HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

Mathematische Grundlagen, WS 2013/14

Vorlesung: Prof. Dr. L. Schimansky-Geier
Übungen: S. Christ, J. Kromer, B. Sonnenschein, Dr. A. Straube
URL: http://people.physik.hu-berlin.de/~straube (→ Teaching → WS 2013/14 Mathe)

Übungsblatt 15: Differentialgleichungen

Ausgabe: 30.01.2014 Abgabe: Ü Do 06.02; Ü Fr. 07.02

---

1. **Aufgabe** (8 Punkte) Trennung der Variablen. Anfangsbedingungen.

   Integrieren Sie die folgenden Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}: \quad \frac{dx}{dt} = -\alpha x \ \text{ mit Anfangsbedingung } \ x(0) = x_0\,,\\
&\text{(b)}: \quad \sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0\,,\\
&\text{(c)}: \quad x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0 \ \text{ mit Anfangsbedingung } \ y(0) = 1\,,\\
&\text{(d)}: \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 0\,.
\end{aligned}
$$

2. **Aufgabe** (fakultativ) Integrierender Faktor

   Integrieren Sie die folgende Differentialgleichung:

$$3x^2 y(1+\ln y)\,dx + (x^3 - 2y^2)\,dy = 0\,.$$

   Hinweis: Mit dem integrierenden Faktor y^{-1} lässt sich diese Gleichung auf eine exakte Differentialgleichung (mit dem vollständigen Differential) reduzieren.

3. **Aufgabe** (8 Punkte) Inhomogene Gleichung. Stark gedämpfte getriebene Bewegung

   Nehmen Sie an, dass die Bewegung eines Objektes durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird

$$\gamma\,\frac{dx}{dt} + \kappa\,x = 0\,, \quad \text{mit} \quad \gamma > 0,\ \kappa > 0\,.$$

   Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung, wenn das Teilchen zur Zeit $t = 0$ sich bei $x(0) = 2$ befindet. Wo befindet sich das Objekt für sehr große Zeiten? Nachdem das Objekt seinen asymptotischen Wert ($t \to \infty$) erreicht hat, wird eine äußere Kraft $F(t) = F_0 e^{-a\,t}$, $a > 0$ angeschaltet:

$$\gamma\,\frac{dx}{dt} + \kappa\,x = F_0\,e^{-a\,t}\,, \quad \text{für} \quad t > 0\,.$$

   Bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Was ist die maximal Position $x(t)$, die das Objekt erreicht und an welchem Ort befindet es sich für sehr große Zeiten? Hinweis: Zur Vereinfachung setzen Sie die Zeit, wenn die äußere Kraft angeschaltet wird, auf $t = 0$.