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\varphi + \varphi\operatorname{div}\mathbf{A}\,,\\
&\text{b)} \quad \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi\times\mathbf{A} + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A}\,,\\
&\text{c)} \quad \operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}\,,\\
&\text{d)} \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}\,,\\
&\text{e)} \quad \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{A} = \frac{1}{2}\nabla A^2 - \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\,,\\
&\text{f)} \quad \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

   gelten.

Wir wünschen Ihnen einen guten Rutsch ins neue Jahr!