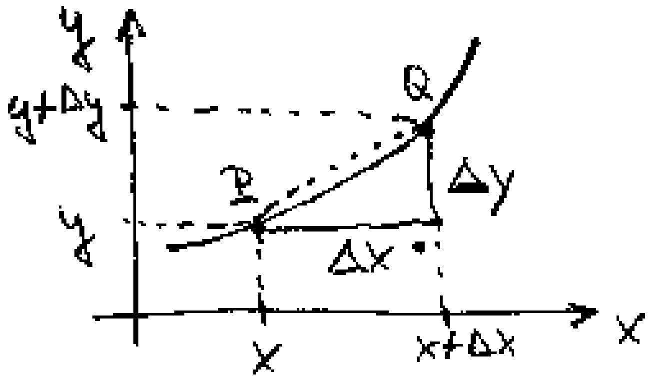
3. Differenzialrechnung

3.1 Grundbegriffe

$y = f(x)$ Zuordnung $x \to y$

Änderung von y mit x $\Rightarrow$ lokaler Anstieg der Kurve

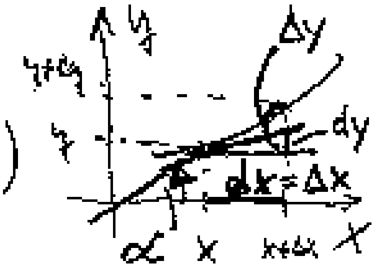
Angenähert durch Differenzenquotienten:



Anstieg d. Sekante PQ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Übergang zur Tangente in P (Anstieg bei x)



Differenzialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \stackrel{!}{=} \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$f'(x) = \tan$ Winkel zw. x-Achse und Tangente an die Kurve $\Rightarrow$ Steigung d. Tangente

Änderung: $\boxed{f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot f'(x) + O((\Delta x)^2)}$

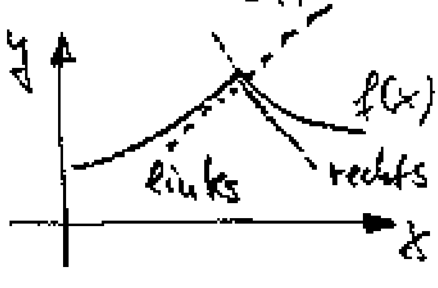
Eindeutiger Grenzfall $\to$ differenzierbar in x $\boxed{df = f'(x)dx}$

Relevanz: a) Kurvendiskussion (Extrema: $f'(x) = 0$)

b) Differenzialgln. d. Physik $v = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ $v = \frac{ds}{dt}$

Wenn Knick; Unstetigkeit:

linksseitige, rechtsseitige Abl.



Mehrere Variable:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f_x(x,y)$$

usw.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f_y(x,y)$$

Höhere Ableitungen: $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$ usw.

Explizit berechnen:

$f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{(x+\Delta)^3 - x^3}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2\Delta + 3x\Delta^2 + \Delta^3 - \cancel{x^3}}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta + \Delta^2\right) = 3x^2$$

allgemeine Potenz: Nach binom. Formel:

$$(x+\Delta)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta + \ldots$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{(x^n + n x^{n-1} \cdot \Delta + \ldots) - x^n}{\Delta} = n x^{n-1}$$

Erweitert auf p reell, $\frac{d(x^p)}{dx} = p x^{p-1}$

Gewisse Funktionen sind über Ableitung definiert:

- $f(x) = e^x$: Die Fkt., die sich selbst zur Ableitung hat (und $f(0)=1$)

  $f'(x) = f(x)$ (eigentlich: Diff.gl.)

Konstruiere Potenzreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad ; \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} \quad \text{(kein } a_0\text{-Term!)}$$

$$f'(x) = f(x): \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k^*=0}^{\infty} a_{k^*+1} (k^*+1) x^{k^*}$$

ausschri

$$f(0) = a_0 = 1 \quad ; \quad \text{Koeff. Vergleich bei } x^k: \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$$

$$a_k = \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Def. d. Exponential-Funktion

$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = e^x \quad ✓$$

$$x=1: \quad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2.718282\ldots$$

$$e^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \text{schwierig.}$$

3.2 Differenziationsregeln

Additiv: $\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=f'(x)+g'(x)$

Produktregel: $\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)g(x+\Delta)-f(x)g(x)}{\Delta}$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\left(f(x)+\Delta f'(x)\right)\left(g(x)+\Delta g'(x)\right)-f(x)g(x)}{\Delta}$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\cancel{f(x)g(x)}+\Delta f'(x)g(x)+\Delta g'(x)f(x)-\cancel{f(x)g(x)}}{\Delta}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Bsp.: $y=x^3\cos x$; $y'=3x^2\cos x-x^3\sin x$

$$\boxed{(f\cdot g)'=f'g+f\cdot g'}$$

Spezialfall: $g(x)=c$: $\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$

2. Ableitung: $(fg)''=(f'g+fg')'=f''g+f'g'+f'g'+fg''$

$$=f''g+2f'g'+fg''$$

Zuerst Kettenregel

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'=f'\frac{1}{g}+f\left(\frac{1}{g}\right)'$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\left(\frac{d}{dg}\frac{1}{g}\right)\frac{dg}{dx}=-\frac{1}{g^2}g'$

$$\Rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}=\frac{f'}{g}-\frac{fg'}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

Bsp.: $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$; $y'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

Kettenregel (mittelbare Funktion)

$$F(x) = f(u(x))$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(u(x+\Delta)) - f(u(x))}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(u(x) + \Delta \cdot u'(x)) - f(u(x))}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\cancel{f(u(x))} + \Delta u'(x) f'(u(x)) - \cancel{f(u(x))}}{\Delta} = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$\boxed{F'(x) = f'(u) \cdot u'(x)} \qquad \boxed{\frac{dF}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}}$$

Bsp.: $y = e^{\sin^2 x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{\sin^2 x})}{d(\sin^2 x)} \cdot \frac{d(\sin^2 x)}{dx} = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x$

Umkehrfunktion:

$y = f(x) \longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$ beide Darstellungen sind äquivalent

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \qquad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = f^{-1\,\prime}(y)$$

$$\boxed{\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}} \qquad (y = f(x)) \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Anwenden auf $y = e^x \leftrightarrow x = \ln y = f^{-1}(y)$

$$\frac{d\ln y}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$y = f(x) = x^2$; $x = f(y) = \sqrt{y} = f^{-1}$

$$\frac{df}{dx} = 2x \; ; \; \frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{d}{dy}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2} y^{-1/2}$$

Ableitung für trigon. Funktionen:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\sin(x+\Delta) - \sin(x)}{\Delta}$$

$$\sin(x+\Delta) = \sin x \cos\Delta + \cos x \sin\Delta$$

Nutze $\lim_{\Delta\to 0} \sin\Delta = \Delta$ (Bogen = Kathede)

$$\cos^2(\Delta) + \sin^2(\Delta) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2(\Delta) = 1 - \Delta^2$$
$$\cos(\Delta) = 1 - \frac{\Delta^2}{2}$$

$$\cos(\Delta) = 1 + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

$$\sin(x+\Delta) \Rightarrow \sin(x)\cdot 1 + \cos(x)\cdot\Delta + \mathcal{O}(\Delta^2)$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\cancel{\sin x} + \cos x\cdot\Delta - \cancel{\sin x}}{\Delta} = \cos x$$

Stimmt das mit Euler-Darstellung?

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{d}{dx}: \quad \left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$e^{ix}\cdot i = \cos'(x) + i\sin'(x)$$

$$\downarrow$$

$$\cos x + i \sin x$$

$$i\cos x - \sin x = \cos'(x) + i\sin'(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Das ist Nachweis der Euler-Darstellung

$$e^{ix}\Big|_{x=0} = 1 \overset{!}{=} \cos(0) + i\sin(0) = 1 \checkmark$$

Logarithmische Ableitung:

im Falle $y>0$ kann man zur Berechnung von y' von d. Fkt. $\ln y(x)$ ausgehen

$$\frac{d(\ln|y|)}{dx} = \frac{1}{y(x)}\, y'$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = y(x)\,\frac{d(\ln y)}{dx}}$$

geeignet für Produkte / Quotienten!

z.B. <u>Produktregel</u> $(u,v>0)$

$$f(x) = \ln(\underbrace{u(x)\cdot v(x)}_{y(x)}) = \ln(u(x)) + \ln(v(x))$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{u\cdot v}\,\frac{d}{dx}(u\cdot v) = \frac{1}{u}u' + \frac{1}{v}v'$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dx}(u\cdot v) = u'v + uv' \checkmark = y(x)\,\frac{d\ln y}{dx}$$

und <u>Quotientenregel</u>

$$f = \ln(u(x)/v(x)) = \ln(u(x)) - \ln(v(x)) \qquad y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{u}{v}}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \checkmark = y\cdot\frac{d(\ln y)}{dx}$$

<u>Ableitung mit Exponenten</u> → erst durchführbar mit logarith. Ableitung.

$$y = (f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{g\ln f}\cdot\frac{d}{dx}\left(g(x)\cdot\ln(f(x))\right) = f^g\left(g'\ln f + g\,\frac{f'}{f}\right)$$

$$= f^g\ln f\, g' + g\, f^{g-1}\cdot f'$$

Anwendung: $y = x^x \to y' = x^x\cdot\ln x\cdot 1 + x\, x^{x-1}\cdot 1 = x^x(\ln x + 1)$

$f(x)=x$

$g(x)=x$

Rückseite

Tabellarische Zusammenfassung

$f(x)$	$f'(x)$	
x^p	px^{p-1}	$p \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	
$\ln x$	$1/x$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \sin x$, $(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	
$\operatorname{Ar}\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\operatorname{Ar}\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\operatorname{Ar}\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$	
$\operatorname{Ar}\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$	

- <u>Ziel:</u> Funktion möglichst gut durch ein Polynom zu approximieren

<u>bisher:</u> Fkt. f in Umgebung des Punktes x_0 durch eine Gerade – die Tangente in x_0 – angenähert

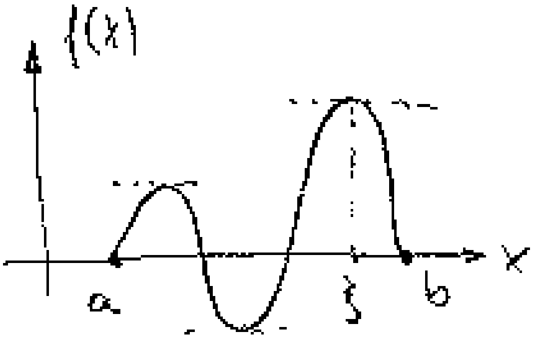
$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Ableitung spielt entscheidende Rolle}} \Delta x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- <u>Vermutung:</u> Approximation in Nachbarschaft von x_0 wird besser → wenn zusätzlich noch Informationen verwandt werden, die durch Kenntnis der höheren Ableitungen von f an der Stelle x_0 zur Verfügung stehen

- um Vermutung zu verifizieren → schrittweise vorgehen

<u>Satz von Rolle:</u> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und diff.bar in (a,b) und sei $f(a) = f(b) = 0$. Dann existiert (mindestens) ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

<u>Beweis:</u> Geometrisch unmittelbar einsichtig.
Funktion muss im Interval (a,b) mindestens ein Extremum haben, ⇒ dort ist $f'(\xi) = 0$, da dort die Tangente an den Graphen von f horizontal verläuft



<u>analytisch</u>: - da f im abgeschlossenen Interval stetig
⇒ nimmt es dort sein Maximum und Minimum an

- liegen beide am Rand ⇒ muss f Nullfunktion ($f \equiv 0$) sein ⇒ dann auch $f' \equiv 0$ ⇒ jeder Punkt $\xi \in (a,b)$ hat die behauptete Eigenschaft

- liegt also Maximum nicht auf dem Rand sondern bei $\eta \in (a,b)$ ⇒ so gilt

$$f(x) \leq f(\eta) \quad \forall x \in [a,b]$$

- da f diff.bar ist, existiert Limes

$$f'(\eta) = \lim_{h \to +0} \underbrace{\frac{f(\eta+h)-f(\eta)}{h}}_{\text{stets nicht-positiv}} = \lim_{h \to -0} \underbrace{\frac{f(\eta+h)-f(\eta)}{h}}_{\text{stets nicht-negativ}}$$

⇒ kann nur gelten $f'(\eta) = 0$ (analog für Minimum)

$\square$

Satz von Rolle → Spezialfall vom <u>Mittelwertsatz der Differentialrechnung</u>

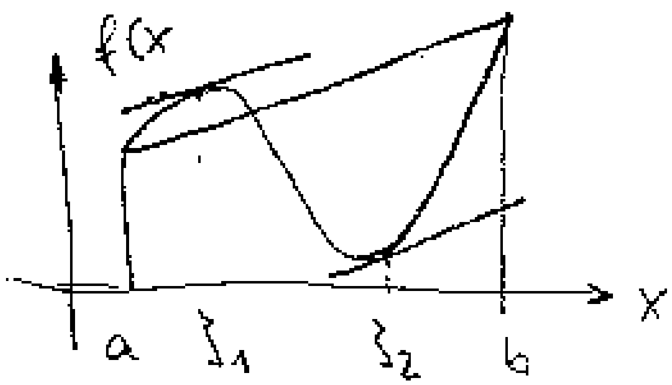
Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und diff.bar in (a,b)

Dann ex. (mindestens) ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Beweis: <u>Geometrisch</u>: Gesucht wird ein Punkt, bei dem der Anstieg der Tangente so groß ist wie der der Sekante zwischen den Randpunkten des Graphen der Fkt.

(für $f(a)=f(b)=0 \Rightarrow$ Satz von Rolle)



Analytisch: Rückführung auf Satz von Rolle

definiert dazu folgende Fkt.

$$F(x) := f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \; ; \quad x \in [a,b]$$

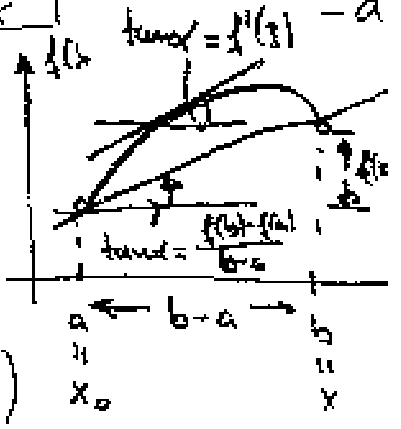
für F gilt $F(a)=F(b)=0$

erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes v. Rolle ⇒

ex. ein $\xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi)=0$, d.h.

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \qquad \square$$

Bemerkung: Setzt man $\boxed{a = x_0 \text{ und } b = x}$



⇒ Mittelwertsatz

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

oder

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$$

wobei ξ ein bestimmter fester, i.A. unbekannter Wert zwischen x und x_0 ist

formal → $f(x)$ streng durch linearen Ausdruck beschrie

jedoch: gesamte restliche x-Abhängigkeit in $f'(\xi)$

↓ hängt von x a

- im folgenden Schritten → versuchen diese Abhängigkeit in höhere Potenzen von $(x-x_0)$ zu verschieben

- existieren höhere Ableitungen ⇒ lässt sich MW-Satz wie folgt formulieren ⇒ <u>Taylorsche Formel:</u>

<u>Satz:</u> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig diff.bar in $[a,b]$ $(n=0,1,2,\dots)$

Dann ex. ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}}{n!}(b-a)^n + R_n^*$$

wobei für das "Restglied" R_n gilt:

$$R_n(\xi; a, b) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Bemerkungen: - für Polynom n-ten Grades $\Rightarrow$ R_n verschwindet

- für bel., genügend oft diff.bare Fkt. f hofft man mit Taylorscher Formel eine brauchbare Approximation von f durch Polynom n-ten Grades zu erzielen, sofern n genügend groß gewählt wird $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Bemerkung -e 1-}}$!

Gefühl für Restglied:

$$f = e^x \; ; \; f' = f'' = \ldots = f^{(n)} = f$$

<u>Taylorsche Formel</u> für $x_0 = 0$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{e^0}{j!} x^j + R_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + R_n$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } x_0 = 0 \text{ und } x$$

wegen Monotonie von e^x $\Rightarrow$ können e^{ξ} abschätzen

(i) ist $x < 0 \Rightarrow \xi \in (x, 0) \Rightarrow e^{\xi} < e^0 = 1$

(ii) $x > 0 \Rightarrow \xi \in (0, x) \Rightarrow e^{\xi} < e^x$

im beiden Fällen ist für $n \to \infty$ für jedes feste x:

$\lim R_n = 0$ da Nenner stärker als Zähler wächst

Bemerkung: Setzt man wieder statt a und b

x_0 und x => Taylorsche Formel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_n \,; \quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

mit einem geeigneten Zwischenwert $\xi = x_0 + \vartheta(x-x_0)$

mit $0 < \vartheta < 1$

Für $n=0$ folgt direkt der Mittelwertsatz

Zurück zu e

in vielen anderen Fällen (zumindest in einem bestimmten x-Intervall $\hat{=}$ Konvergenzradius)

$\Rightarrow$ R_n beliebig klein für $n \to \infty$

$\Rightarrow$ in diesem Limes liefert die Taylorsche Formel eine Potenzreihenentwicklung $\Rightarrow$ Taylor-Reihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

3.3 Die Taylor-Entwicklung

Brook Taylor „1685-1731"

Nochmal Potenzreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$f(x=0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} = a_1 + a_2 2x + a_3 3x^2 + \ldots$$

$$f'(x=0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} = a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x + \ldots$$

$$f''(x=0) = 2a_2 \quad ; \quad f^{(3)}(x=0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3$$

$\rightarrow$ induktiv: $\quad f^{(k)}(0) = k!\, a_k$

Rückwärts: Koeffizienten durch Ableitungen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(0)}{k!}}_{= a_k} x^k$$

Entwicklung um beliebige Stelle $x = x_0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

In x_0 beliebig oft diff.bar

Taylor-Reihe

Dazu gehört Konvergenzbetrachtung:

konvergent (wenn überhaupt) in endlichem Kreis $|x-x_0| \leq r_c(x_0)$

(wenn einzelne $f^{(k)}(x_0)$ divergieren $\rightarrow$ keine konv.)

erinnern uns

$$f(x+\Delta) \approx f(x) + \Delta f'(x) + O(\Delta^2)$$ Anfang der Taylor-Reihe

<u>Beispiele:</u>

$f(x) = e^x$; $x_0 = 0$

$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$; $f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1 \rightarrow f^{(k)}(0) = 1$

$\rightarrow$ Taylor-Reihe ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$; $r_c = \infty$

$f(x) = \sin x$ $\quad (x_0 = 0)$: $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$: $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$: $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$: $f'''(0) = -1$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 : & k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} : & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sin(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} \qquad (k = 2\ell+1)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ebenso: $\cos(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell}$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

Typisch ungerade: alle $a_{2\ell} \equiv 0$

gerade: alle $a_{2\ell+1} \equiv 0$

Auch die geometrische Reihe war eine Taylor-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x_0 = 0) \quad : \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad : \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2\frac{1}{(1-x)^3}(-1) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad : \quad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = -2\cdot 3\frac{1}{(1-x)^4}(-1) = 1\cdot 2\cdot 3\frac{1}{(1-x)^4} \quad : \quad f'''(0) = 2\cdot 3$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad : \quad f^{(k)}(0) = k!$$

Taylor-Reihe: $\frac{1}{1-x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell!}{\ell!} x^\ell = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad ; \quad |x| \leq 1$

$r_c \leq 1$ da sonst wachsende Glieder (muss monoton fallen)

Allgemeine Potenz:

$$f(x) = (1+x)^p \qquad (x_0 = 0) \;:\; f(0) = 1$$

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1} \qquad : f'(0) = p$$

$$f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2} \qquad : f''(0) = p(p-1)$$

$$f^{(k)}(0) = p(p-1)\cdots(p-(k-1))$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{p(p-1)\cdots(p-(k-1))}^{k\text{ Faktoren}}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k$$

z.B.: $p = \frac{1}{2}$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 \ldots$$

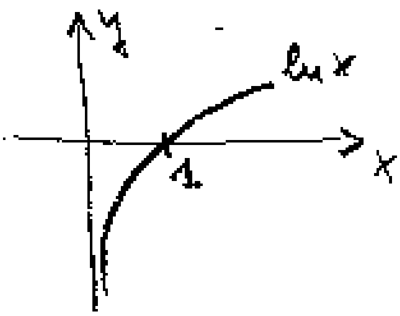
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \ldots$$

und ebenso $p = -\frac{1}{2}$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \frac{-1/2}{1}\cdot x + \frac{-1/2\,(-1/2-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 \ldots$$

Logarithmus: divergent für $x \to 0$, also dort nicht entwickelbar!



Aber um $x_0 = 1$

$f(x) = \ln(1+x)$ (jetzt um $x_0 = 0$)

$f(0) = \ln 1 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \quad (k>0)$$

! 0 $(-1)^{k}$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\underbrace{k!}_{=(k-1)!\,k}} x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots$$

und entsprechend $x \to -x$:

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \ldots\right] \qquad -1 < x \leq 1$$

Konvergenzradius ist $r_c = 1$; d.h. ~~[illegible]~~ obwohl $\ln(1+x)$ auch für $x > 1$ definiert!

Viele Funktionen haben kein einfaches Bildungsgesetz der Taylor-Koeffizienten

z.B. $f(x) = \tan x \quad : \quad f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad : \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2\,\frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad : \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2\left(\frac{\cos x}{\cos^4 x} - 3 \cdot \frac{\sin^2 x}{\ldots}\right) = 2\left(\frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}\right) : f'''(0) = 2$$

$$\tan(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \ldots$$

(Bernoullische Zahlen B_ℓ bei $x^{2\ell-1}$)

Weitere einfache Fälle:

$$\arcsin(x) = x + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 \ldots$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell x^{2\ell+1}}{2\ell+1}$$

$\cosh(x)$ nicht direkt, sondern durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!} + \frac{(-x)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0,2,4}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

entsprechend

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$

Konzept

i) $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(x) + O(\Delta x^2)$

ii) $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(\xi)$

$$\xi \in (x, x+\Delta x)$$

iii) $f(x+\Delta x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\Delta x)^k + R_N$

$$R_N = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)(\Delta x)^{N+1}$$

iv) $f(x+\Delta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\Delta x)^k$

$= \underline{\text{Taylor Reihe.}}$

v) Konvergenzradius

3.4 Grenzwerte von unbestimmten Ausdrücken

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ist unklar!

aufgefasst als Grenzwert: Wenn $u(x_0)=0$, $v(x_0)=0$

so ist $\frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ unbestimmt

$$G = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$$ G kann endlich oder unendlich sein

Verwende Taylor: $u(x) = u(x_0) + (x-x_0)u'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} u''(x_0) \cdots$

$v(x) = v(x_0) + (x-x_0)v'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} v''(x_0) \cdots$

$$G = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)\left[u'(x_0) + \frac{x-x_0}{2} u''(x_0) + \ldots\right]}{(x-x_0)\left[v'(x_0) + \frac{x-x_0}{2} v''(x_0) + \ldots\right]}$$

Wenn $v'(x_0) \neq 0$: $G = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$ (endlich, evt. $=0$)

Wenn auch $v'(x_0)=0$, dann hängt es von $u'(x_0)$ ab.

l'Hospitalsche Regel: $0/0$; $\frac{\infty}{\infty}$

Wenn $u(x_0)=0$, $v(x_0)=0$, dann differenziere so oft, bis mindestens eine der Ableitungen $\neq 0$ ist (sei bei k-ter Abl.)

Dann ist

$$G = \frac{u^{(k)}(x_0)}{v^{(k)}(x_0)} = \begin{cases} 0 \text{ wenn} & u^{(k)}(x_0) = 0, \; v^{(k)}(x_0) \neq 0 \\ \text{endl.} \neq 0 & u^{(k)}(x_0) \neq 0, \; v^{(k)}(x_0) \neq 0 \\ \infty & u^{(k)}(x_0) \neq 0, \; v^{(k)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Beispiel:

$\frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ bei $x=0$: 1. Abl. $\frac{\cos x}{1} \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$ ✓

$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{0}{0}$ bei $x=0$: 1. Abl. $\frac{2 \sin x \cos x}{2x} \Rightarrow \frac{0}{0}$

2. Abl. $\frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} \Rightarrow \frac{2}{2} = \underline{1}$

aber auch möglich:

$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{0}{0}$ bei $x=0$: 1. Abl.: $\frac{\cos x}{2x} \Rightarrow \frac{1}{0} = \infty$

manchmal direktes Ausführen des Grenzwertes

$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$ bei $x=1$: $= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \Rightarrow 2$

l'Hospital: 1. Abl. $\left.\frac{2x}{1}\right|_{x=1} = \frac{2}{1} = 2$ ✓

$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{0}{0}$ bei $x=0$:

direkt $\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \left.\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$

l'Hospital: $\left.\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$ ✓

l' Hospital arbeitet auch bei log. Ausdrücken:

$$\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{bei } x=0$$

direkt entwickelt: $\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots$

$$\ln(\sin(2x)) = \ln\left[x\cdot\left(2-\frac{4}{3}x^2\dots\right)\right] = \ln x + \ln\left[2-\frac{4}{3}x^2\dots\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x + \ln(2-\frac{4}{3}x^2)}{\ln x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\ln 2}{\underbrace{\ln x}_{\infty}}\right) = 1$$

l' Hospital: 1. Abl.: $\frac{\frac{1}{\sin(2x)}\cos(2x)\cdot 2}{\frac{1}{x}} = \frac{2x\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2x}{\tan(2x)} \Rightarrow 1$

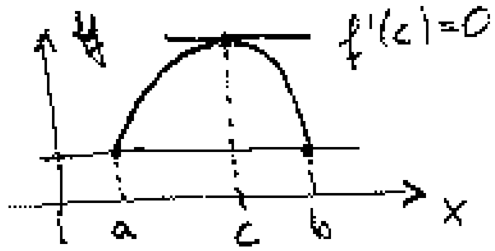
Bsp.: $\frac{\infty}{\infty}$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

3.5 Kurvendiskussion

unten Hauptsätze der Diff.rechnung (Satz von Rolle, MW-Satz)

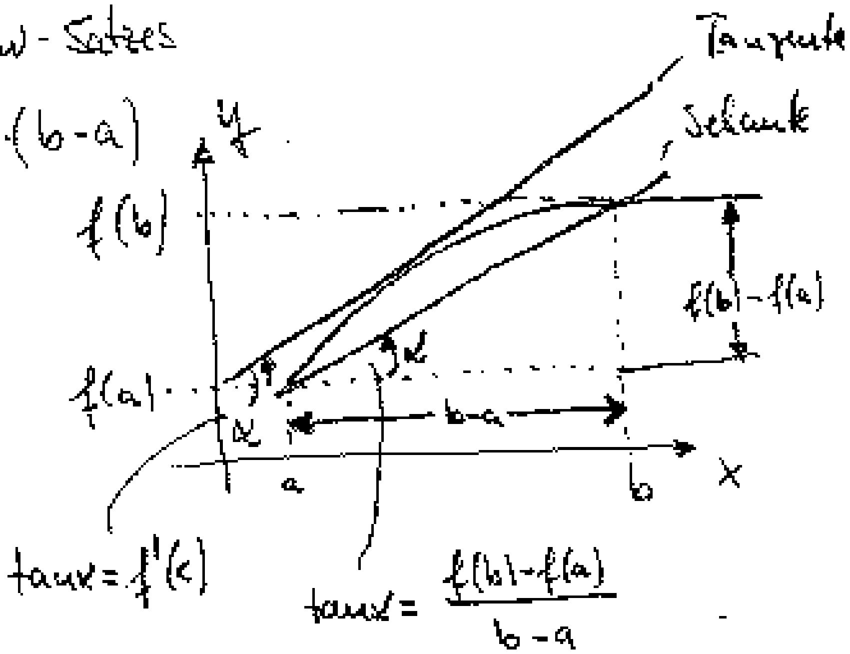
- Satz von Rolle: $[a,b]$ $f \to$ stetig ; und in (a,b) diff.bar und nimmt an Randpunkten des Intervalls gleiche Werte an
  $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists$ Stelle $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$

$\Rightarrow$ garantiert, Existenz mindestens einer Stelle, an der die Ableitung gleich Null wird



geometrische Deutung des MW-Satzes

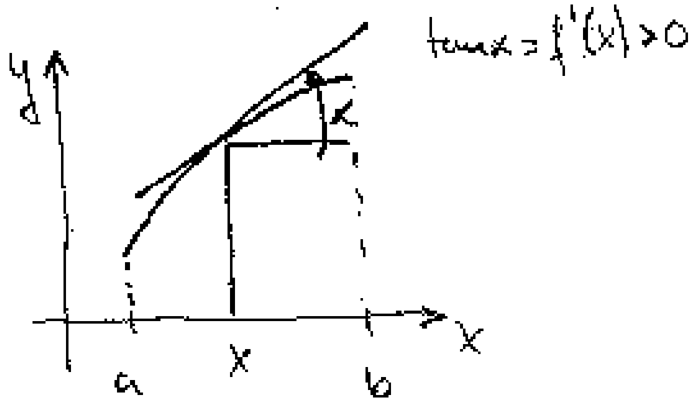
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

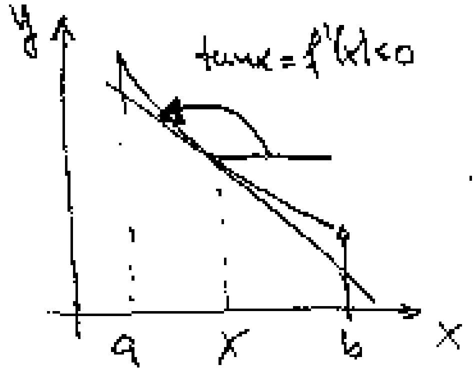


1. Schlussfolgerung: Wenn $f'(x) \equiv 0$ für $x \in (a,b) \Rightarrow$ Funktion $f(x)$ in (a,b) konstant und umgekehrt

2. Schlussfolgerung: Wenn $f'(x) > 0$ für $x \in (a,b) \Rightarrow$ Fkt. in (a,b) monoton wachsend

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ monoton fallend

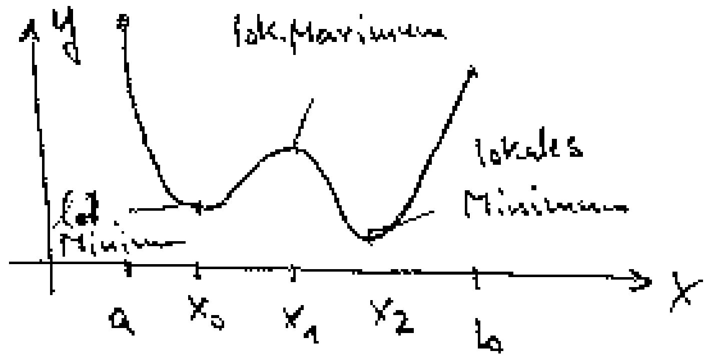




Extremwerte (Maxima und Minima)

- Extremwert an Stelle x_0 → <u>lokaler</u> Begriff
  betrifft eine genügend kleine Umgebung der Stelle x_0
  (nicht zu verwechseln mit dem Begriff größter oder kleinster Wert der Fkt → globaler Begriff)

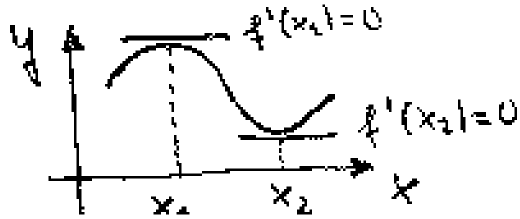
<u>Bsp.:</u>



$f(a)$ größter Wert d. Fkt.
$f(x_2)$ kleinster Wert d. Fkt.

<u>Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extrem</u>

<u>Satz (Fermat):</u> Ex. $f'(x_0)$ und besitzt die Fkt. $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Extremwert, dann ist $f'(x_0) = 0$.



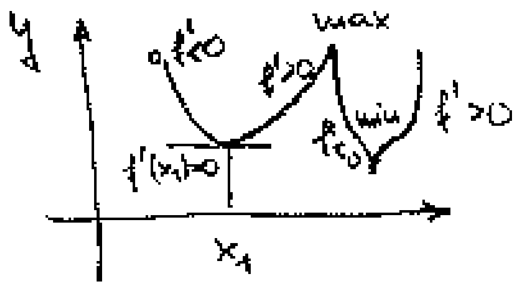
Satz von Fermat ⇒ besagt, dass die notwendige Bedingung dafür, dass die an der Stelle x_0 diff.bare Fkt. $f(x)$ einen Extremwert hat, $f'(x_0)=0$ ist

- ist aber nicht hinreichend, wie Verlauf von $y=x^3$ zeigt um $x_0=0$

- geben jetzt hinreichende Bedingungen f. Existenz von Extremwerten an

1.) Wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig ist und in der Umgebung dieser Stelle diff.bar ist, wobei $f'(x)>0$ für $x<x_0$ und $f'(x)>0$ für $x>x_0$ ist, dann hat die Fkt. an dieser Stelle ein Maximum (analog Minimum).

Bem.: Ableitung braucht an der Stelle x_0 nicht zu existieren; wenn $f'(x)$ ex. ⇒ dann ist sie gleich Null



Bsp.: Die Pole einer Batterie mit der elektromotorischen Kraft E und dem Innenwiderstand ϱ sind mit einem Leiter mit dem Widerstand R verbunden. Für welche Werte von R wird die Leistung in diesem Leiter maximal?

Leistung = Stromstärke × Spannung

$$P = E^2\frac{R}{(\varrho+R)^2}\ ,\ \text{also}\ \frac{dP}{dR}=\frac{E^2}{(\varrho+R)^3}(\varrho^2-R^2)$$

da $\frac{dP}{dR} > 0$ für $R < \varrho$, $\frac{dP}{dR} = 0$ für $R = \varrho$

und $\frac{dP}{dR} < 0$ für $R > \varrho$ ist $\Rightarrow$ Leistung erreicht Max. für $\underline{\underline{R = \varrho}}$

2.) Wenn die Fkt $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x_0 eine stetige 2. Ableitung besitzt und darüber hinaus $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ ist, dann hat die Fkt. an der Stelle x_0 ein <u>Maximum</u>, wenn $f''(x_0) < 0$ ein Minimum, wenn $f''(x_0) > 0$

<u>Bsp.:</u> Welches Rechteck mit dem Umfang $2a$ hat den größten Flächeninhalt?

Länge einer Seite $\rightarrow x$

$\Rightarrow$ Länge der anderen Seite $a - x$

$\Rightarrow$ Flächeninhalt $A = x(a-x)$ oder $A = -x^2 + ax$

$\frac{dA}{dx} = -2x + a$, $\frac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0$ $\Rightarrow$ Flächeninhalt max. für $x = \frac{1}{2}a \Rightarrow$ Quadrat

3.) Wenn die Fkt. $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x_0 n stetige Ableitungen besitzt, wobei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

und n eine gerade ganze Zahl ist, dann befindet sich an der Stelle x_0 ein Maximum, wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist

Wenn $f^{(4)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ liegt dort ein Minimum vor

Bem. 2. Bedingung ist ein Sonderfall der 3. Bedingung
$\Downarrow$
in Praxis oft ausreichend

Bsp.: Extremwerte der Fkt. $f(x) = (x-2)^4$

$f'(x) = 4(x-2)^3 = 0$ für $x = 2$

$f''(x) = 12(x-2)^2$; $f''(2) = 0$; 2. Bedingung also nicht ausreichend

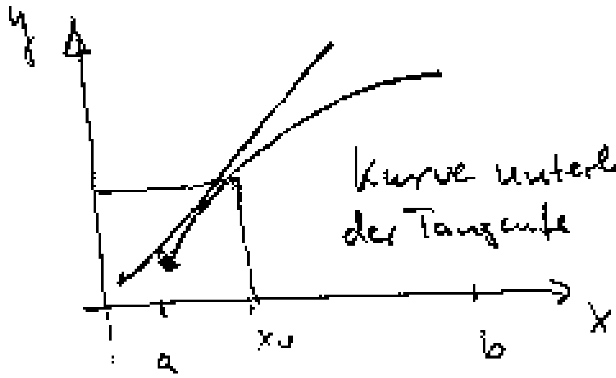
$\Rightarrow$ 3. Bedingung wird angewandt: $f'''(x) = 24(x-2)$; $f'''(2) = 0$

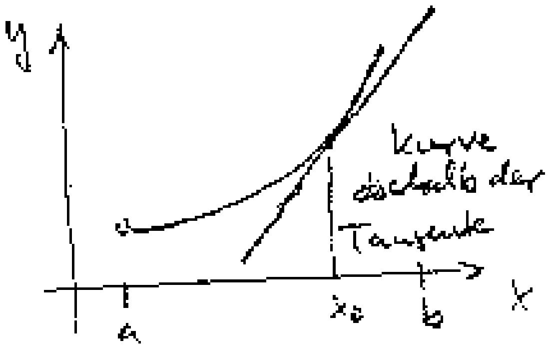
$f^{(4)}(x) = 24$; $f^{(4)}(2) = 24 > 0 \Rightarrow$ an der Stelle $x = 2$ Minimum

Konkavität und Konvexität, Wendepunkte

Kurve $y=f(x)$ heißt im Intervall (a,b)

<u>konvex</u> (von oben) <u>konkav</u> (von unten)





<u>hinreichende Bedingung</u> für

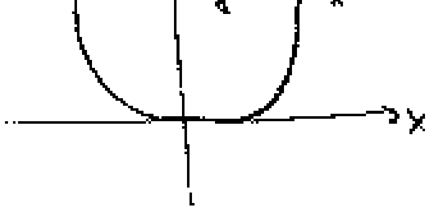
konvex: $f''(x)<0$ konkav $f''(x)>0$

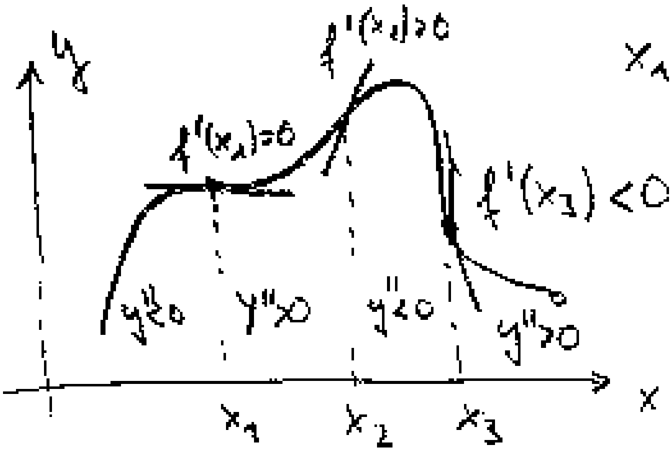
Der Punkt $P_0[x_0, f(x_0)]$ heisst <u>Wendepunkt</u> der Kurve $y=f(x)$ wenn die Kurve in einem bestimmten Intervall $(x_0, x_0+\delta)$ konkav ist und im Intervall $(x_0-\delta, x_0)$ konvex ist oder umgekehrt.

<u>notwendige Bedingung</u> für <u>Wendepunkt</u> in $P_0[x_0, f(x_0)]$

$$f''(x_0)=0$$

ist aber nicht hinreichend, wie z.B. $y=x^4$ zeigt in Umgebung von $x_0=0$





x_1, x_2, x_3 – Wendepunkte

<u>hinreichend für Wendepunkt:</u> $f''(x)$ wechselt beim Übergang von der links- zur rechtsseitigen Umgebung des Punktes x_0 sein Vorzeichen, dann ist $f''(x_0) = 0$

<u>Bsp.</u> 1) $f(x) = x^3 - 3x^2$; $f'' = 6x - 6 = 0$ für $x = 1$

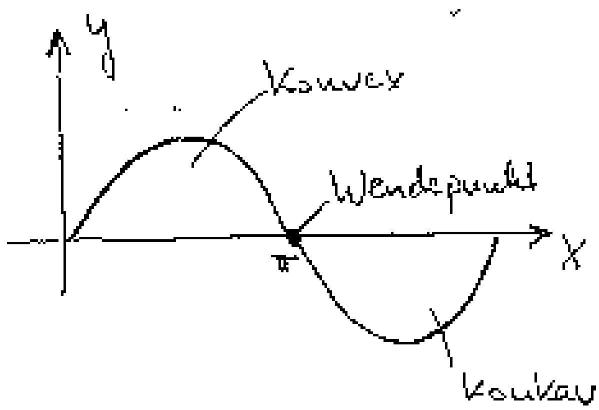
$f''(x) < 0$ für $x < 1$ und $f''(x) > 0$ für $x > 1$

$\Rightarrow$ Punkt $P_0(1, -2)$ Wendepunkt der Fkt. $f(x)$

2) Kurve $y = \sin x$ ist konvex für $0 < x < \pi$ und

konkav für $\pi < x < 2\pi$

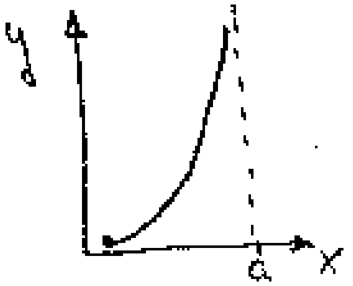
Punkt $P_0(\pi, 0) \Rightarrow$ Wendepunkt



Asymptoten

1) Vertikale Asymptoten

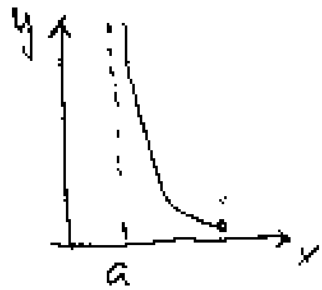
Gerade mit Gl. $x = a$ $\Rightarrow$



linksseitige A

$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$

beidseitige A.



$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$

Bsp.: Gerade $x = \frac{1}{2}\pi$ linksseitige A. der Fkt. $f(x) = \sqrt{\tan x}$

da $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi-0} \sqrt{\tan x} = \infty$

Gerade $x = 0$ beiderseitige A. von $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

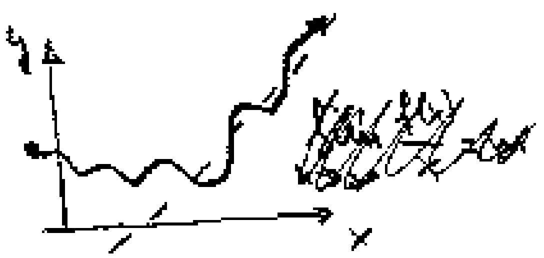
Gerade $x = 1$ rechtsseitige A. von $f(x) = \ln(x-1)$

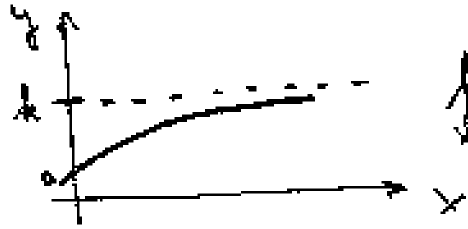
$\lim_{x\to 1+0} \ln(x-1) = -\infty$

2) Schräge und horizontale Asymptoten

Gerade $y = mx + k$ $\Rightarrow$ schräge ($m \neq 0$) oder horizontale ($m=$

A.





Bsp.: 1) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{2x} : x = \frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x} : x \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x\right] = 0 = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x\right]$$

$m = \frac{1}{2}$; $k = 0 \Rightarrow$ schräge Asymptote $y = \frac{1}{2}x$

Zur Bestimmung: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$; $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = k$

2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} : x = 0$ $\cancel{\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} : x}$

$\Rightarrow m = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 \Rightarrow k = 1$$

$\Rightarrow$ horizontale A. $y = 1$

3) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ def. für $x \in (-\infty, -1]$ und $x \in [1, +\infty)$

für m: $\cancel{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \cancel{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -1 = m$

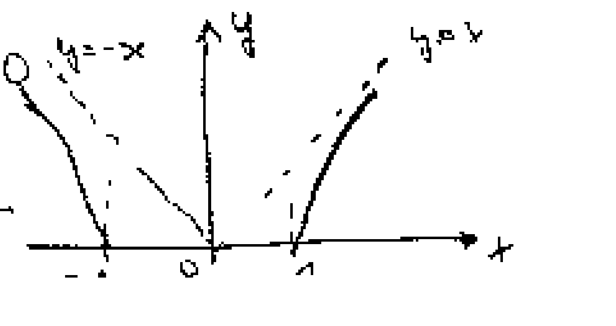
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = +1 = m$$

für k

$$\lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2-1} - (-x)\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1} + |x|} = 0 = k$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0$$

$$\sqrt{x^2-1} + x = \frac{(\sqrt{x^2-1} + x)(\sqrt{x^2-1} - x)}{\sqrt{x^2-1} - x} = \frac{(x^2-1) - x^2}{\sqrt{x^2-1} - x}$$



Schema einer Kurvendiskussion

besteht aus folgenden Operationen:

A. Bestimmung des Definitionsbereiches der Fkt.

B. Prüfung, ob Fkt. periodisch, gerade oder ungerade ist

C. Berechnung der Grenzwerte der Fkt. an den Rändern des Def.berei

D. Bestimmung der Extremwerte u. der Monotonieintervalle

E. Bestimmung der Asymptoten

F. Bestimmung der Wendepunkte, Konkavitäts- u. Konvexitätsin

G. Aufstellung der Tabellen des Kurvenverlaufs

H. Grafische Darstellung d. Fkt.

Bsp.: $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$

A. Def.bereich $(-\infty, 1)$ und $(1, +\infty)$

B. ist weder periodisch, noch gerade oder ungerade

C. berechne die Grenzwerte

$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \to 1-0} y = +\infty$; $\lim_{x \to 1+0} y = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$

F.- Da die zweite Ableitung y'' nur dann gleich 0 ist, wenn $x=0$ gilt, ist der Punkt $(0,0)$ der einzige Wendepunkt

- verfolgt man Vorzeichenwechsel von $y'' \Rightarrow$

Konkavitätsintervall | $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ konvex

Konvexitätsintervall | $x \in (0,1)$ sowie $x \in (1,+\infty)$ konkav

G.

x	$-\infty$	...	0	...	1	...	3	...	$+\infty$
y'	$\frac{1}{2}$	+	0	+	X	−	0	+	$\frac{1}{2}$
y''	0	−	0	+	X	+	$\frac{9}{16}$	+	0
y	$-\infty$	↗	0 Wendepunkt	↗ $+\infty$	X	$+\infty$ ↘	$\frac{27}{8}$ min	↗	$+\infty$