HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Mathematische Grundlagen, WS 2013/14

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: S. Christ, J. Kromer, B. Sonnenschein, Dr. A. Straube
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching → WS 2013/14 Mathe)

Übungsblatt 10: Vektoranalysis, Koordinatentransformation

Ausgabe: 12.12.2013 Abgabe: Ü 19.12; 20.12 Besprechung: Ü Do 09.01; Ü Fr. 10.01

---

1. Aufgabe (6 Punkte) Faltungen des Levi-Civita-Symbols (Epsilon-Tensors)

Beweisen Sie die folgenden Indentitäten:

$$\text{a)}\ \sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\,, \quad \text{b)}\ \sum_{ij} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}\,, \quad \text{c)}\ \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6\,.$$

Hinweis: Wenden Sie die Beziehung

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

an, die die Zusammenhang zwischen Epsilon-Tensor und Kronecker-Delta liefert.

2. Aufgabe (6 Punkte) Vektoridentitäten

Beweisen Sie die folgenden Indentitäten:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad (\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = A^2B^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2\,,\\
&\text{b)} \quad (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\,,\\
&\text{c)} \quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,,\\
&\text{d)} \quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0\ (\text{Jacobi} - \text{Identität})\,.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe (3 Punkte) Koordinatentransformation

Die Koordinatentransformation ist durch

$$x'_i = \sum_j d_{ij}\, x_j$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Rücktransformation

$$x_i = \sum_j d_{ji}\, x'_j$$

aus der Forderung $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ folgt. Hier sind $\mathbf{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ und $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ die Vektoren im neuen und im alten Koordinatensystemen.