2. Funktionen

(nur reelle Funktionen)

<u>Funktion</u> ist

a) eindeutige Zuordnungsvorschrift: Argument $(x) \rightarrow$ Resultat (y)

b) Angabe des Definitionsbereiches
(z.B. $x \in (a,b)$ oder $x \in \mathbb{R}$)
Wertebereich: alle Resultate

$$\boxed{y = f(x)}$$

<u>stetig</u>: keine Lücke $\left(\text{unstetig: } \Theta(x) = \begin{cases} 1: & x > 0 \\ 2: & x = 0 \\ 0: & x < 0 \end{cases} \right)$

<u>stetig-diff.-bar</u>: kein Knick $\wedge$

<u>Singularität</u>: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow x_s$
(evtl. $x_s = \infty$)

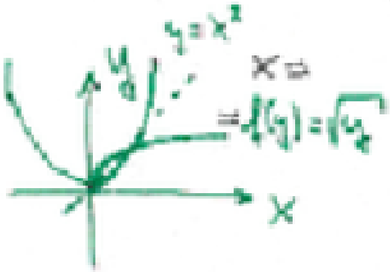
<u>monotone</u> Fkt.: wachsend für $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$

<u>gerade</u> Fkt.: $f(x) = f(-x)$

<u>ungerade</u> Fkt.: $f(x) = -f(-x)$

<u>Umkehrfunktion</u>: (inverse Fkt.)

aus $x \rightarrow y$ nach $y \rightarrow x$
$y = f(x)$ $x = f^{-1}(y)$



Vorsicht: nicht monotones $f(x)$ $\rightarrow$ sin(x), cos(x) ergibt mehrdeutiges $f^{-1}(y)$

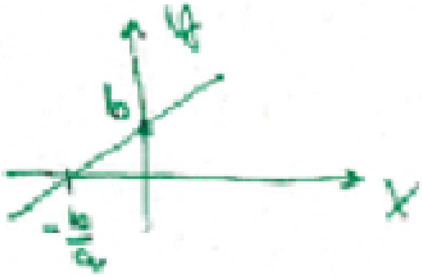
$\Rightarrow$ Beschränkung auf einen Zweig

2.1 Polynome, Potenzfunktionen

Polynom des Grades n:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

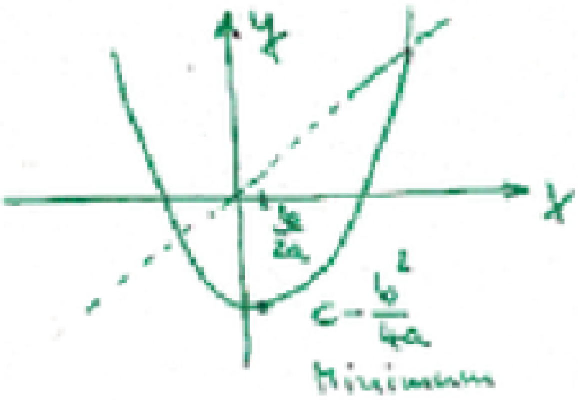
darunter lineare Fkt. $y = b + ax$



Parabel (Polynom 2. Grades)

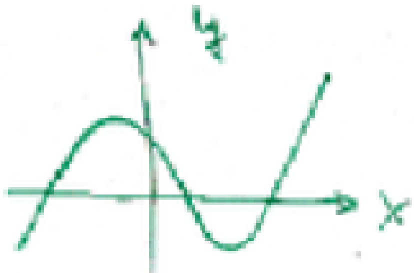
$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

⇒ siehe 1.4



kubisches Polynom

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Übungs-Aufgabe)



Hyperbel

$$y = a + \frac{b}{x - c}$$

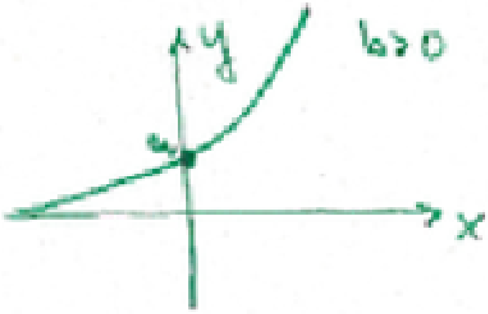
$x_s = c$

Singularität (unstetig)

$x \to \pm\infty : y = a$

2.2 Exponentialfunktion, Logarithmus

Exponential: $y = a\,e^{bx}$



e^x wächst stärker als jede Potenz

Logarithmus: Umkehrfkt. von $x = e^y$: $\boxed{y = \ln x}$

Def. bereich $x > 0$

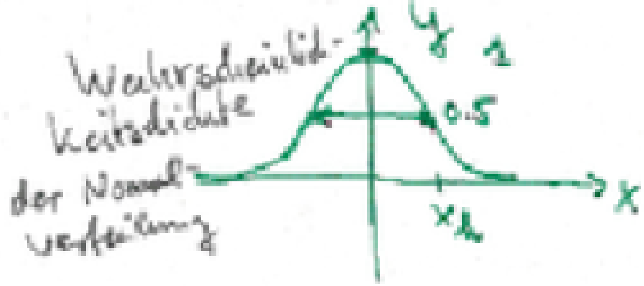
$\ln x$ wächst schwächer als jede Potenz

$\ln 1 = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Gauss-sche Glockenkurve (Zufallsgrößen mit Normalverteilung

$y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = f(x)$

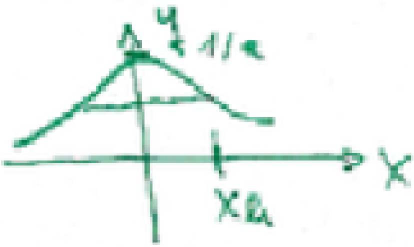


Halbwertsbreite x_h:

$f(x_h) = \frac{1}{2} f(x=0)$

$e^{-\left(\frac{x_h}{a}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\left(\frac{x_h}{a}\right)^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{x_h = a \cdot \sqrt{\ln 2}}$

Lorentz-Kurve

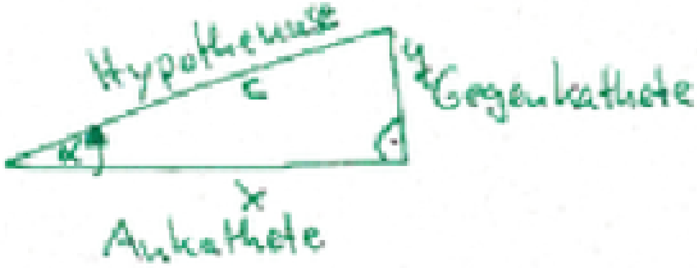


$y = \frac{a}{a^2 + x^2} = f(x)$

$\frac{a}{a^2 + x_h^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{x_h}{a}\right)^2} = \frac{1}{2}$ $\boxed{x_h = a}$

2.3 Trigonometrische Funktionen

Streckenbeziehungen im rechtw. Dreiecken



α - Winkel im Bogenmaß

$\alpha = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$

	Gradmaß	Bogenmaß
	α°	$\alpha = \frac{\pi}{180}\alpha^\circ$
	45°	$\pi/4$
rechterW.	90°	$\pi/2$
gestr. W	180°	π
Vollw.	360°	2π

$\sin\alpha = \frac{y}{c}$; $\cos\alpha = \frac{x}{c}$

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (s. komplexe Zahlen)

$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$

Pythagoras:
$x^2+y^2=c^2$
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

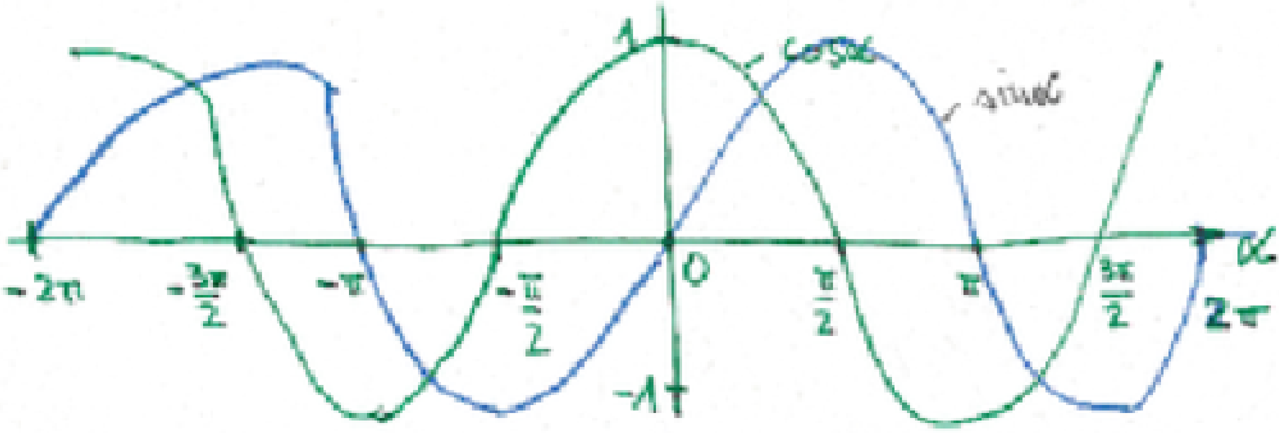
Erweiterter Def. bereich über $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ hinaus

$\Rightarrow$ trig. Fktn. sind bezüglich 2π-Vielfache periodisch

$$f(\alpha + k\cdot 2\pi) = f(\alpha)$$

$k \in \mathbb{Z}$

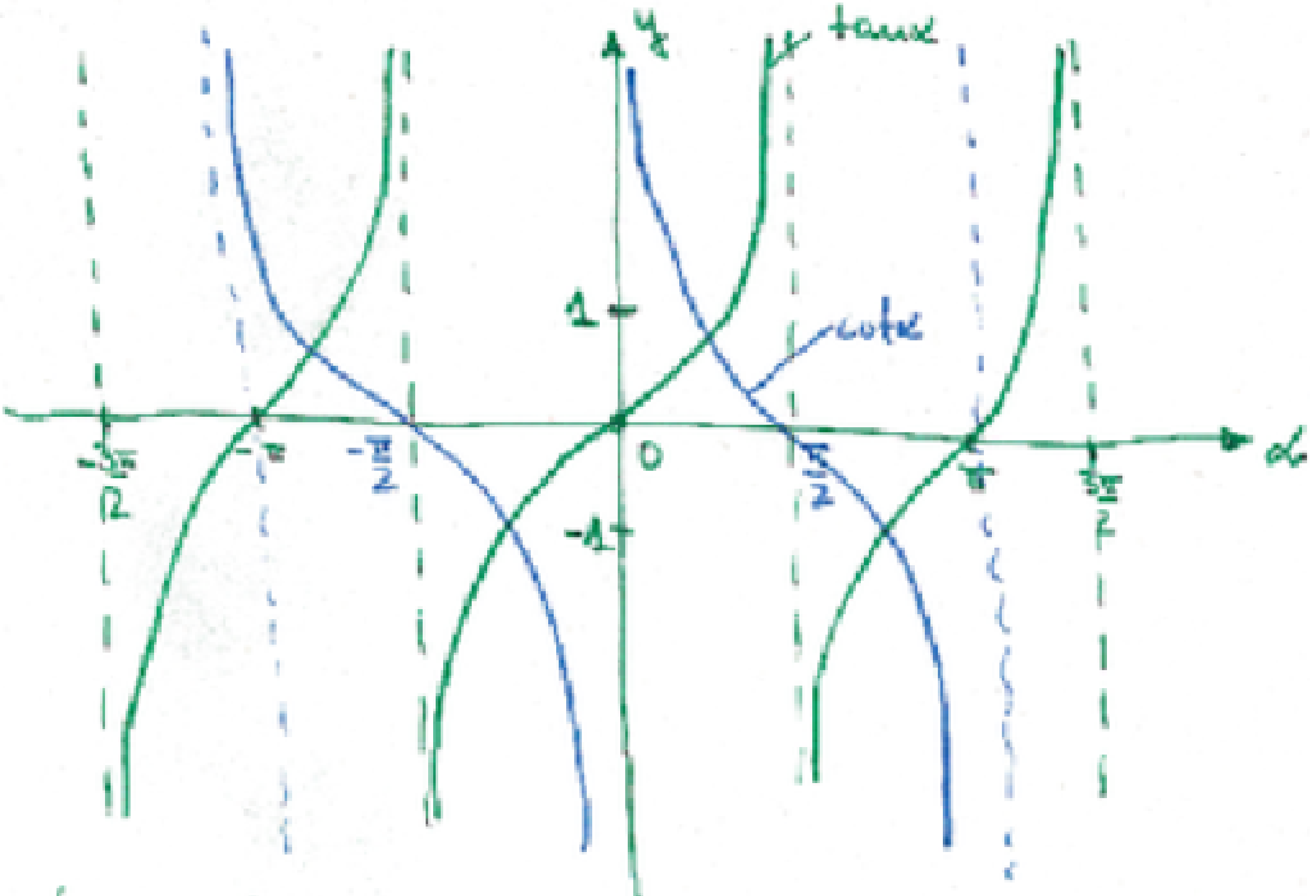
Verlauf



Phasenverschiebung: $\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\alpha)$

$\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$

$$\boxed{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha}$$



Gerade: $\cos\alpha$

Ungerade: $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$

Singulär: $\tan\alpha$ bei $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$

$\cot\alpha$ bei $\alpha = 0, \pi \ldots$

Umkehrfunktionen der trig. Funktionen

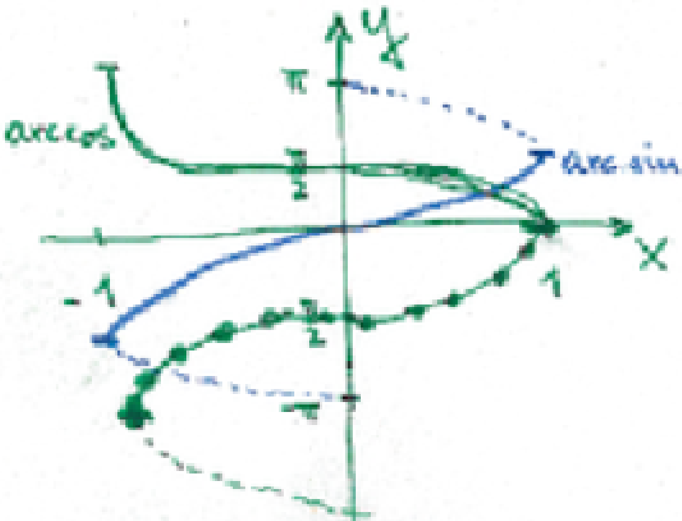
(Arkus-Fktn.)
↓
Bogen

$$\left.\begin{array}{ll} y = \arcsin x & \text{von } x = \sin y \\ y = \arccos x & \text{von } x = \cos y \end{array}\right\} -1 \le x \le 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} y = \arctan x & \text{von } x = \tan y \\ y = \operatorname{arccot} x & \text{von } x = \cot y \end{array}\right\} x \in \mathbb{R}$$

da Original periodisch → Umkehrfkt. so vieldeutig

Beschränkung auf Hauptwert (ein Zweig)



$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$

$\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$; $\arctan(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4}$

Vielfache, Potenzen, Summen elegant über Euler-Def.:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) ; \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

oder $\cos x + i \sin x = e^{ix}$

z.B. $\sin^2 x = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right) =$

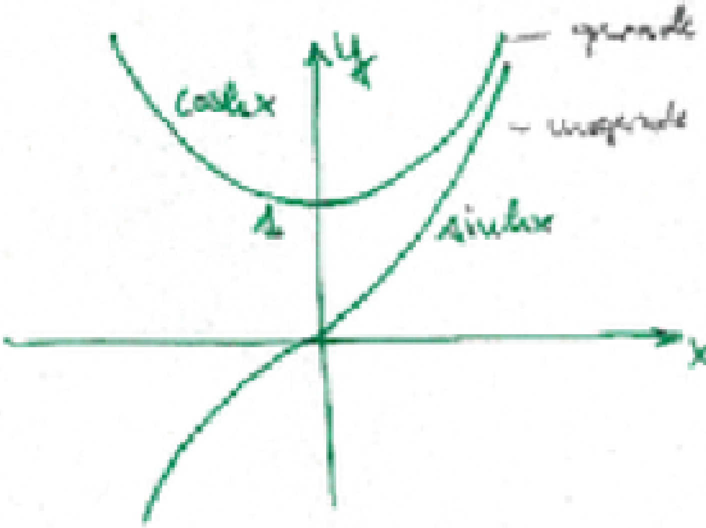
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

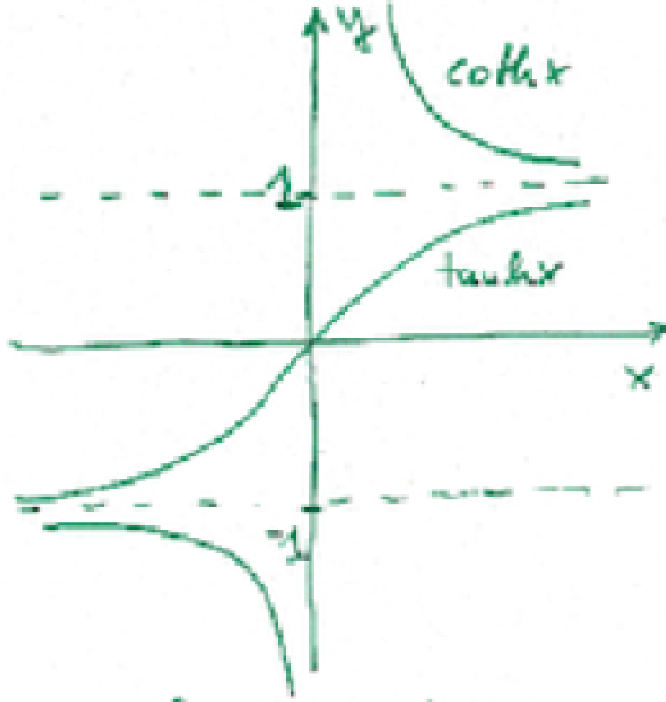
2.4 Hyperbelfunktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$$

$$\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \mathrm{cosech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$





$$\lim_{x \to \pm\infty} \tanh(x) = \pm 1$$

Relationen:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] = 1$$

$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ usw.

Hyperbel/Trigon. verwandt über komplexe Zahlen

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

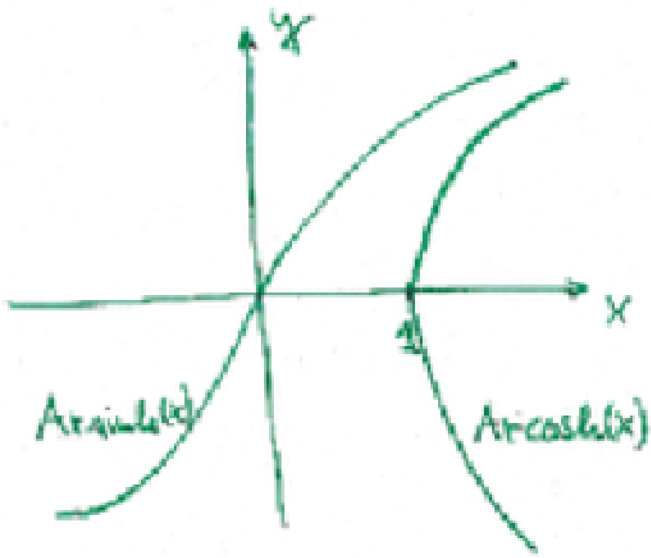
$\cos(x) = \cosh(ix)$ $\qquad$ $\tan(x) = -i\tanh(ix)$

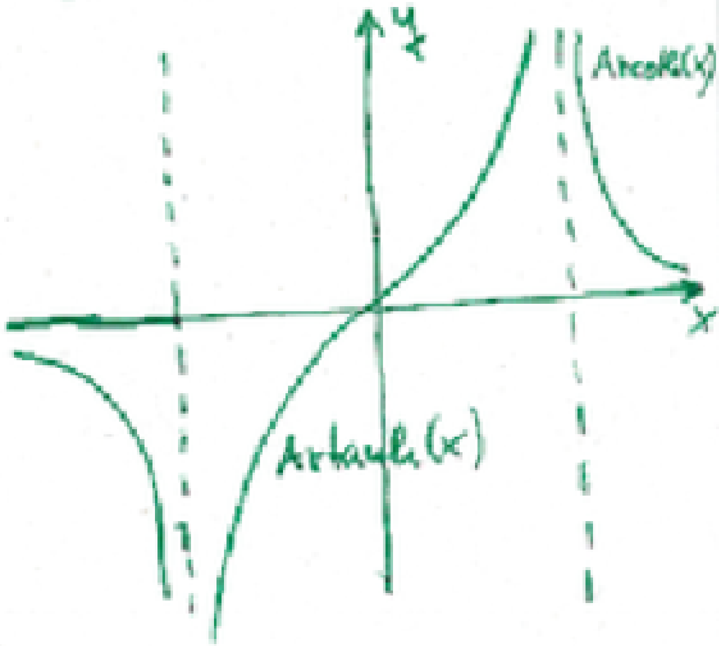
$\sin(x) = -i\sinh(ix)$ $\qquad$ $\cot(x) = +i\coth(ix)$

Umkehrfunktionen der Hyperbelf.

(Area-Funktionen)

$y = \sinh(x) \rightarrow x = \text{Arsinh}(y)$





Direkte Darstellung:

$y = \text{Arsinh}(x) \rightarrow x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$; $e^y \equiv w \; (>0)$:

$w - \dfrac{1}{w} = 2x \,|\cdot w$; $w^2 - 2xw - 1 = 0$

$w_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$ nur + : $w>0$

$e^y = w = x + \sqrt{x^2+1}$ $y = \ln w$

$\text{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\text{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $x \geq 1$

$\text{Artanh}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ $|x| < 1$

$\text{Arcoth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$ $|x| > 1$