HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Mathematische Grundlagen, WS 2013/14

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: S. Christ, J. Kromer, B. Sonnenschein, Dr. A. Straube
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching → WS 2013/14 Mathe)

Übungsblatt 12: Vektorfelder, Integralsätze

Ausgabe: 09.01.2014 Abgabe: Ü Do 16.01; Ü Fr. 17.01

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Für $\varphi(x,y,z) = x^2yz$ und $\mathbf{A} = (3x^2y, yz^2, -xz)$ berechnen Sie $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\varphi\mathbf{A})$ im Punkt $(1,-2,-1)$.

2. Aufgabe (6 Punkte) Zentralsymmetrisches Feld

Berechnen Sie:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \operatorname{div} \varphi(r)\mathbf{r}\,, \\ &\text{b)} \quad \operatorname{rot} \varphi(r)\mathbf{r}\,, \\ &\text{c)} \quad (\mathbf{l}\cdot\nabla)\,\varphi(r)\mathbf{r}\ (\mathbf{l} = \mathbf{const})\,, \end{aligned}$$

wobei $\varphi(r)\mathbf{r}$ eine beliebige Skalarfunktion des Abstandes $r = |\mathbf{r}|$ ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass für beliebige Vektorfelder $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{A} = \frac{1}{2}\nabla A^2 - \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\,, \\ &\text{b)} \quad \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} \end{aligned}$$

gelten.

4. Aufgabe (fakultativ, wird nicht bewertet) Gauß-Ostrogradski-Integralsatz

Berechnen Sie die folgenden Oberflächenintegrale:

$$\text{a)} \oint \mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS\,, \qquad \text{b)} \oint \mathbf{a}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,dS\,, \qquad \text{c)} \oint (\mathbf{n}\times\mathbf{r})\,dS\,.$$

Hier sind $\mathbf{a}$ ein konstanter Vektor und $\mathbf{n}$ die Oberflächennormale. Hinweis: Transformieren Sie erst die Oberflächenintegrale zu den Volumeninterale mit Hilfe vom Gauß-Ostrogradski-Integralsatz.

5. Aufgabe (fakultativ, wird nicht bewertet) Integralsatz von Stokes

Formen Sie mit Hilfe vom Stokesschen Integralsatz das Kurvenintegral (über geschlossene Kurve L) $\oint_L \varphi\, d\mathbf{L}$ ins Flächenintegral (über die Fläche S, welche den Rand L hat) um. Hinweis: Um den Satz von Stokes anwenden zu können, multiplizieren Sie (skalar) das Integral mit einem konstanten Vektor und arbeiten Sie mit einem Vektorfeld.