4. Integralrechnung

- neben <u>Differenziation</u> ist <u>Integration</u> ~~der~~ zweite grundlegende Rechenprozess in der Analysis
- zeigt sich insbesondere in praktischen Anwendungen
- <u>Flächen- und Volumenbestimmung</u> komplizierter Gebilde ohne Kenntnis der Integration nicht durchführbar ebenso wenig wie <u>Berechnung</u> fast sämtlicher <u>phys. Größen</u>

4.1 Das unbestimmte Riemann-Integral

- zeige, dass Diff. und Int. nicht unabhängig voneinander sin
  ⇒ vielmehr eng verknüpft
- Um den Zusammenhang deutlich zu machen ⇒ Begriff der Stammfunktion

<u>Def.:</u> Eine Fkt. $F(x)$ heisst <u>Stammfunktion</u> einer im einem gewissen (endlichen oder unendlichen) Intervall definierten Fkt. $f(x)$, wenn an jeder Stelle dieses Intervalls die Gleichung

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

erfüllt wird.

Bsp.: Fkt. $\frac{1}{3}x^3$ → Stammfkt. der Fkt. x^2, da

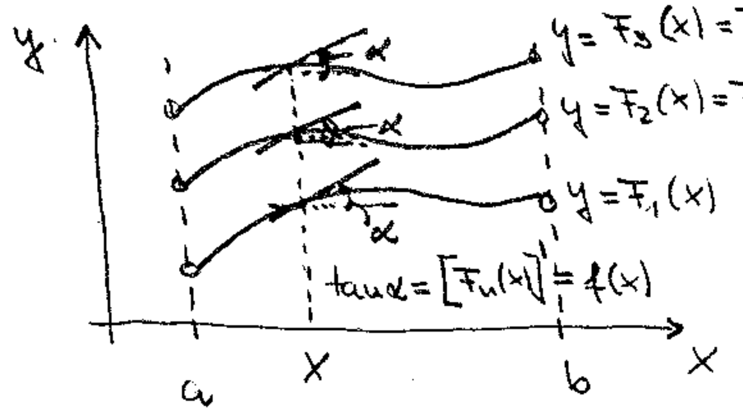
$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

Fkt. $\frac{1}{3}x^3+5$ → andere Stammfkt. derselben Fkt. x^2,

weil $\left(\frac{1}{3}x^3+5\right)' = x^2$

Satz 1: Jede in einem geg. Intervall stetige Fkt. hat in diesem Intervall eine Stammfkt.

Satz 2: Zwei Fktn. $F_1(x)$ und $F_2(x)$ sind dann und nur dann Stammfktn. ein und derselben Fkt. $f(x)$, wenn sie sich in dem betrachteten Intervall nur um eine Konstante voneinander unterscheiden.



geometrische Deutung des Satzes über Stammfktn.

Schlussfolgerung: Ist in dem betrachteten Intervall eine Stammfkt. der Fkt. $f(x)$ bekannt, so kann man jede beliebige andere Stammfkt. durch Addieren einer Konstanten erhalten.

Unbestimmtes Integral

Wenn die Fkt. $F(x)$ Stammfkt. der Fkt. $f(x)$ in einem geg. Intervall und C_1 eine bel. Konstante ist, dann nennt man die Summe $F(x)+C_1$, die alle Stammfktn. der Fkt. $f(x)$ in dem betrachteten Intervall darstellt, <u>unbestimmtes Integral</u> der Fkt. $f(x)$ und bezeichnet sie mit dem Symbol

$$\int f(x)\,dx;$$

x - Integrationsvariable
$f(x)$ - Integrand
$\int \ldots dx$ - Symbol der Integration
genaue Erklärung später

- Bestimmung der Stammfkt. → <u>Integration</u>
- <u>Integration ist die zur Differenziation inverse Operation:</u>

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

später ausführlich

Grundformeln

$$\int 0\,dx = C_1$$

$$\int 1\cdot dx = x + C_1$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C_1;\ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C_1,\ \begin{matrix} a>0 \\ a\neq 1\end{matrix}$$

$$\int e^x dx = e^x + C_1$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C_1$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C_1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C_1$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C_1$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C_1$$

Bsp.: $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C_1$, $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_1$

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C_1 , \quad \int \frac{1}{x^2} dx = -x^{-1} + C_1$$

Berechnung unbestimmter Integrale

Grundformeln: Satz: Wenn die Fktn. $f(x)$ und $h(x)$ in einem bestimmten Intervall stetig sind, dann gilt

$$\int [f(x) + h(x)] dx = \int f(x) dx + \int h(x) dx ,$$

$$\int [f(x) - h(x)] dx = \int f(x) dx - \int h(x) dx ,$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx , \quad c \text{ - bel. Konstante} .$$

Bsp.: $\int (\sin x + x^3) dx = \int \sin x\, dx + \int x^3 dx = -\cos x + \frac{1}{4}x + C_1$

Partielle Integration

Satz: Wenn die Fktn. $f(x)$ und $h(x)$ stetige Ableitungen besitzen, dann gilt

$$\int f(x) h'(x) dx = f(x) h(x) - \int h(x) f'(x) dx$$

Beweis: Produktregel $f h' + f' h = (f h)'$

$$\Rightarrow \int (f h)' dx = f(x) h(x) \stackrel{!}{=} \int f h' dx + \int f' h\, dx$$

Bsp.: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c_1$

$f = x,\ h' = e^x \quad \rightarrow f' = 1,\ h = e^x$

$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx =$

$f = x^2 \qquad f' = 2x$

$h' = \sin x \qquad h = -\cos x$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x\, dx$

$f_1 = x \qquad f_1' = 1$

$h_1' = \cos x \qquad h_1 = \sin x$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c_1$

Integration durch Substitution

Satz 1: Wenn $f(x) = g[h(x)] \cdot h'(x)$ ist, die Fkt. $t = h(x)$ stetige Ableitungen für $x \in (a,b)$, $t \in (A,B)$ besitzt und die Fkt. $g(t)$ im Intervall (A,B) stetig ist, dann gilt

$$\int g[h(x)] \cdot h'(x)\, dx = \int g(t)\, dt \quad \left(= \int f(x)\, dx\right) \qquad (*)$$

mit $t = h(x)$.

Satz 2: Wenn die Ableitungen der Fkt. $x = g(t)$, $t \in (A,B)$, $x \in (a,b)$ und die Fkt. $f(x)$ im Intervall (a,b) stetig sind, dann gilt

$$\int f(x)\, dx = \int f[g(t)]\, g'(t)\, dt \quad \text{mit } x = g(t). \qquad (**)$$

Die <u>Substitutionsmethode</u> → Anwendung von (*) oder (**)

- Anwendung von (*) → setzt man also $\boxed{t = h(x)}$ → so ist $\boxed{h'(x)dx}$ durch $\boxed{dt}$ zu ersetzen und danach $\boxed{h'(x)dx}$ formal als Differenzial zu betrachten
- Anwendung von (**) → ersetzt $\boxed{dx}$ durch $\boxed{g'(t)\,dt}$
- Substitutionsmethode zweckmäßig, wenn Integrale mit der neuen Variable t leichter als die Int. mit x zu berechnen sind
- dx ist Differential u $\Delta t = \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{dh}{dx}$

<u>Bsp.:</u> $\int (2x+5)^8 dx = \frac{1}{2}\int t^8 dt = \frac{1}{18}t^9 + C_1 = \frac{1}{18}(2x+5)^9 + C_1$

$$t = 2x+5 = h(x)$$
$$dt = 2dx$$

$$\int \cos(6x)dx = \frac{1}{6}\int \cos t\,dt = \frac{1}{6}\sin t + C_1 = \frac{1}{6}\sin(6x) + C_1$$

$$t = 6x = h(x)$$
$$dt = 6dx$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C_1$$

$$t = x^2+3 = h(x)$$
$$dt = 2x\,dx$$

$$\int x^2 e^{-x^3}dx = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t + C_1 = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C_1$$

$$t = -x^3 = h(x)$$
$$dt = -3x^2 dx$$

i) $\dfrac{x-a}{x-b} = \dfrac{x-b+b-a}{x-b} = 1 + \dfrac{b-a}{x-b}$

ii) $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)} = \dfrac{(x-a-c+c)(x-b)}{x-c} = (x-b) + \dfrac{(c-a)}{x-c}(x-b) \neq$

$= (x-b) + (c-a) + \dfrac{(c-a)(c-b)}{x-c}$

iii) $\dfrac{1}{(x-b)(x-c)} = \dfrac{x-b-x+b+1}{(x-b)(x-c)} = \dfrac{1}{x-c} - \dfrac{x-b+1}{(x-b)(x-c)} = \dfrac{1}{x-c} - \dfrac{(x-c)+(1-b+c)}{(x-c)(x-b)}$

$= \dfrac{1}{(x-c)} - \dfrac{1-\cancel{b+c}}{(x-b)} + \dfrac{1-b+c}{(x-c)(x-b)}$

$\dfrac{1}{(x-b)(x-c)}(1-1+b-c) = \dfrac{1}{x-c} - \dfrac{1}{x-b}$

$\dfrac{1}{(x-b)(x-c)} = \dfrac{1}{b-c}\left(\dfrac{1}{x-c} - \dfrac{1}{x-b}\right)$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{1}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^r}\,dx = A\int \underbrace{(x-a)}_{t}{}^{-r}\,dx = A\int t^{-r}\,dt = \frac{A}{1-r}\,t^{-r+1} + C = \frac{A}{1-r}(x-a)^{1-r} + C_1$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}\,dx = A\int \frac{x+B/A}{\underbrace{(x^2+px+q)}_{t}}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{\overbrace{2x+p}^{dt}}{\underbrace{x^2+px+q}_{t}}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$$

$dt = 2x+p$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\underbrace{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}_{-\frac{\Delta}{4}}\left[\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\underbrace{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}_{2\sqrt{-\Delta}}}\right)^2+1\right]} + C_1$$

$t = \frac{2x+p}{\sqrt{\ }}$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{-\Delta}}\int \frac{dt}{1+t^2} + C_1 = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{-\Delta}}\cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

Klausur → Datum

Integration rationaler Funktionen

st Integrand eine rationale Fkt. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

P und Q - Polynome

⇒ so lässt er sich stets in eine Linearkombination von + Termen der Form (+ Polynom !!)

$$\text{Polynom}, \quad \frac{A}{(x-a)^r}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}; \quad r \in \mathbb{N}$$

zerlegen — Partialbrüche: 1. Art, 2. Art

Setze
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{r_1}} + \frac{A_2}{(x-a_2)^{r_2}} + \dots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2+p_k x+q_k)^{r_k}} + \dots$$

Integrale der einfachen gebrochenen Fktn. lauten:

$$\int \frac{A}{(x-a)^r}\,dx = \begin{cases} A \ln|x-a| + c_1 & \text{für } r=1 \\ \frac{A}{1-r}(x-a)^{1-r} + c_1 & \text{für } r = 2,3,\dots \end{cases}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r} = \begin{cases} \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c_1 & \text{für } r=1 \\ \frac{A}{2(1-r)}(x^2+px+q)^{1-r} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\left(\frac{4}{-\Delta}\right)^{r-\frac{1}{2}} \times \int \frac{dt}{(1+t^2)^r} & \text{für } r=2,3,\dots \end{cases}$$

mit $\Delta = p^2 - 4q$

zur Berechnung des Integrals $\boxed{\int \frac{dt}{(1+t^2)^r} \text{ mit } r \geq 2}$

$\Rightarrow$ $(r-1)$-mal die Rekursionsformel

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}, \quad n \geq 2$$

an (Differenziere ↗ und zeige, daß stimmt)

Bsp.: $n=3$

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{4} \frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} +$$

$$+ \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} \right] = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8} \arctan t + C_1$$

$\Rightarrow$ Integration rationaler Fktn. wird also in eine Integration von Partialbrüchen überführt

Bsp. 1: $\int \frac{dx}{x^3-x}$; $P(x) = 1$; $Q(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$

$\Rightarrow$ wird in Partialbrüche zerlegt: $\rightarrow$ zunächst Illustration an einfachem Bsp.

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C_1}{x+1}$$

um Koeffizienten zu berechnen, bringen Summe auf der rechten Seite auf den Hauptnenner, d.h. x^3-x und vergleichen die Zähler

$$1 \equiv (A+B+C_1)x^2 + (B-C_1)x - A$$

diese Identität muss für jedes x ($\neq 0, \pm 1$) erfüllt sein

$$\Rightarrow \quad A+B+C_1=0, \; B-C_1=0, \; -A=1 \quad \cancel{\Rightarrow \text{nächste Blatt}}$$

$$\Rightarrow \quad A=-1, \; B=\frac{1}{2}, \; C_1=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^3-x} = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C_1 = \ln\left(\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|}\right) + C_1$$

<u>Bsp.2:</u> $I = \int \frac{x+1}{x^2(x-1)(x^2+4)}\,dx$

$$\frac{x}{x^2(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C_1}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Partialbruchzerlegung $\Rightarrow$ Summe von Partialbrüchen, wobei jedem g'rochen rationaler Fktn.

Faktor vom Typ $\boxed{(x-a)^r}$ in der Zerlegung $Q(x)$ die Summe

$$\boxed{\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r}}$$ entspricht

jedem Faktor vom Typ $\boxed{(x^2+px+q)^r}$ $\hat{=}$ dagegen die Summe

$$\boxed{\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{A_rx+B_r}{(x^2+px+q)^r}}$$

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)(x^2+4)} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}}_{\text{vom Typ } \frac{1}{(x-a)^r} \text{ mit } a=0,\ r=2} + \frac{C_1}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Partialbrüche

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)(x^2+4)} = \frac{Ax(x-1)(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + C_1x^2(x^2+4) + (Dx+E)x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x^2+4)}$$

$= \ldots$ $\Rightarrow$ nächstes Blatt

$\Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{4},\ C_1 = \frac{2}{5},\ D = \frac{1}{10},\ E = -\frac{3}{20}$

$$\int \frac{Dx+E}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{20}\int \frac{2x-3}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{20}\ln(x^2+4) - \frac{3}{40}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + C_1$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4x} + \frac{2}{5}\ln|x-1| + \frac{1}{20}\ln(x^2+4) - \frac{3}{40}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C_1$$

Integration von gewissen transzendenten Fktn.

- Integrale vom Typ $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,dx}$ wobei $R(u,v) \to$ rationale Fkt. der Variablen u, v ist $\Rightarrow$ wird in Integral einer rationalen Fkt. übergeführt durch

$$\boxed{t = \tan\frac{x}{2}}\ ;\ \text{d.h.}\ \boxed{x = 2\arctan(t)}$$

- führt stets auf eine rationale Fkt. in t
- beruht auf Relationen $\Rightarrow$ Herleitung $\Rightarrow$ übernächstes Blatt

$$\boxed{\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\ ;\ \boxed{\cos x = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)(x^2+4)} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}}_{\text{vom Typ}} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Partialbrüche

vom Typ

$$\frac{1}{(x-a)^r} \text{ mit } a=0,\ r=2$$

$$\boxed{\frac{x+1}{x^2(x-1)(x^2+4)} = \frac{Ax(x-1)(x^2+4)+B(x-1)(x^2+4)+Cx^2(x^2+4)+(Dx+E)x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x^2+4)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x+1 = A(x^4+4x^2-x^3-4x)+B(x^3+4x-x^2-4)+C(x^4+4x^2)+D(x^4-x^3)+E(x^3-x^2)}$$

Vergleich

x^4: $\quad 0 = A+C+D \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}+C+D=0$

x^3: $\quad 0 = -A+B-D+E \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-D+E=0$

x^2: $\quad 0 = 4A-B+4C-E \qquad -2+\frac{1}{4}+4C-E=0$

x: $\quad 1 = -4A+4B \quad \Rightarrow 1=-4A-1;\ \boxed{A=-\frac{1}{2}}$

x^0: $\quad 1 = -4B \quad \Rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{4}}$

$\cancel{E = 4C - \frac{7}{4} \Rightarrow D = -\frac{1}{4}+E = -\frac{1}{4}}$

$$\boxed{\begin{aligned} -D+E &= -\frac{1}{4} \\ 4C-E &= \frac{7}{4} \\ C+D &= \frac{1}{2} \end{aligned}} \Rightarrow D = C-\frac{1}{2}$$

$$-\left(C-\frac{1}{2}\right)+E = -\frac{1}{4}$$

$$4C-E=\frac{7}{4}$$

$-C+E = -\frac{3}{4}$

$4C-E = \frac{7}{4}$

Addition

$3C = 1$

$C =$

Herleitung

$$t = \tan\frac{x}{2}; \qquad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) : \cos^2\frac{x}{2}}{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right) : \cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\,\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

und

$$dx = 2\,(\arctan t)'\,dt = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

<u>Bsp.:</u>

$$\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{5+3\,\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{5(1+t^2)+3(1-t^2)} = \int \frac{dt}{4+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + C_1 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C_1$$

ähnlich: $\boxed{\int R(\sinh x, \cosh x)\,dx}$

Substitution $\boxed{t = \tanh \frac{x}{2}}$

$$\boxed{\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}; \quad dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}}$$

<u>Bsp.:</u>

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C_1$$

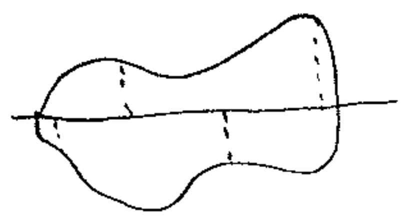
<u>Bemerkung</u> zur Berechnung von Integralen:

Stammfkt. vieler, auch einfacher Fktn., sind keine elementaren Fktn.

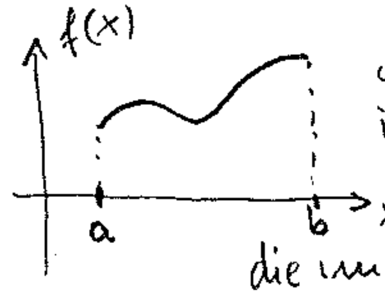
z.B.: $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int \frac{e^x}{x}\,dx$

4.2 Das bestimmte Integral

- ursprüngliche Motivation → rein geometrisch: Flächeninhalt beliebig begrenzter Flächen?



⇒



auf Flächeninhalt unter einer Kurve, die im übrigen durch Geradenstücke begrenzt wird

- für Lösung ⇒ krummlinige Teil der Fläche ⇒ lässt sich als Graph einer $\boxed{\text{Fkt. } f: I \to \mathbb{R}}$ darstellen
- für weitere Aufgabe genügt Annahme, dass f beschränkt ist

- Idee der Flächenberechnung → Ausschöpfung der Fläche durch Rechtecke, deren Flächeninhalt man kennt

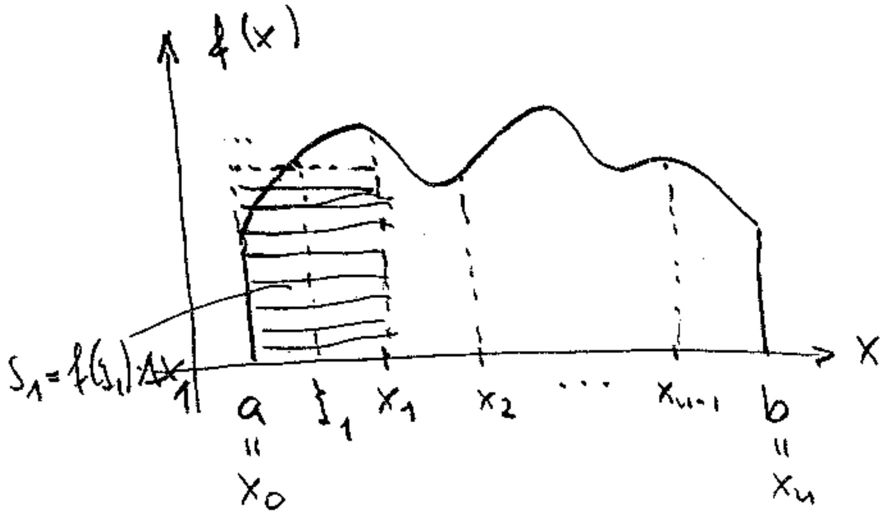
- dazu Aufteilung des Intervalls $\boxed{[a,b]}$

$$\boxed{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b}$$

- wählen in jedem Intervall $\boxed{I_k := [x_{k-1}, x_k]\ ;\ x_k - x_{k-1} =: \Delta x_k \quad k = 1, 2, \ldots, n}$ einen bel. Zwischenwert $\boxed{\xi_k \in I_k}$

- bilden damit die Rechtecksummen

$$\boxed{S(f(\xi_k), \Delta x_k) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k}$$



- betrachten jetzt eine beliebige Folge von Intervalleinteilungen mit

$$\boxed{\max_k \Delta x_k \to 0}$$

(woraus sofort $n \to \infty$ folgt, jedoch nicht umgekehrt)

Falls der Limes von S eindeutig (d.h. unabhängig von Einteilung und Wahl der Zwischenwerte) ex. ⇒ so schreibt man dafür

$$\boxed{S(f(\xi_k), \Delta x_k) \xrightarrow[\max_k \Delta x_k \to 0]{} \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{bestimmtes Riemann-Integral}}}$$

Bem.: ex. noch zweite Methode (Ober- und Untersummen)

<u>Allgemeine Eigenschaften bestimmter Integrale</u>

<u>Satz 1</u>: Ist die Fkt. $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig, so ist sie dort <u>integrierbar</u>.

<u>Satz 2:</u> Ist die Menge der Unstetigkeitsstellen, der im abgeschlossenen Intervall beschränkten Fkt. $f(x)$ endlich oder unendlich, aber abzählbar, so ist die Fkt. dort <u>integrierbar</u>

<u>entscheidendes Kriterium f. Existenz des Integrals</u>

<u>weitere Eigenschaften:</u>

1) $\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$; $c_i =$ const.

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad a \leq c \leq b$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = - \int_b^a f(x)\,dx \curvearrowright \int_a^a f(x)\,dx = 0$

4) Gilt $m \leq f(x) \leq M$ in $x \in [a,b] \rightarrow$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

5) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für $x \in [a,b] \rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

6) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$; $a<b$; ist $|f(x)| \leq M$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \leq M(b-a)$

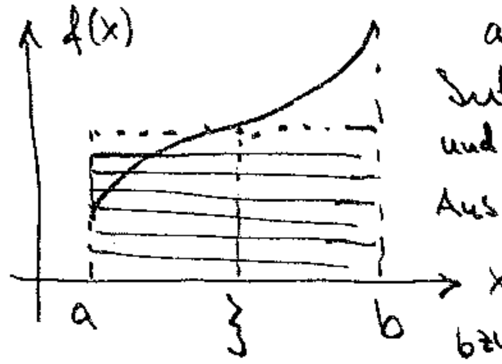
wie bei Diff. → gibt auch hier MW-Satz

Satz (MW-Satz d. Integralrechnung):

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ex. (mindestens) ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Beweis: Geometrisch → Fläche unterhalb der Kurve soll durch eine Rechteckfläche ersetzt werden



analytisch: Da f im abgeschlossenen Intervall stetig ist, ist f beschränkt und nimmt die Extremwerte m & M an

Aus $m \le f(x) \le M$ folgt durch Int.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

bzw. $$m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}_{} \le M$$

stellt daher einen Zwischenwert dar der von der Fkt. aufgrund des Zwischenwertsatzes angenommen wird

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

□

Hauptsätze der Integralrechnung

Satz 1: Ist die Fkt. $f(x)$ in dem Intervall $[a,b]$ integrierbar und $\alpha \in [a,b]$, so ist die Fkt. $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ an jeder Stelle dieses Intervalls stetig, und außerdem ex. die Ableitung

$$\frac{d}{dx}\int_\alpha^x f(t)\,dt = f(x)$$

an jeder Stelle $x \in [a,b]$, wo die Fkt. $f(x)$ stetig ist.

Bem.: Fkt. $F(x)$ ist durch ein Integral mit veränderlicher oberer Grenze x definiert
$\Rightarrow$ deshalb wird die Int.-variable mit t bezeichnet (Scheinvariable) $\rightarrow$ $\int_\alpha^x t\,dt = \int_\alpha^x s\,ds = \int_\alpha^x u\,du = \frac{1}{2}(x^2-\alpha^2)$

Bsp.: Fkt. $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^3+1}\,dt$ ist in $[-1,a]$ stetig
wobei $F'(x) = \sqrt{x^3+1}$ ist

Satz 2: Ist die Fkt. $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ stetig
Hauptsatz und die Fkt. $F(x)$ ihre Stammfkt., so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Beweis $\rightarrow$ nächstes Blatt

$\Rightarrow$ 2. Satz der "wichtigste" Satz d. Int.rechnung, weil damit die Berechnung des bestimmten Integrals auf die Berechnung unbestimmter Integrale zurückgeführt wird.

Bsp.: $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 0 = \frac{8}{3}$

$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1+1 = 2$

Beweis (Hauptsatz):

wissen, dass

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad (c = \text{const.}) \text{ gilt}.$$

Stammfkt. $F'(x) = f(x)$

und $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

also ist

$$F(a) = c \;; \quad F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c$$

und damit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$\square$

Bemerkung: Aussage des Satzes $\Rightarrow$ man braucht bei Berechnung von Integralen nie auf die äußerst unhandliche Def. zurückgreifen $\Rightarrow$ genügt vielmehr eine Stammfunktion aufzufinden

~~Bemerkung~~

Berechnung bestimmter Integrale

zwei Sätze von Nutzen

Satz 1 (über die Einführung einer neuen Variablen in einem bestimmten Integral):
Wenn die Funktion $\varphi'(t)$ im abgeschlossenen Intervall $[A,B]$ und die Fkt. $f(x)$ für alle Werte, die die Fkt. $x = \varphi(t)$ im Bereich $[A,B]$ annimmt, stetig sind und $\varphi(A) = a$, $\varphi(B) = b$ ist, dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f[g(t)]\,g'(t)\,dt}$$

<u>Bsp.:</u> $\displaystyle\int_2^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_5^{10}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]\Big|_5^{10} = \frac{5}{3}\left(2\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)$

$x=\sqrt{t-1}\,,\quad dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t-1}}$

x	2	3
t	5	10

<u>Satz 2</u> (über partielle Integration bestimmter Integrale):
Wenn die Fktn. $u(x)$ und $v(x)$ im Intervall $[a,b]$ stetige Ableitungen besitzen, dann gilt

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b v(x)u'(x)\,dx.}$$

<u>Beweis:</u> Produktregel $uv'+u'v=(uv)'$
lässt sich nach Hauptsatz integrieren zu

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

$\square$

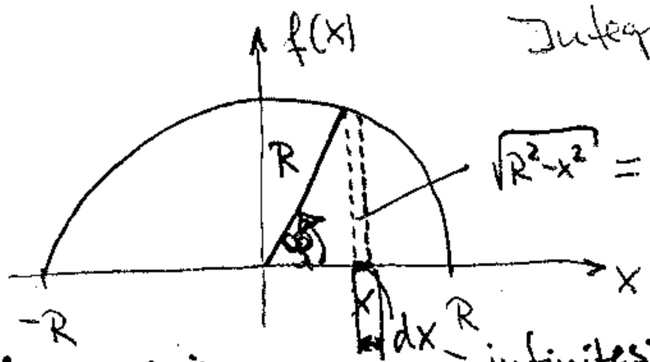
<u>Bsp.:</u> $\displaystyle\int_0^\pi \underset{u}{\underset{\parallel}{x}}\,\underset{v'}{\underset{\parallel}{\cos x}}\,dx = \pi\sin\pi - 0\cdot\sin 0 - \int_0^\pi \sin x\,dx = -2.$

Geometrische Anwendung bestimmter Integrale

Bsp.: Flächeninhalt F unterhalb des Kreisbogens

Integral $\hat{=}$ Rechtecksumme $\boxed{y \cdot dx}$

$x^2+y^2=R^2$



$$F = \int_{-R}^{R} y\, dx$$

Höhe (y), infin. Grundseite (dx)

$$F = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\, dx$$

mit Substitution $x = R\cos\varphi$
$dx = -R\sin\varphi\, d\varphi$

$x_f = R \Rightarrow \cos\varphi_f = 1 \Rightarrow \varphi_f = 0$

$x_i = -R \Rightarrow \cos\varphi_i = -1 \Rightarrow \varphi_i = \pi$

$$\Rightarrow \quad F = \int_{\pi}^{0} R\sqrt{1-\cos^2\varphi}\,(-R\sin\varphi)\, d\varphi$$

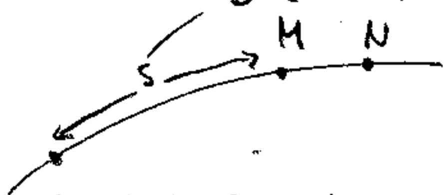
$$= -R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2\varphi\, d\varphi = R^2 \int_{0}^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_{0}^{\pi} (1-\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{R^2}{2}\left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2} R^2$$

Bogenlänge

ebene Kurve def. durch $y = f(x)$

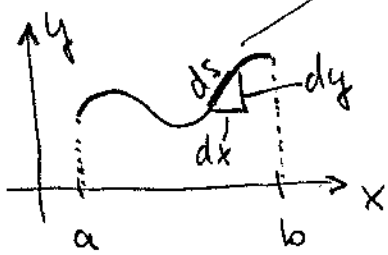
Bogenelement



$\Rightarrow$ infinitesimale Zuwachs $\Delta s = \widehat{MN} \approx ds$ - Differenzial der Bogenlänge = Bogenelement $\left(ds^2 = dx^2 + dy^2\right)$

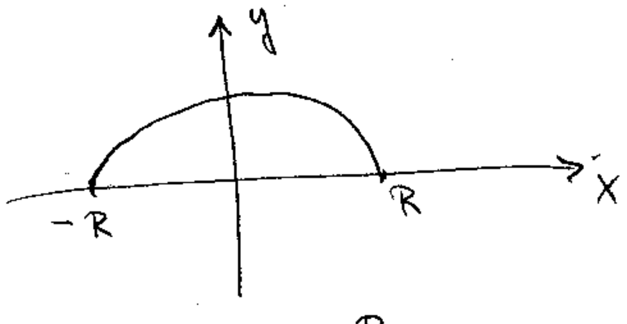
$$\Delta s \approx ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Bogenlänge



$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Bsp: Länge des Kreisbogens



$x^2 + y^2 = R^2$

$y = +\sqrt{R^2 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Rightarrow l = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$;\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C_1 \;;\; a > 0$

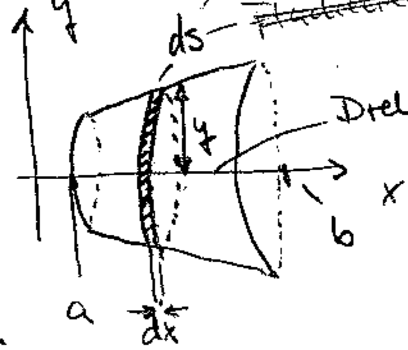
$$R\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = R\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\Big|_{-R}^{R} = R\left[\arcsin(1)-\arcsin(-1)\right] =$$

$$= R\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\pi R}}$$

~~Volumina~~

~~Volumen eines rotationssymm Körpers bei Drehung um die x-Achse~~

Mantelflächen von Rotationskörpern



Flächeninhalt eines durch Rotation der Kurve $y=f(x)$ um die x-Achse entstehenden Mantels

Höhe

Radius

~~Kreis~~

~~Grundfläche~~

$$S' = 2\pi\int_a^b y\,ds \quad \to \text{Differential d Bogenlänge}$$

$$= 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Bsp.: Flächeninhalt des Körpers der durch Rotation des Kreises mit Radius R um x-Achse gebildet wird

~~Lösu~~

$$x^2+y^2=R^2; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow S' = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-R}^{R} R\,dx = 2\pi R\cdot x\Big|_{-R}^{R}$$

$$= \underline{\underline{4\pi R^2}}$$

$$\cancel{= 2\pi R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 2\pi R\left[R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-R}^{R}\right]}$$

$$\cancel{= 2\pi R\left[R^3 2 - \frac{2}{3}R^3\right] = 2\pi R^4\left[2-\frac{2}{3}\right] = \frac{8}{3}\pi R^4}$$

$$\cancel{= 2\pi R} \qquad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

Volumina

Volumen eines rotationssymm. Körpers bei Drehung um x-Achse

$$V = \pi \int_a^b \overset{\approx R^2}{y^2}\, dx \quad \text{(s. obiges Bild)}$$

Bsp. Kreis $\quad x^2 + y^2 = R^2$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^{R} = \pi \left[2R^3 - \frac{1}{3} \cdot 2R^3 \right] =$$

$$= \pi R^3 \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi R^3}}$$

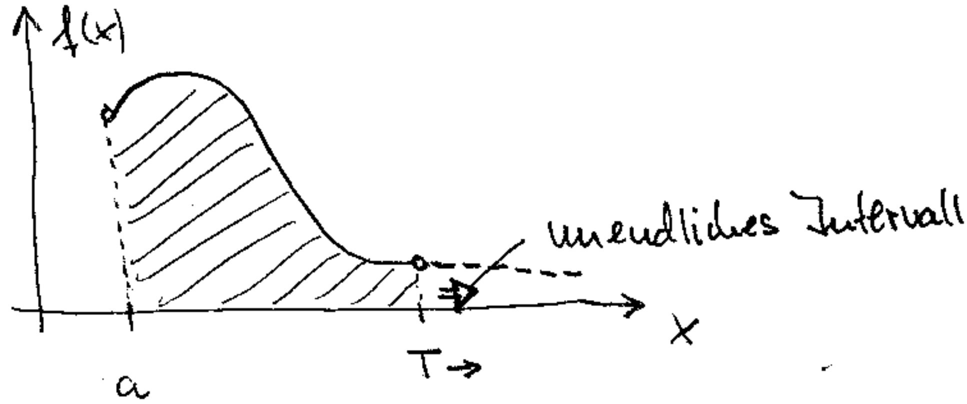
1.3 Uneigentliche Integrale

- im Anwendungen häufig → möchte eine nicht überall beschränkte Fkt. oder aber eine beschränkte Fkt. über ein nicht beschränktes Intervall integrieren

- in diesen Fällen muss man – um das gesuchte Integral erst zu definieren – einen weiteren Grenzübergang machen

1) Uneigentliches Integral über ein $\boxed{\text{unendliches}}$ Intervall

- sei die Fkt. $f(x)$ im Intervall $[a, +\infty)$ def. und im Intervall $[a, T]$ für jedes $T > a$ integrierbar



Besitzt das Integral $\int_a^T f(x)dx$ für $T \to \infty$ einen eigentlichen Grenzwert, dann existiert (konvergiert) das uneigentliche Int. $\int_a^\infty f(x)dx$:

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{T \to \infty} \int_a^T f(x)dx}$$

Bsp.: $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \lim_{T\to\infty} \int_0^T x e^{-x^2} dx =$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-T^2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

ähnliche Def. für uneigentliche Integrale:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^\infty f(x)dx &= \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)dx \\ \int_{-\infty}^b f(x)dx &= \lim_{T\to-\infty} \int_T^b f(x)dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x)dx &= \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \end{aligned}}$$

wichtiges Bsp.: $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ wenn $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

für $\alpha = 1$ gilt: $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_a^b = \ln\left|\frac{b}{a}\right| \xrightarrow[b\to\infty]{} \infty$

für $\alpha \neq 1$ gilt: $\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{b^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

$$\xrightarrow[b\to\infty]{} \begin{cases} -\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

insgesamt $$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{a^{\alpha-1}} & \text{für } \alpha>1 \\ \text{divergent} & \text{für } \alpha\le 1 \end{cases} \qquad (\blacksquare)$$

$\Rightarrow$ damit <u>Konvergenz- und Divergenzkriterien</u>

<u>Vergleichskriterium:</u> Sind die Fktn. $f(x)$ und $h(x)$ im Intervall $[a,T]$ für jedes T integrierbar und ist außerdem $\boxed{0 \le f(x) \le h(x)}$ für $x \in [a,+\infty)$ so folgt aus der Konvergenz des Integrals $\int_a^\infty h(x)dx$ die Konvergenz des Int. $\int_a^\infty f(x)dx$.

Ist das Int. $\int_a^\infty f(x)dx$ aber divergent, so ist auch das Int. $\int_a^\infty h(x)dx$ divergent.

$\Rightarrow$ bei Vergleichskriterien nutzt man $(\blacksquare)$ $\Rightarrow$ eine Fkt muß im Unendlichen stärker als $1/x$ abfallen, um (uneigentlich) integrabel zu sein

<u>Bsp.:</u> $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ ist konvergent, da $0 < \frac{1}{1+x^2} < \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{Majorante}}$ $(\alpha=2)$

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ist divergent, da $0 < \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\text{Minorante}} < \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ für $x \geq 1$

und das Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergiert

<u>Satz 2:</u> Ist die Fkt. $h(x)$ monoton und für $x \geq a$ beschränkt, so folgt aus der <u>Konvergenz</u> des Integrals $\int_a^\infty f(x)\,dx$ die <u>Konvergenz</u> des Int. $\int_a^\infty f(x)h(x)\,dx$.

<u>Bsp.:</u> $\int_0^\infty (1-e^{-x}) \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist konvergent

$h(x) = 1-e^{-x}$; $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

<u>Werte:</u> $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$; $\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$, $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

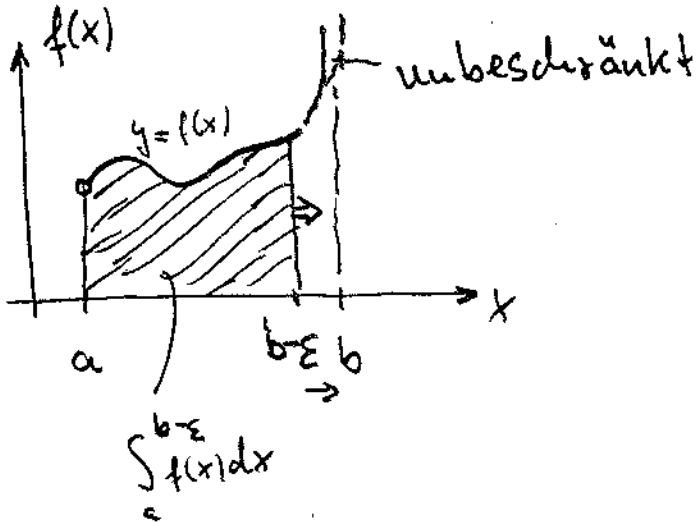
$$\int_0^\infty \sin^2 x\,dx = \int_0^\infty \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2) Uneigentliches Integral einer $\boxed{\text{unbeschränkten}}$ Fkt.

Fkt. $f(x)$ im Intervall $[a, b-\varepsilon]$ für jedes ε $(0<\varepsilon<b-a)$ integrierbar und im Intervall $[a,b)$ unbeschränkt

Ex. ein eigentlicher Grenzwert des Int. $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ für $\varepsilon \to 0$, so heißt dieser Grenzwert uneigentliches Int. $\Rightarrow$ Bezeichnung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx}$$



<u>Bsp.:</u> $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\arcsin x\right]\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\varepsilon - \varepsilon\cdot\ln\varepsilon - 1\right) = \underline{\underline{-1}}$$

t.4 Von einem Parameter abhängige Integrale

Satz: Ist die Fkt. zweier Variablen $k(x,t)$ in dem Rechteck $a \le x \le b$, $c \le t \le d$ stetig, so ist auch die Fkt.

$$\boxed{F(t) = \int_a^b k(x,t)\,dx}\ , \quad t \text{ - Int. parameter}$$

in dem Intervall $[c,d]$ stetig. Existiert darüber hinaus die partielle Ableitung $\frac{\partial k}{\partial t}$ und ist sie in diesem Rechteck stetig, so ex. in dem Intervall $[c,d]$ die Ableitung $F'(t)$ und es gilt:

$$\boxed{F'(t) = \int_a^b \frac{\partial k}{\partial t}\,dx}$$

Bsp.: $F(t) = \int_0^1 e^{-tx^2}dx$ ist in jedem Intervall $[c,d]$ def.

$$F'(t) = \int_0^1 (-x^2)e^{-tx^2}dx = -\int_0^1 x^2 e^{-tx^2}dx$$

$\boxed{\rightarrow \text{2. Bsp Rückseite}}$

Differenzieren unter dem Integralzeichen

Satz: Wenn die Fktn. $f(t)$ und $h(t)$ in dem Intervall $[\alpha,\beta]$ stetige Ableitungen besitzen, $a \le f(t) \le b$; $a \le h(t) \le b$ für $t \in [\alpha,\beta]$ gilt
Kurven verlassen das Rechteck $a \le x \le b$, $a \le t \le b$ nicht
und die ~~Fktn.~~ Fkt. zweier Variablen $k(x,t)$ samt ihrer partiellen Abl. $\frac{\partial k}{\partial t}$ in dem Rechteck $a \le x \le b$, $\alpha \le t \le \beta$ stetig ist, dann hat die Fkt.

$$\boxed{F(t) = \int_{f(t)}^{h(t)} k(x,t)\,dx}$$ t- Abhängigkeit! auch in Integrationsgrenzen

in dem Intervall $[\alpha, \beta]$ die Ableitung:

$$\boxed{F'(t) = \int_{f(t)}^{h(t)} \frac{\partial k}{\partial t}\,dx + k[h(t),t]\cdot h'(t) - k[f(t),t]\cdot f'(t)}$$

Formel von Leibniz

Im Sonderfall $k(x,t) = k_0(x)$ gilt:

$$\boxed{F_0(t) = \int_{f(t)}^{h(t)} k_0(x)\,dx\,; \quad F_0'(t) = k_0[h(t),t]\,h'(t) - k_0[f(t),t]\,f'(t)}$$

Bsp.: $F(t) = \int_t^{t^2} e^{xt}\,dx\,; \quad F'(t) = \int_t^{t^2} x e^{xt}\,dx + e^{t^3}\cdot 2t - e^{t^2}$

$$F(t) = \int_0^{\sin t} \sqrt{x^2+1}\,dx\,; \quad F'(t) = \sqrt{\sin^3 t + 1}\cdot \cos t$$

Integration durch Reihenentwicklung

- nicht immer mgl. Integrale durch elementare Fktn. auszudrücken, auch wenn Integrand eine elementare Fkt. ist

- in vielen Fällen → nichtelementare Integrale durch Reihenentwicklung angeben

- lässt sich Integrand in eine gleichmäßig konverge' Reihe entwickeln ⇒ erhält durch gliedweise Integration eine ebenfalls gleichmäßig konvergente Reihe für das bestimmte Int. $\int_a^x f(t)\,dt$

(Reihe $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ Grenzwert

Reihe konvergiert in einem geg. Gebiet, wenn für bel. $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl N derart angegeben werden kann, dass $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt

gleichmäßige Konvergenz: es kann eine derartige Zahl N gefunden werden, die für alle x-Werte im Konvergenzgebiet gilt

Reihenentwicklung des Integranden

→ Integration - Summation vertauschbar!

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \quad : \quad \int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k(x)dx$$

Bsp.: Boseintegral

$$I = \int^x \frac{dx}{e^x - 1} = \int^x \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-x}\right)^k \quad \text{geom. Reihe} \quad e^{-x} \leq 1$$

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \int^x e^{-x} e^{-kx} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int^x e^{-kx} dx}_{= -\frac{1}{k} e^{-kx}}$$

$$I = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(e^{-x}\right)^k = \ln\left(1 - e^{-x}\right)$$

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right]$$

---

direkt mit Substitution:

$$e^x = t \;;\; x = \ln t \;;\; \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

oder aber:

$$\int^x \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \int^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)$$

$$f(x) = 1 - e^{-x}$$

$$I = \int^x \frac{dx}{e^x - 1} = \int^{t=e^x} \frac{1}{t-1} \frac{1}{t} dt = \int^t \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$= \ln(t-1) - \ln(t) = \ln\left(\frac{t-1}{t}\right)^{t=e^x} = \ln\left(1 - e^{-x}\right) \checkmark$$

Rekursion

$$I_n(x) = \int^x \sin^n(x)\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\sin^{n-1}(x) \cdot \sin(x)$$

$$u \quad \cdot \quad v \qquad \text{partiell}$$

$$= -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \int^x (n-1)\sin^{n-2}(x) \underbrace{\cos x \cdot \cos x}_{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$\cancel{I_n(x)} = -\sin^{(n-1)}(x)\cos x + (n-1)\,I_{n-2}(x) - (n-\cancel{1})\,I_n(x)$$

nach $I_n(x)$ auflösen

$$I_n(x) = -\frac{1}{n}\sin^{(n-1)}(x)\cos(x) + \left(1-\frac{1}{n}\right) I_{n-2}(x)$$

2 Startglieder: $I_0(x) = \int^x dx = x$

$I_1(x) = \int^x \sin x\,dx = -\cos x$