HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Mathematische Grundlagen, WS 2013/14

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: S. Christ, J. Kromer, B. Sonnenschein, Dr. A. Straube
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching → WS 2013/14 Mathe)

Übungsblatt 11: Vektorfelder

Ausgabe: 19.12.2013 Abgabe: keine Besprechung: Ü Do 16.01; Ü Fr. 17.01

---

1. Aufgabe

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und $\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r})$ für die Vektorfelder:

$$\text{a)}\quad \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\omega\times\mathbf{r}),\quad \omega=\omega_0\mathbf{e}_3,\quad \omega_0=\text{const}\,,$$

$$\text{b)}\quad \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{r},\quad \alpha=\text{const}<0\,,$$

$$\text{c)}\quad \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \alpha(x_1+x_2)\mathbf{e}_1+\alpha(x_2-x_1)\mathbf{e}_2,\quad \alpha=\text{const}>0\,.$$

2. Aufgabe

Berechnen Sie das Gradientenfeld $\nabla\varphi$ und dessen Quelle $\operatorname{div}\nabla\varphi=\Delta\varphi$ für die Skalarfelder:

$$\text{a)}\ \varphi(\mathbf{r})=\cos(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}),\quad \text{b)}\ \varphi(\mathbf{r})=\exp(-\gamma r^2)\quad (\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{const},\gamma=\text{const})\,.$$

3. Aufgabe

Ermitteln Sie die Divergenz und Rotation der folgenden Felder:

$$\text{a)}\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}\,,$$

$$\text{b)}\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}\,,$$

$$\text{c)}\ \mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\,,$$

wobei $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ konstante Vektoren sind.

4. Aufgabe

Beweisen Sie, dass $\operatorname{rot}\nabla\varphi(\mathbf{r})=0$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})=0$.

5. Aufgabe

Beweisen Sie, dass für beliebige Skalar- und Vektorfelder $\varphi=\varphi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\text{a)}\quad \operatorname{div}(\varphi\mathbf{A})=\mathbf{A}\cdot\nabla\varphi+\varphi\operatorname{div}\mathbf{A}\,,$$

$$\text{b)}\quad \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A})=\nabla\varphi\times\mathbf{A}+\varphi\operatorname{rot}\mathbf{A}\,,$$

$$\text{c)}\quad \operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}\,,$$

$$\text{d)}\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\nabla\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}\,,$$

gelten.

Wir wünschen Ihnen einen guten Rutsch ins neue Jahr!