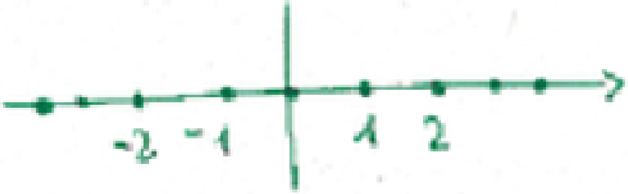
1. Arithmetik und Algebra

1.1 Ganze, reelle und komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}$

Ganze Zahlen $n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{Z}$

Punkte auf der Zahlengeraden

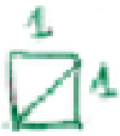


Rationale Zahlen $r = \frac{n}{m}$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ $\mathbb{Q}$
(alle Brüche)

Erfasst noch nicht alle Punkte der Zahlengerade

→ Reelle Zahlen $a, b \dots \in \mathbb{R}$

zu den rationalen Zahlen kommen die irrationalen Zahlen (z.B. $\sqrt{2} = 1.414\dots$



$\pi = 3.1415\dots$

$U = \pi \cdot d$

$e = 2.7182$ log. Eulersche Konstante

⇓

$\mathbb{Q}$ + irrationale Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen füllt die Zahlengerade lückenlos

eindeutig angeordnet: $a < b$, $a = b$, $a > b$ Ordnungsrelationen

überabzählbar ∞ viele: Mächtigkeit des Kontinuums

Jedoch: Jedes Computer-Programm kann nur mit rationalen Zahlen rechnen (Zahlengenauigkeit → Stellen nach dem Punkt)

Praktisch relevant: rationale Zahlen mit $r = \frac{n}{m}$, n, m "klein" gegen n, m groß! (Kommensurabilität)

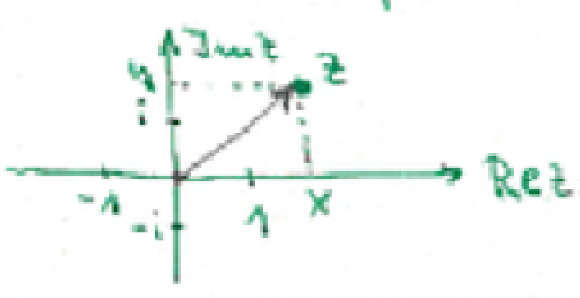
Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit i aus $i^2 = -1$

$(i = \sqrt{-1})$

$$z = x + iy = \underbrace{\underset{\in \mathbb{R}}{\mathrm{Re}\,z} + i \underset{\in \mathbb{R}}{\mathrm{Im}\,z}}_{\mathbb{C}}$$

Darstellung durch 2 Zahlengerade $(\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z)$ ~~und~~ in [illegible] komplexer Ebene



keine Ordnungsrelation! (s. später)

Felder der Mathematik

Mengenlehre

Logik

Geometrie

Zahlentheorie

Analysis $\Longrightarrow$ Funktionen, Diff., Integr.

lineare Algebra $\Longrightarrow$ Vektoren, Tensoren, Matrizen

Funktionentheorie $\Longrightarrow$ alles komplexe

Statistik

Topologie

⋮

1.2 Rechenoperationen

(vorerst reelle Zahlen)

4 Grundrechenarten

Addition $a+b=b+a=c$ Reihenfolge egal kommutativ

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{m=1}^{n} a_m$$

Doppelsumme $\sum\limits_{m,k=1}^{n} a_{m,k}$

Subtraktion (Umkehrung der Addition)

$a-b=c$ aber $b-a=-c$ (Reihenfolge zählt)

Betrag einer reellen Zahl: $|a|=|-a|$ (ohne neg. Vorzeichen)

wichtige Ungleichung: $|a|-|b|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

Dreiecksungl.

Multiplikation

$a\cdot b=b\cdot a=c$ distributiv: $a\cdot(u+v)=a\cdot u+a\cdot v$

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=\prod_{m=1}^{n} a_m$$

Division (Umkehrung der Multiplikation)

$a:b$ besser $\frac{a}{b}=c$ geht nur für $b\neq 0$

Grenzprozess: $\lim\limits_{\Delta\to 0^+}\frac{a}{\Delta}=\begin{cases}+\infty: & a>0\\ -\infty: & a<0\end{cases}$

Erweitern, Kürzen:

$$\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{q \cdot a}{q \cdot b}$$

Add./Sub: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ Hauptnenner

Bsp.: $\frac{y-x}{x+z} + \frac{x-y}{y+z} = (y-x)\left(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{y+z}\right) =$

$$= (y-x)\,\frac{(y+z)-(x+z)}{(x+z)(y+z)} = \frac{(y-x)^2}{(x+z)(y+z)}$$

(Höhere Rechenarten)

<u>Potenzrechnung</u>

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

Gleiche Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Gleicher Exponent: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Potenz einer Potenz: z.B. $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Rekursive Definition: $a^{n+1} = a^n \cdot a$

$n = 0$: $a^1 = a^0 \cdot a \rightarrow a^0 = 1$

Negative Exponenten: $a^n = \frac{a^{n+1}}{a}$, $n = -1$: $a^{-1} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}$

weiter zu $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

damit $\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{(m-n)}$

Umkehrung der Potenzierung bezüglich der Basis:

$b^n = a \Rightarrow b = \sqrt[n]{a}$ (n-te Wurzel aus a)

Es gilt $b = a^{1/n}$, da $(b)^n = \left(a^{1/n}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a$ ✓

Binomische Formel, Binomischer Satz

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (Mischterm fällt weg)

Erweitert auf

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

Potenz der algebraischen Summe aus zwei Summanden

Binomialkoeffizient "n über k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \equiv \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad (0 \le k \le n)$$

jeweils k Faktoren

Fakultät $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots n$

Induktiv: $1! = 1$, $(n+1)! = n!\,(n+1)$

daraus für $n=0$: $1! = 0!\cdot 1 \rightarrow \boxed{0! = 1}$

Addition: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Mit $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$ das Pascalsche Dreieck:

n	Binomialkoeff.
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

$\Rightarrow (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

jeweils Summe der beiden benachbarten oberen Werte

Logarithmenrechnung

Bilde $\sqrt[n]{b^m} = (b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$ rationale Exponenten

Erweiterbar auf reelle Exponenten q:

b^q allgemeines Potenzieren

Umkehrung bez. des Exponenten:

$a = b^q \rightarrow q = \log_b a$

Logarithmus von a zur Basis b

Spezielle Basis-Wahl:

$b = 10$: $a = 10^q \Rightarrow q = \log a$ (dekadischer Log.)

$b = e$: $a = e^q \rightarrow q = \ln a$ (natürlicher Log.)

$b = 2$: $a = 2^q \rightarrow q = \mathrm{ld}\, a$ (dualer Log.)

($b = 1$ unwichtig, da $1^q \equiv 1$)

Rechenregeln:

$b^0 = 1 \Rightarrow 0 = \log_b 1$ $\qquad$ $\log_b 0$ nicht def.!

$\log_b(b^q) = q$ $\qquad$ $b^{\log_b a} = a$

z.B. für $b = e$: $e^{\ln a} = a$

hoch x : $e^{x \ln a} = a^x$

so wird a^x implementiert, da in den Programmier-sprachen $e^x = \mathrm{Exp}(x)$, $\ln x = \mathrm{Ln}(x)$ vorhanden ist!

Rechenregeln: (gleiche Basis b):

$\log(a+b)$ erlaubt kein "auflösen"

$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

denn: $\underbrace{b^{\log_b(a \cdot c)}}_{a \cdot c} = b^{(\log_b a + \log_b c)} = \underbrace{b^{\log_b a} \cdot b^{\log_b c}}_{a \cdot c}$ ✓

$\log(a/c) = \log a - \log c$

$\log a^q = q \cdot \log a$

$\log \sqrt[q]{a} = \log a^{1/q} = \frac{1}{q} \log a$

"Reduktion des Grades der Operation"

Grad 1: $+, -$; Grad 2: $\cdot, :$; Grad 3: Potenz

<u>Zusammenhang zw. verschiedenen Basen:</u>

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Beweis: Setze $\log_b a = q \rightarrow b^q = a$

$\log_c a = \log_c (b^q) = q \log_c b = \log_b a \cdot \log_c b$ ✓

Numerisch wichtig: $c = e$ (nat. Log.)

$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ so allg. Log. implementieren

Insbesondere dekad. Log.

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10} \quad (\ln 10 = 2.302585)$$

1.3 Folgen und Reihen

Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ Folge

mit "Bildungsgesetz"

Wenn (i) $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = C$ Folge konvergiert

(ii) $= \pm \infty$ Folge divergiert

(iii) a_k oszillieren Folge unbestimmt

Bsp.: (i) $a_k = \dfrac{k}{k+q}$ $(C=1)$ konvergent

(ii) $a_k = k^2$ divergiert

(iii) $a_k = (-1)^k$ oszilliert

Reihe (Summen)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Reihe konvergiert, wenn die Folge der S_n konvergiert

Geometrische Reihe: $a_n = q^n$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \neq 1,\ n\text{-endlich}$$

$$= (n+1) \quad \text{für } q = 1$$

Weitere Bsp. für Reihen:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}(n+1)n$$

(Gauss als Schüler)

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$$

Unendliche Reihen $(n \to \infty)$

Geometrische Reihe: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & ; |q|<1 \\ \text{div.} & ; |q| \geq 1 \end{cases}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1+q+q^2+\ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{wenn } |q|<1$$

Notwendig: $a_k \to 0$, aber nicht hinreichend! $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ - unendl. Reihe}\right)$

Hinreichend z.B. $|a_k| < b_k$, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ endlich

Einige spezielle Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty \; ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 \; ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x} \text{ alle } x \; ; \quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beispiele von Potenzreihen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

(später Taylor-Reihen)

Allg. Reihensumme von Funktionen

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

1.4 Algebraische Gleichungen

1 lin. Gl. $\quad ax+b=c \quad : \quad x=\dfrac{c-b}{a}$

2 lin. Gln.
2 Unbekannte

$$a_1x+b_1y=c_1 \quad | \cdot b_2$$
$$a_2x+b_2y=c_2 \quad | \cdot b_1$$

Subtraktion $\quad (a_1b_2\cancel{x}-a_2b_1)x+0=c_1b_2-c_2b_1$

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad ; \quad y=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

als Matrix-Problem:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

im Nenner steht Koeffizienten-Determinante:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

$$x=\frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} \quad ; \quad y=\frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}$$

Kramersche Regel $\quad$ ersetzen eigene Spalte durch Inhomogenität

Erweitern auf N Gln. mit N Unbekannten

-> lin. Gl. system

Zeilenindex

$$\hat{M}\vec{X}=\vec{C} \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{N} M_{jk}X_k=C_j$$

Spaltenindex

Kramer: $\hat{M}^{(j)}$: $M^{(j)}_{lk} = \begin{cases} M_{lk} : k \neq j \\ C_l : k = j \end{cases}$ k-Spalten-index

$$x_j = \frac{\mathrm{Det}(\hat{M}^{(j)})}{\mathrm{Det}(\hat{M})}$$

Quadratische Gl.

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad ; \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$

$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ oder $x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$

$b^2 - 4ac = \begin{cases} > 0 : \text{2 reelle Lsgn.} \\ = 0 : \text{entartet } x_1 = x_2 \\ < 0 : \text{2 kompl. Lsgn. } -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \end{cases}$ $\Rightarrow$ grafischer Verlauf nächste Seite

(Gln. 3. und 4. Grades noch direkt lösbar)

Wurzelgl.

durch Quadrieren lösen; aber Vorzeichen gehen verloren

z.B.: $\sqrt{x+6} = x$

$x + 6 = x^2 \quad ; \quad x^2 - x - 6 = 0$

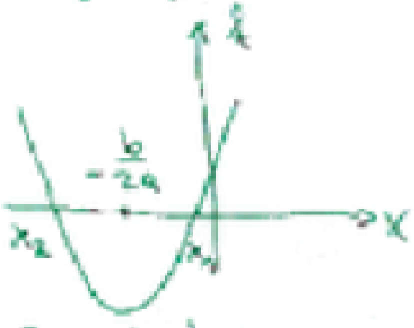
$x_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

$x = 3: \quad \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$ ✓

$x = -2: \quad \sqrt{3-2} = 1 \neq -2$ keine Lösung

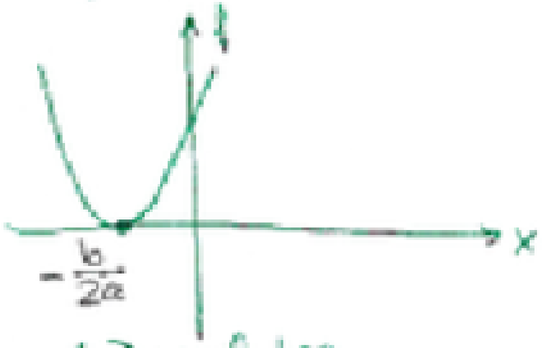
Grafischer Verlauf $f(x) = ax^2+bx+c$

$b^2 > 4ac$



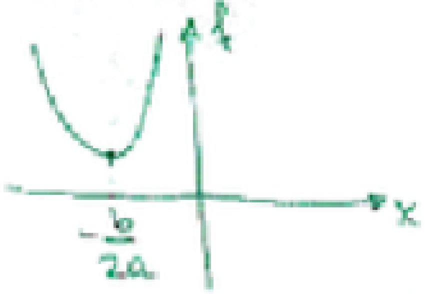
2 reelle Lsgn.

$b^2 = 4ac$



1 Doppel-Lsg.

$b^2 < 4ac$



keine Lsg. (reelle)

1.5 Rechnen mit komplexen Zahlen

$\sqrt{-1} = i$ imaginäre Einheit

$z = x + iy = \mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z$

komplex konjugiert $z^* = x - iy$ (Re bleibt, $\mathrm{Im} \to -\mathrm{Im}$)

$z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$

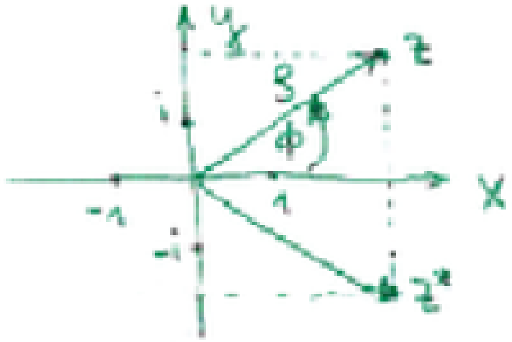
Betragsquadrat

Euler-Darstellung: $z = \varrho e^{i\phi} = \varrho \cos\phi + i \varrho \sin\phi$

$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arg(z)$; $z^* = \varrho e^{-i\phi}$

Eulersche Formel
$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$

Zahlenebene im komplexen



$e^{\pm 2\pi i} = 1$, $e^{\pm i\pi} = -1$

$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$

$\left(\tan\phi = \frac{y}{x}\right)$

Keine Ordnungsrelation!

Rechnen:

Addition $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

$\frac{1}{2}(z + z^*) = \mathrm{Re}\,z$; $\frac{1}{2}(z - z^*) = \mathrm{Im}\,z$

Multiplikation $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

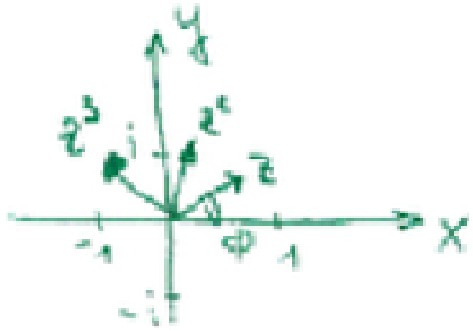
Division $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(-x_1y_2+y_1x_2)}{x_2^2+y_2^2}$

Eleganter in **Exponentialform**

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\phi_1} \cdot \rho_2 e^{i\phi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \, e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

Potenzen $(n \in \mathbb{Z})$ $\quad z^n = \rho^n e^{in\phi}$



Wurzeln $\sqrt[n]{z} = w$ aus $z = w^n$ erschließen

indem $w = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\phi/n}$ lösen auch $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\phi+2\pi k}{n}}$

$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

die Gl., da

$$w^n = \rho\, e^{i(\phi+2\pi k)} = z \underbrace{e^{2i\pi k}}_{=1}$$

n-fache Mehrdeutigkeit! (Gl. n-ten Grades hat n Lsgn.)

Speziell Quadratwurzel:

$$z^{1/2} = \rho^{1/2} e^{i\frac{\phi}{2}} = \rho^{1/2} e^{i\frac{(\phi+2\pi)}{2}} = \rho^{1/2} e^{i\frac{\phi}{2}} \cdot (-1)$$

Konvention: $\sqrt{z} = \sqrt{x+iy}$ hat Realteil > 0

$= u + iv$

Lösen $\quad x+iy = (u+iv)^2 = u^2 - v^2 + 2iuv\,; \quad x = u^2 - v^2\,; \; y = 2uv$

$$x = u^2 - \left(\frac{y}{2u}\right)^2 \quad \Big| \cdot u^2$$

$$u^4 - u^2 x - \frac{y^2}{4} = 0 \; ; \quad u_\pm^2 = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Nur "+" möglich ($u^2 > 0$!)

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)} \,, \quad v = \frac{y}{2u}}$$

2. Lsg. $-u, -v$

komplexer Logarithmus (Basis e)

$$\ln z = \ln(\rho e^{i\phi}) = \ln\rho + \ln(e^{i\phi}) = \ln\rho + i\phi$$

$\ln z$ ist eigentlich mehrdeutig:

$$z = \rho e^{i\phi} \equiv \rho e^{i(\phi + k\cdot 2\pi)} \quad \text{da } e^{2i\pi k} = 1$$

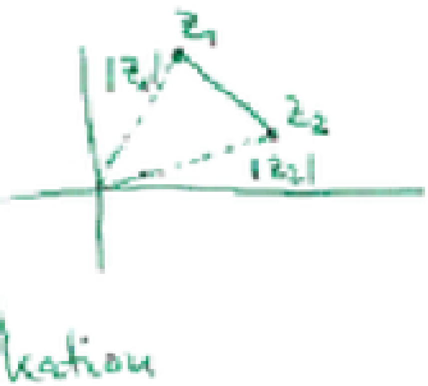
also $\ln z + ik2\pi$ (∞ mehrdeutig)

Konvention: Beschränke $-\pi < \operatorname{Im}(\ln z) \le +\pi$

Dreiecksungl. für komplexe Zahlen

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

geometrisch



Geometrische Deutung versagt bei Multiplikation